Seria „MATEMATICĂ“

ANALIZĂ MATEMATICĂ
Calcul diferențial

MATHEMATICAL ANALYSIS
Differential calculus

The present book is the first part of the cours of Mathematical Analysis given by the author for many years at the Technical University of Civil Engineering of Bucharest. It contains: Sequences and Series of Numbers, Sequences and Series of Functions, Power Series, Taylor's Series, Metric Spaces, Normed and Hilbert Spaces, Functions of Several Variables, Limits and Continuity, Partial Derivatives, Differentiable Functions, Taylor's Formula, Local Extremum of a Function, Implicit Functions, Local Conditional Extremum, Dependent Functions.

This list itself demonstrates that the book provides the engineering disciplines with the necessary information of differential calculus of functions with one and several variables.

We tried to offer the fundamental material concisely and without distracting details. We focused on the presentation of basic ideas of differential calculus in order to make it detailed and as comprehensible as possible. The numerous examples also serve this aim.

Besides students in tehnical faculties and those starting a mathematics course, the book may be useful to engineers and scientists who wish to refresh their knowledge about some aspects of mathematics.

Lucrarea a fost realizată în cadrul Contractului de Grant nr. 39643 / 11.08.1998, CNFIS, cod 54, acordat de către Banca Mondială şi Guvernul României.

Prof. univ. dr. GAVRIIL PĂLTINEANU

ANALIZĂ MATEMATICĂ
Calcul diferențial

Seria „MATEMATICĂ“

Editura AGIR
Bucureşti, 2002

ASOCIAȚIA GENERALĂ A INGINERILOR DIN ROMÂNIA

Editură acreditată de C.N.C.S.I.S.

Adresa: **Editura AGIR**
Calea Victoriei, nr. 118, sector 1, 70179 București
Telefon: 401-212 81 04; 401-212 81 06 (redacție)
401-211 83 50 (difuzare)
Fax: 401-312 55 31; E-mail: office@agir.ro

Referent: prof. univ. dr. Gheorghe Bucur,
Facultatea de Matematică,
Universitatea București

Redactor: ing. **Adina NEGOIȚĂ**
Coperta: **Camelia BOGOI**

Bun de tipar: 15.08.2002; Coli de tipar: 11,75
ISBN 973-8130-90-5

Imprimat în România

Prefață

Lucrarea se adresează studenților din anul întâi din universitățile tehnice şi are la bază experiența de peste 20 de ani a autorului în predarea cursului de ***Analiză Matematică*** *la Facultatea de Construcții Civile şi Industriale din Universitatea Tehnică de Construcții Bucureşti. Materialul prezentat corespunde programei analitice din semestrul întâi şi este împărțit în patru capitole:* ***Şiruri şi serii de numere reale, Şiruri şi serii de funcții reale, Spații metrice. Spații normate şi Spații Hilbert, Calculul diferențial al funcțiilor de mai multe variabile****.*

În vasta ofertă de cursuri de Analiză Matematică de pe piața cărții din țara noastră, diferența este dată de măsura în care se păstrează un echilibru rezonabil între rigoare şi accesibilitate. Acesta a fost criteriul de bază în scrierea acestui curs şi sperăm că, măcar parțial, am reuşit acest lucru.

Bucureşti,
februarie 2002

G. Păltineanu

Cuprins

1. Şiruri şi serii de numere reale

1.1. Numere reale

În cele ce urmează vom nota cu $\mathbb{N}$ mulțimea numerelor naturale, adică mulțimea

$$\{0,1,2,\ldots,n,\ldots\} \text{ şi cu } \mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

Pe mulțimea numerelor naturale sunt definite două operații: adunarea (notată cu +) şi înmulțirea (notată cu ·).

Deoarece elementele din $\mathbb{N}^*$ nu sunt simetrizabile nici față de adunare, nici față de înmulțire, operațiile de scădere şi împărțire nu sunt posibile în N. (N nu are structură de grup nici față de adunare, nici față de înmulțire).

Pentru a face posibilă operația de scădere, la mulțimea numerelor naturale se adaugă mulțimea numerelor negative şi se obține astfel mulțimea numerelor întregi

$$\mathbb{Z} = \{\ldots,-n,\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots,n,\ldots\}$$

$(\mathbb{Z},+,\cdot)$ este inel comutativ. Următoarea extensie a numerelor este mulțimea numerelor raționale $\mathbb{Q}$, adică mulțimea numerelor de forma p/q, unde $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$, p şi q prime între ele. În $\mathbb{Q}$ sunt definite cele patru operații aritmetice: adunarea, scăderea, înmulțirea şi împărțirea (cu excepția împărțirii la zero). Din punct de vedere algebric $(\mathbb{Q},+,\cdot)$ este corp comutativ.

Încă din antichitate s-a observat că mulțimea numerelor raționale nu este suficient de bogată pentru a servi la exprimarea măsurii oricărei mărimi din natură. Construcții geometrice foarte simple se conduc la mărimi a căror măsură nu se poate exprima cu ajutorul numerelor raționale. Cel mai simplu exemplu este diagonala unui pătrat de latură 1. Într-adevăr, conform teoremei lui Pitagora, pătratul lungimii acestei diagonale este 2 şi este binecunoscut faptul că nu există nici un număr rațional al cărui pătrat să fie egal cu 2. Este deci necesar să adăugăm la mulțimea numerelor raționale şi numere de altă natură, pe care le numim numere iraționale şi obținem mulțimea numerelor reale $\mathbb{R}$.

Dacă primele extensii ale mulțimii numerelor naturale N şi anume $\mathbb{Z}$ şi $\mathbb{Q}$, au fost determinate de necesități algebrice, extensia de la $\mathbb{Q}$ la $\mathbb{R}$ este determinată de necesități topologice (de convergență). Mulțimea numerelor raționale suferă de o anumită "incompletitudine", deoarece, în această mulțime există şiruri monotone şi

mărginite care nu au limită (în $\mathbb{Q}$). Vezi de exemplu şirul $a_0 = 1$; $a_1 = 1,4$; $a_2 = 1,41$; $a_3 = 1,414$; … a cărui limită este $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Prin crearea mulţimii numerelor reale se înlătură acest "defect".

În $\mathbb{R}$, orice şir monoton şi mărginit are o limită. Nu ne propunem să prezentăm aici construcţia numerelor reale. O să spunem numai că se poate construi o mulţime $\mathbb{R}$ care conţine corpul numerelor raţionale $\mathbb{Q}$, pe care sunt definite două operaţii, adunarea (notată cu +) şi înmulţirea (notată cu $\cdot$) şi o relaţie de ordine (notată $\le$) astfel încât $(\mathbb{R}, +, \cdot, \le)$ este corp comutativ total ordonat, care satisface în plus următoarele proprietăţi:

(P.A.) (**Axioma lui Arhimede**)

Pentru orice $x \in \mathbb{R}$ şi orice $y \in \mathbb{R}$, $y > 0$ există $n \in \mathrm{N}$ astfel încât $ny \ge x$.

(PC) (**Axioma lui Cantor**)

Dacă $\{a_n\}$ şi $\{b_n\}$ sunt două şiruri de numere raţionale care au următoarele proprietăţi:

1) $a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n \ldots \le b_n \le \ldots \le b_2 \le b_1$

2) $\lim\limits_{n \to \infty} (b_n - a_n) = 0$ *)

atunci există $c \in \mathbb{R}$ (unic) astfel încât $a_n \le c \le b_n$, $\forall\ n \in \mathrm{N}$.

Prin urmare, din punct de vedere algebric, $\mathbb{R}$ este grup abelian faţă de adunare, având elementul neutru 0, iar $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ este grup abelian faţă de înmulţire, având elementul neutru 1. În plus are loc proprietatea de distributivitate:

$$x(y+z) = xy + xz, \quad \forall\ x, y, z \in \mathbb{R}.$$

Relaţia de ordin "$\le$" este **totală**, adică pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$ avem sau $x \le y$ sau $y \le x$ şi **compatibilă** cu structura algebrică:

$x' \le y'$ şi $x'' \le y''$ atunci $x' + x'' \le y' + y''$

$x \le y$ şi $\alpha \ge 0$ atunci $\alpha x \le \alpha y$

Din faptul că $\mathbb{R}$ este corp comutativ total ordonat rezultă toate regulile de calcul cu numere reale.

Observaţia 1.1.1. Axioma lui Arhimede este echivalentă cu următoarea proprietate:

$\forall\ x \in \mathbb{R}$, $\exists\ [x] \in \mathbb{Z}$ astfel încât $[x] \le x < [x] + 1$

($[x]$ se numeşte partea întreagă a lui x).

Într-adevăr, dacă $x \in \mathbb{Z}$, atunci $[x] = x$. Dacă $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ şi $x > 0$, atunci considerând în axioma lui Arhimede $y = 1$, rezultă că există $n \in \mathrm{N}$ astfel încât $x < n$. Fie n_x cel mai mic număr natural mai mare ca x şi fie $[x] = n_x - 1$. Se verifică imediat că:

$$[x] \le x < [x] + 1.$$

---

*) $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $b_n - a_n < \varepsilon$, $\forall\ n \ge n_\varepsilon$.

Dacă $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, $x < 0$, atunci $[x] = -[-x] - 1$.

Reciproc, fie $x \in \mathbb{R}_+$ şi $y > 0$. Dacă notăm cu $n = \left[\frac{x}{y}\right] + 1$, atunci $ny > \frac{x}{y} y = x$.

Propoziția 1.1.1. *Pentru orice* $x, y \in \mathbb{R}$ *în situația* $x < y$ *există* $r \in \mathbb{Q}$ *astfel încât*

$$x < r < y.$$

Demonstrație

Cazul 1: $x = 0 < y$. Deoarece $\frac{1}{n} \to 0$, există $n_0 \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\frac{1}{n_0} < y$ şi alegem $r = \frac{1}{n_0}$.

Cazul 2: $0 < x < y$. Fie $a = \frac{1}{2}(y - x) > 0$ şi fie $r_1 \in \mathbb{Q}$ cu proprietatea $0 < r_1 < a$.

Dacă notăm cu $r = r_1\left(\left[\frac{x}{r_1}\right] + 1\right)$, atunci $r \in \mathbb{Q}$ şi avem

$$r \le r_1\left(\frac{x}{r_1} + 1\right) = x + r_1 < x + \frac{1}{2}(y - x) = \frac{1}{2}(x + y) < y.$$

Pe de altă parte $r > r_1 \cdot \frac{x}{r_1} = x$. Aşadar, $r \in \mathbb{Q}$ şi $x < r < y$.

Cazul 3: $x < 0 < y$. Alegem $r = 0$.

Cazul 4: $x < y < 0$. Atunci $\exists\ \bar{r} \in \mathbb{Q}$ astfel încât $-x > \bar{r} > -y$. Alegem $r = -\bar{r}$.

Definiția 1.1.1. *O mulțime A se numeşte numărabilă dacă există o aplicație bijectivă* $f : \mathbb{N} \to A$. *Dacă notăm cu* $a_n = f(n)$, $\forall\ n \in \mathrm{N}$, *rezultă că o mulțime este numărabilă dacă elementele sale pot fi puse sub forma unui şir*

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$$

Se observă uşor că o reuniune finită de mulțimi numărabile este de asemenea o mulțime numărabilă.

Propoziția 1.1.2. *Mulțimea numerelor raționale este numărabilă.*

Demonstrație

Elementele mulțimii $\mathbb{Q}_+$ pot fi puse sub forma următorului tablou:

$$\begin{array}{ccccc}
\frac{1}{1} & \frac{2}{1} & \frac{3}{1} & \frac{4}{1} & \cdots \\
\frac{1}{2} & \frac{2}{2} & \frac{3}{2} & \frac{4}{2} & \cdots \\
\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{3}{3} & \frac{4}{3} & \cdots \\
\frac{1}{4} & \frac{2}{4} & \frac{3}{4} & \frac{4}{4} & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}$$

Urmând săgeţile, se observă că elementele mulţimii $\mathbb{Q}_+$ se pot pune sub forma unui şir

$$\mathbb{Q}_+=\left\{\frac{1}{1},\frac{2}{1},\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{2},\frac{3}{1},\frac{4}{1},............\right\},$$

de unde rezultă că $\mathbb{Q}_+$ este numărabilă. În mod analog $\mathbb{Q}_-$ este numărabilă. Cum $\mathbb{Q}=\mathbb{Q}_+\cup\mathbb{Q}_-\cup\{0\}$ rezultă că mulţimea numerelor raţionale este numărabilă.

Propoziţia 1.1.3. *Mulţimea* $[0,1]=\{x\in\mathbb{R} \,:\, 0\le x\le 1\}$ *nu este numărabilă.*

Demonstraţie

Presupunem prin absurd că mulţimea [0, 1] este numărabilă, deci că $I=[0,1]=\{x_1,x_2,\dots,x_n,......\}$.

Împărţim intervalul I în trei intervale închise egale. Există cel puţin un subinterval (dintre acestea) care nu-l conţine pe x_1. Notăm cu I_1 acest interval. Împărţim acum intervalul I_1 în trei părţi egale. Există cel puţin un interval I_2 care nu-l conţine pe x_2. Procedând în continuare în acest mod obţinem un şir de intervale închise

$$I_1\supset I_2\supset \dots\supset I_n\supset \dots \text{ cu proprietatea că } \quad x_n\notin I_n .$$

Pe de altă parte observăm că lungimea intervalului I_n este $\dfrac{1}{3^n}$.

Dacă notăm cu a_n, respectiv b_n, extremităţile intervalului I_n, obţinem două şiruri de numere raţionale $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ care îndeplinesc condiţiile din axioma lui Cantor. Rezultă că există $y\in\mathbb{R}$ astfel încât $y\in\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n\subset I$.

Pe de altă parte este evident că $y \neq x_n$ pentru orice n, deci $y \notin I$. Am ajuns astfel la o contradicție.

Corolarul 1. *Pentru orice* $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ *mulțimea* $[a,b] = \{x \in \mathbb{R}\,;\ a \le x \le b\}$ *nu este numărabilă.*

Într-adevăr, mulțimile $[a,b]$ şi $[0,1]$ pot fi puse în corespondență bijectivă prin funcția $f : [0,1] \to [a,b]$ definită astfel:

$$f(x) = a + (b-a)x$$

Corolarul 2. *Pentru orice* $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ *există cel puțin un număr irațional z astfel încât a < z < b.*

Demonstrație

Mulțimea numerelor raționale care aparține intervalului (a,b) este numărabilă, în timp ce mulțimea (a,b) este nenumărabilă. Dacă (a,b) ar fi numărabilă atunci $[a,b] = (a,b) \cup \{a,b\}$ ar fi numărabilă, ceea ce este absurd. Rezultă că există $z \in (a,b) \setminus \mathbb{Q}$.

Din Propoziția 1.1.1 şi 1.1.3 rezultă că între două numere reale se află o infinitate de numere raționale şi o infinitate de numere iraționale.

Propoziția 1.1.4. *Dacă* $\{x_n\}, \{y_n\}$ *sunt două şiruri de numere reale cu proprietățile*:

1) $x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n \le \ldots \le y_n \le \ldots \le y_2 \le y_1$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} (y_n - x_n) = 0$,

atunci există $z \in \Upsilon$ (*unic*) *astfel încât* $x_n \le z \le y_n$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$.

Demonstrație

Din Propoziția 1.1 rezultă că pentru orice $n \in \mathrm{N}$ există $a_n \in \mathbb{Q}$ şi $b_n \in \mathbb{Q}$ astfel încât

$$x_n - \frac{1}{2^n} < a_n < x_n \le y_n < b_n < y_n + \frac{1}{2^n} . \qquad (1.1)$$

Observăm că şirul $\{a_n\}$ poate fi ales crescător, iar şirul $\{b_n\}$ poate fi ales descrescător. Într-adevăr, fie $a_1, \overline{a}_2 \in \mathbb{Q}$ astfel încât

$$x_1 - \frac{1}{2} < a_1 < x_1 \quad \text{şi} \quad x_2 - \frac{1}{2^2} < \overline{a}_2 < x_2 .$$

Dacă notăm cu $a_2 = \max\left(a_1, \overline{a}_2\right)$ şi ţinem seama că $x_1 \le x_2$, rezultă $x_2 - \frac{1}{2^2} < a_2 < x_2$. Evident $a_2 \ge a_1$. În continuare se poate arăta prin inducţie completă că şirul $\{a_n\}$ este crescător. Analog se poate arăta că $\{b_n\}$ poate fi ales descrescător.

Deoarece $0 < b_n - a_n < \left(y_n - x_n\right) + \frac{1}{2^{n-1}}$, rezultă că $\lim\limits_{n \to \infty} \left(b_n - a_n\right) = 0$. Din axioma Cantor rezultă că există $z \in \Upsilon$, unic, astfel încât $a_n \le z \le b_n$, $\forall$ n. Cum $\{x_n\}$ este crescător avem:

$$x_n - \frac{1}{2^{n+k}} \le x_{n+k} - \frac{1}{2^{n+k}} \le a_{n+k} \le z, \ \forall \ k \in \square \tag{1.2}$$

În continuare avem $x_n - z \le \frac{1}{2^{n+k}}$, $\forall$ $k \in \square$, de unde rezultă $x_n - z \le 0$ şi deci $x_n \le z$, $\forall$ n. În mod asemănător se arată că $z \le y_n$, $\forall$ n.

Observaţia 1.1.2. O mulţime de numere reale A se numeşte majorată (minorată) dacă există $b \in \Upsilon$ astfel încât $x \le b\left(x \ge b\right)$, $\forall$ $x \in A$.

Numărul b se numeşte majorant (minorant). Este evident că dacă A admite un majorant (minorant) atunci admite o infinitate de majoranţi (minoranţi). O mulţime se numeşte mărginită dacă este majorată şi minorată.

Se numeşte marginea superioară (inferioară) a mulţimii A cel mai mic majorant (cel mai mare minorant) al mulţimii A.

Marginea superioară a mulţimii A se notează cu sup$A$, iar marginea inferioară cu inf$A$.

Teorema 1.1.1. *Orice mulţime de numere reale majorată* (*minorată*) *are margine superioară* (*inferioară*).

Demonstraţie

Vom demonstra existenţa marginii superioare. Dacă mulţimea A e finită, adică $A = \left\{a_1, a_2, \ldots, a_p\right\}$, atunci evident $\sup A = \max\left\{a_1, a_2, \ldots, a_p\right\}$.

Fie A majorată şi infinită şi fie a, $b \in \square$ astfel încât b este majorant pentru A, iar a nu este majorant pentru A. Fie c mijlocul intervalului $[a, b]$.

Dacă c este majorant pentru A, notăm cu $\left[a_1, b_1\right]$ intervalul $\left[a, c\right]$, iar dacă c nu este majorant pentru A notăm cu $\left[a_1, b_1\right]$ intervalul $\left[c, b\right]$. Fie c_2 mijlocul intervalului $\left[a_1, b_1\right]$. Procedând ca mai înainte, notăm cu $\left[a_2, b_2\right]$ intervalul

$[a_1, c_2]$ dacă c_2 este majorant pentru A, respectiv intervalul $[c_2, b_1]$, dacă c_2 nu este majorant pentru A şi aşa mai departe.

Se obţin astfel două şiruri de numere raţionale $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ cu următoarele proprietăţi:

1) $a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n \le \ldots \le b_n \le \ldots \le b_2 \le b_1$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} (b_n - a_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{b-a}{2^n} = 0$

3) pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, b_n este majorant, iar a_n nu este majorant al mulţimii A.

Din axioma lui Cantor rezultă că există $M \in \mathbb{R}$ astfel, $a_n \le M \le b_n$, $\forall\ n \in$ N. Observăm că $M = \sup A$. Într-adevăr, M este majorant pentru A, pentru că în caz contrar, există $x \in A$ astfel încât $M < x$. Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0$, există $n_0 \in \mathbb{N}^*$ cu proprietatea $b_{n_0} - a_{n_0} < x - M$.

În continuare avem $b_{n_0} < x + \left(a_{n_0} - M\right) \le x$, ceea ce contrazice faptul că b_{n_0} este majorant pentru A. Arătăm acum că M este cel mai mic majorant al mulţimii A. Să presupunem prin absurd că există $M' < M$, M' majorant pentru A. Fie $n_1 \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $b_{n_1} - a_{n_1} < M - M'$. Mai departe avem:

$$a_{n_1} > M' + \left(b_{n_1} - M\right) \ge M'$$

de unde rezultă că a_{n_1} este majorant pentru A. Am ajuns astfel la o contradicţie. În concluzie, M este cel mai mic majorant al mulţimii A, deci marginea superioară a mulţimii A. Demonstraţia existenţei marginii inferioare este analogă.

Observaţia 1.1.3. $M \in \mathbb{R}$ este marginea superioară a mulţimii A dacă şi numai dacă

1) $x \le M$, $\forall\ x \in A$

2) $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ x_\varepsilon \in A$ astfel încât $M - \varepsilon < x_\varepsilon$.

Într-adevăr, dacă $M = \sup A$, atunci M este majorant pentru A, de unde rezultă 1). Deoarece M este cel mai mic majorant al mulţimii A, rezultă că $\forall\ \varepsilon > 0$, $M - \varepsilon$ nu este majorant pentru A, deci $\exists\ x_\varepsilon > M - \varepsilon$. Fie acum $M \in \mathbb{R}$ cu proprietăţile 1) şi 2). Din 1) rezultă că M este majorant pentru A. Fie $M' < M$ şi fie $\varepsilon = M - M' > 0$. Din 2) rezultă că există $x_\varepsilon \in A$ astfel încât $x_\varepsilon > M - \varepsilon = M'$. Prin urmare M' nu este majorant pentru A şi deci $M = \sup A$.

1.2. Şiruri de numere reale (complemente)

Reamintim că un şir de numere reale $\{a_n\}$ se numeşte convergent (are limită finită) dacă există $l \in \Upsilon$ astfel încât $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists$ un rang $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall\ n \geq n_\varepsilon$ avem $|a_n - l| < \varepsilon$.

Definiţia 1.2.1. *Fie* $\{a_n\}$ *un şir de numere reale şi* $k_1 < k_2 < \ldots < k_n < \ldots$ *un şir strict crescător de numere naturale. Şirul* $\{a_{k_n}\}$ *se numeşte subşir al şirului* $\{a_n\}$. *În particular şirul iniţial* $\{a_n\}$ *poate fi privit ca un subşir al său (cazul* $k_n = n$ *).*

Dacă şirul $\{a_n\}$ este convergent şi are limita *l*, atunci orice subşir al său este convergent şi are limita *l*. (Afirmaţia rezultă imediat din Observaţia $n \leq k_n$).

Lema 1.2.1. (Cesàro). *Orice şir mărginit de numere reale conţine un subşir convergent.*

Demonstraţie

Fie $\{x_n\}$ un şir de numere reale mărginit. Atunci există $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât $a < x_n < b$, $\forall\ n \in$ N. Fie *c* mijlocul intervalului [*a*, *b*]. Cel puţin unul din intervalele [*a*, *c*], [*c*, *b*] conţine o infinitate de termeni ai şirului $\{x_n\}$.

Presupunem că [*a*, *c*] are această proprietate. Atunci notăm $a_1 = a$ şi $b_1 = c$. Fie c_1 mijlocul intervalului $[a_1, b_1]$. Cel puţin unul din intervalele $[a_1, c_1]$, $[c_1, b_1]$ conţine o infinitate de termeni ai şirului $\{x_n\}$. Să presupunem că $[c_1, b_1]$ are această proprietate. Atunci notăm $a_2 = c_1, b_2 = b_1$ şi aşa mai departe. Se obţin astfel două şiruri de numere raţionale $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ cu proprietăţile:

1) $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n \leq \ldots \leq b_n \leq \ldots \leq b_2 \leq b_1$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{b-a}{2^n} = 0$.

3) $\forall\ n \in$ N, intervalul $[a_n, b_n]$ conţine o infinitate de termeni ai şirului $\{x_n\}$.

Din axioma lui Cantor rezultă că există $x \in \Upsilon$ astfel încât $a_n \leq x \leq b_n$, $\forall\ n \in$ N.

Alegem $k_1 \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $x_{k_1} \in [a_1, b_1]$. Deoarece $[a_2, b_2]$ conţine o infinitate de termeni ai şirului $\{x_n\}$, există $k_2 \in \mathbb{N}^*$, $k_2 > k_1$ astfel încât $x_{k_2} \in [a_2, b_2]$.

Procedând în continuare în mod asemănător rezultă că există un şir strict crescător de numere naturale

$$k_1 < k_2 < \ldots < k_n < \ldots \text{ astfel încât } x_{k_n} \in \left[a_n, b_n\right] \ \ \forall\ n \in \mathrm{N}.$$

Deoarece $\left|x_{k_n} - x\right| \le b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n}$ rezultă că $\left\{x_{k_n}\right\}$ converge la *x*.

Definiția 1.2.2. *Un şir de numere reale* $\{x_n\}$ *se numeşte fundamental* (*Cauchy*) *dacă* $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ *astfel încât* $\forall\ m, n \ge n_\varepsilon$ *avem* $\left|x_m - x_n\right| < \varepsilon$.

Notând cu $p = m - n$ (dacă $m > n$), respectiv $p = n - m$ (dacă $m < n$) obținem următoarea definiție echivalentă: $\{x_n\}$ este fundamental dacă $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\forall\ n \ge n_\varepsilon$ şi $\forall\ p \in \mathbb{N}^*$ avem $\left|x_{n+p} - x_n\right| < \varepsilon$.

Lema 1.2.2. *Orice şir fundamental este mărginit.*

Demonstrație

Fie $\{x_n\}$ un şir fundamental. Pentru $\varepsilon = 1$ există $n_1 \in \mathbb{N}^*$ astfel încât

$$\left|x_{n+p} - x_n\right| < 1,\ \forall\ n \ge n_1,\ \forall\ p \in \mathbb{N}^*.$$

Pentru $n = n_1$ rezultă

$$\left|x_{n_1+p} - x_{n_1}\right| < 1,\ \forall\ p \in \mathbb{N}^*, \text{ deci}$$

$$x_{n_1} - 1 < x_{n_1+p} < x_{n_1} + 1,\ \forall\ p \in \mathbb{N}^*.$$

Dacă notăm cu

$$a = \min\left\{x_1, \ldots, x_{n_1-1},\ x_{n_1} - 1\right\} \text{ şi cu } b = \max\left\{x_1, \ldots, x_{n_1-1},\ x_{n_1} + 1\right\}$$

atunci $a \le x_n \le b$, $\forall\ n \in \mathrm{N}$.

Teorema 1.2.1. (Criteriul general de convergență al lui Cauchy)

Condiția necesară şi suficientă ca un şir de numere reale să fie convergent este să fie fundamental.

Demonstrație

Necesitatea. Fie $\{x_n\}$ un şir convergent, având limita $l \in \mathbb{R}$. Pentru $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\left|x_n - l\right| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, $\forall\ n \ge n_\varepsilon$. Dacă $m \ge n_\varepsilon$, atunci $\left|x_m - l\right| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ şi mai departe $\left|x_m - x_n\right| = \left|\left(x_m - l\right) + \left(l - x_n\right)\right| \le \left|x_m - l\right| + \left|x_n - l\right| < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Aşadar, $\forall\ n, m \ge n_\varepsilon$ avem $\left|x_m - x_n\right| < \varepsilon$, deci $\{x_n\}$ este fundamental.

Suficiența. Fie $\{x_n\}$ un şir fundamental. Pentru $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ n'_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\forall\ n, m \ge n'_\varepsilon$ avem:

$$\left|x_n - x_m\right| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{1.3}$$

Pe de altă parte, din Lema 1.2.2. rezultă că şirul $\{x_n\}$ este mărginit, iar din Lema 1.2.1, că admite un subşir x_{k_n} convergent. Fie $l = \lim\limits_{n\to\infty} x_{k_n}$ şi fie $n''_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ astfel încât:

$$\left|x_{k_n} - l\right| < \frac{\varepsilon}{2},\ \forall\ \ n \geq n''_\varepsilon . \tag{1.4}$$

Dacă $n_\varepsilon = \max\left(n'_\varepsilon, n''_\varepsilon\right)$ şi $n \geq n_\varepsilon$, atunci din (1.3) şi (1.4) rezultă:

$$\left|x_n - l\right| = \left|x_n - x_{k_n} + x_{k_n} - l\right| \leq \left|x_n - x_{k_n}\right| + \left|x_{k_n} - l\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon .$$

Aşadar, $\left|x_n - l\right| < \varepsilon$ pentru orice $n \geq n_\varepsilon$, deci $\{x_n\}$ este convergent şi are limita l.

Criteriul general de convergenţă al lui Cauchy stabileşte că pentru şirurile de numere reale noţiunile de şir convergent şi şir fundamental sunt echivalente. Prin urmare, este suficient să verificăm pentru un şir că este fundamental (deci o condiţie mai slabă) ca să tragem concluzia că este convergent.

Exemplu: Să se studieze convergenţa şirului cu termenul general $a_n = \frac{\cos x}{2} + \frac{\cos 2x}{2^2} + \ldots + \frac{\cos nx}{2^n}$ ($x \in \mathbb{R}$ oarecare fixat). Verificăm că şirul $\{a_n\}$ este fundamental. Într-adevăr avem:

$$\left|a_{n+p} - a_n\right| = \left|\frac{\cos(n+1)x}{2^{n+1}} + \ldots + \frac{\cos(n+p)x}{2^{n+p}}\right| \leq \frac{1}{2^{n+1}} + \ldots + \frac{1}{2^{n+p}} =$$

$$= \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^p}}{1 - \frac{1}{2}} < \frac{1}{2^n},\ \ p \in \mathbb{N}^* .$$

Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$, rezultă că $\forall$ $\varepsilon > 0$, $n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\left|a_{n+p} - a_n\right| < \frac{1}{2^n} < \varepsilon$, $\forall$ $n \geq n_\varepsilon$ şi $\forall$ $p \in \mathbb{N}^*$. Aşadar, şirul $\{a_n\}$ este fundamental şi deci convergent.

Datorită importanţei deosebite pentru analiza matematică a criteriului general de convergenţă al lui Cauchy, prezentăm în continuare o altă demonstraţie a sa, mai precis a implicaţiei: orice şir fundamental este convergent.

Fie $\{x_n\}$ un şir fundamental. Pentru Fie $\varepsilon = \frac{1}{2^k}$ există $n_k \in \mathbb{N}^*$ astfel încât

$$\left|x_n - x_m\right| < \frac{1}{2^k}, \ \forall \ \ n,m \geq n_k . \tag{1.5}$$

În particular avem:

$$\left|x_n - x_{n_k}\right| < \frac{1}{2^k}, \quad n \geq n_k . \tag{1.6}$$

Pentru $\varepsilon = \frac{1}{2^{k+1}}$ există $\overline{n}_{k+1} \in \mathbb{N}^*$ astfel încât

$$\left|x_n - x_m\right| < \frac{1}{2^{k+1}}, \ \forall \ \ n,m \geq \overline{n}_{k+1} . \tag{1.7}$$

Dacă alegem $n_{k+1} > \max\left(n_k, \overline{n}_{k+1}\right)$, atunci

$$n_{k+1} > n_k \ \text{ şi } \ \left|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\right| < \frac{1}{2^k} .$$

Prin urmare dacă $\{x_n\}$ este fundamental, există un subşir al său $\left\{x_{n_k}\right\}$ cu proprietatea:

$$x_{n_k} - \frac{1}{2^k} < x_{n_{k+1}} < x_{n_k} + \frac{1}{2^k}, \ \forall \ \ k \in \mathrm{N}. \tag{1.8}$$

Dacă notăm cu $a_k = x_{n_k} - \frac{1}{2^{k-1}}$ şi $b_k = x_{n_k} + \frac{1}{2^{k-1}}$ atunci şirurile $\{a_k\}$ şi $\{b_k\}$ satisfac condițiile Propoziției 1.1.4. Într-adevăr, ținând seama de (1.8) avem:

$$a_{k+1} - a_k = x_{n_{k+1}} - x_{n_k} - \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k-1}} > -\frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k-1}} = 0$$

$$b_{k+1} - b_k = x_{n_{k+1}} - x_{n_k} + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k-1}} < \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^{k-1}} = 0$$

$$b_k - a_k = \frac{1}{2^{k-2}} \to 0 \ \text{ pentru } \ k \to \infty.$$

Prin urmare, există $x \in \Upsilon$ astfel încât

$$x_{n_k} - \frac{1}{2^{k-1}} = a_k \leq x \leq b_k = x_{n_k} + \frac{1}{2^{k-1}}, \ \forall \ \ k \in \mathrm{N}. \tag{1.9}$$

Din (1.8) şi (1.9) rezultă

$$\left|x_{n_{k+1}} - x\right| < \frac{3}{2^k}, \ \forall \ \ k \in \mathrm{N}. \tag{1.10}$$

Aşadar, subşirul $\left\{x_{n_k}\right\}$ este convergent şi are limita x. Fie $\varepsilon > 0$ şi $n'_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ astfel încât

$$\left|x_{n_k} - x\right| < \frac{\varepsilon}{2}, \ \forall \ \ k \geq n'_\varepsilon . \tag{1.11}$$

Fie $n''_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ astfel încât

$$\left|x_m - x_n\right| < \frac{\varepsilon}{2}, \ \forall \ m, n \geq n''_\varepsilon \tag{1.12}$$

Dacă notăm cu $n_\varepsilon = \max\left(n'_\varepsilon, n''_\varepsilon\right)$, atunci din (11) şi (12), pentru $n \geq n_\varepsilon$ avem:

$$\left|x_n - x\right| \leq \left|x_n - x_{n_k}\right| + \left|x_{n_k} - x\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

de unde rezultă că $\{x_n\}$ converge la x.

Teorema 1.2.2. *Orice şir monoton şi mărginit este convergent.*

Demonstraţie

Fie $\{x_n\}$ un şir monoton crescător şi mărginit. Deoarece mulţimea $\{x_n;\, n \in \mathbb{N}\}$ este majorată, din Teorema 1.1.1. rezultă că există $M = \sup\{x_n;\, n \in \mathbb{N}\}$. Din Observaţia 1.1.2. rezultă că $x_n \leq M$, $\forall \ n \in \mathrm{N}$ şi $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $M - \varepsilon < x_{n_\varepsilon}$. Deoarece şirul $\{x_n\}$ este monoton crescător, rezultă $x_n \geq x_{n_\varepsilon}$, $\forall \ n \geq n_\varepsilon$.

Prin urmare, pentru orice $n \geq n_\varepsilon$ avem:

$$M - \varepsilon < x_n \leq M \leq M + \varepsilon, \text{ adică } \left|x_n - M\right| < \varepsilon, \tag{1.13}$$

de unde rezultă că $\{x_n\}$ este convergent şi are limita M.

Cel mai cunoscut exemplu de aplicaţie a Teoremei 1.2.2. este şirul $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Se ştie din liceu că acest şir este monoton crescător şi mărginit ($2 \leq a_n < 3$, $\forall \ n \in \mathrm{N}$). Limita sa se notează cu e. Deci $e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Despre numărul e se poate arăta că este iraţional şi valoarea sa este aproximativ egală cu $e \approx 2{,}71828$.

În continuare prezentăm o altă aplicaţie interesantă a Teoremei 1.1.1.

Exemplu. Fie şirul cu termenul general

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n.$$

Vom arăta că acest şir este monoton descrescător şi mărginit. Pentru aceasta folosim următoarea inegalitate cunoscută din liceu

$$\ln(1 + x) < x, \ \forall \ x > -1, \ x \neq 0. \tag{1.14}$$

Într-adevăr,

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+1} + \ln\frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1} + \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) < \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1} = 0, \ \forall\, n \in \mathbb{N}^*.$$

Aşadar $a_{n+1} < a_n$, $\forall \ n \geq 1$.

Pe de altă parte, deoarece $\frac{1}{n} > \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln\frac{n+1}{n}$, vom avea:

$$a_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n > \ln\frac{2}{1}+\ln\frac{3}{2}+\ldots+\ln\frac{n+1}{n}-\ln n =$$

$$= \ln\frac{\cancel{2}}{1}\cdot\frac{\cancel{3}}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{4}}{\cancel{3}}\cdots\frac{n+1}{\cancel{n}}-\ln n = \ln(n+1)-\ln n > 0 \Rightarrow a_n > 0,\ \forall\ n \geq 1.$$

Rezultă că şirul $\{a_n\}$ este convergent. Limita sa se notează cu C şi se numeşte constanta lui Euler şi este aproximativ egală cu 0,5772156.

Dacă notăm cu $\varepsilon_n = \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n\right)-C$, atunci $\{\varepsilon_n\}$ este un şir de numere pozitive, descrescător, cu $\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon_n = 0$. Rezultă următoarea identitate:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n} = \ln n + C + \varepsilon_n, \tag{1.15}$$

care se dovedeşte utilă în aplicaţii şi va fi folosită mai departe.

1.3. Dreapta încheiată. Limitele extreme ale unui şir

Reamintim că prin dreapta încheiată se înţelege mulţimea $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty;\infty\}$. Pe mulţimea $\overline{\mathbb{R}}$ se consideră relaţia de ordine obţinută prin prelungirea relaţiei de ordine de pe $\mathbb{R}$ astfel:

$$-\infty < \infty,\ -\infty < x \text{ şi } x < \infty,\ \forall\ x \in \mathbb{R}.$$

În felul acesta $\overline{\mathbb{R}}$ este o mulţime ordonată.

Dacă $A \subset \mathbb{R}$ este o mulţime nevidă care nu este majorată, definim $\sup A = +\infty$. În mod analog, dacă A nu este minorată definim $\inf A = -\infty$. Cu această convenţie, orice mulţime de numere reale este mărginită în $\overline{\mathbb{R}}$. Operaţiile algebrice de pe $\mathbb{R}$ se extind pe $\overline{\mathbb{R}}$, fără însă să fie peste tot definite şi anume:

$$\infty + x = \infty,\ \forall\ x \in \overline{\mathbb{R}},\ x \neq -\infty$$

$$-\infty + x = -\infty,\ \forall\ x \in \overline{\mathbb{R}},\ x \neq \infty$$

$$\infty x = \begin{cases} \infty & \text{dacă } x > 0 \\ -\infty & \text{dacă } x < 0 \end{cases},\ x \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Definiţia 1.3.1. *Un şir de numere reale $\{x_n\}$ are limita ∞ (respectiv $-\infty$) dacă $\forall\ \varepsilon \in \mathbb{R}$, $\exists\ n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $x_n > \varepsilon$ (respectiv $x_n < \varepsilon$), $\forall\ n \geq n_\varepsilon$.*

Se folosesc notaţiile: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ (respectiv $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$).

Propoziţia 1.3.1. *Orice şir monoton de numere reale are limită în $\overline{\mathbb{R}}$. Orice şir de numere reale conţine un subşir care are limită în $\overline{\mathbb{R}}$.*

Demonstraţie

Fie $\{x_n\}$ un şir monoton crescător de numere reale. Dacă $\{x_n\}$ este mărginit superior, atunci $\{x_n\}$ este convergent, deci are limită finită. (Teorema 1.2.2.) Dacă $\{x_n\}$ nu este mărginit superior, atunci pentru $\forall\ \varepsilon \in \Upsilon$, $\exists\ x_{n_\varepsilon} > \varepsilon$. Cum $\{x_n\}$ este crescător vom avea $x_n > \varepsilon$, $\forall\ \ n \geq n_\varepsilon$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$. Dacă $\{x_n\}$ este descrescător se procedează în mod analog.

Fie acum $\{x_n\}$ un şir de numere reale oarecare. Dacă $\{x_n\}$ este mărginit, atunci din Lema Cesàro rezultă că există un subşir $\left\{x_{n_k}\right\}$ convergent. Să presupunem că $\{x_n\}$ nu este mărginit (de exemplu nu este mărginit superior). Vom arăta în acest caz că există un subşir care are limita $+\infty$. Într-adevăr, există o infinitate de termeni ai şirului mai mari ca 1. Fie $x_{k_1} > 1$. De asemenea, există o infinitate de termeni ai şirului mai mari ca 2. Atunci putem alege $k_2 > k_1$ astfel încât $x_{k_2} > 2$. Construim astfel prin inducţie un şir strict crescător de numere naturale $\{k_n\}$ cu proprietatea $x_{k_n} > n$. Rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} x_{k_n} = \infty$.

Definiţia 1.3.2. *Fie $\{x_n\}$ un şir de numere reale şi $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Spunem că a este punct limită pentru şirul $\{x_n\}$ dacă există un subşir $\left\{x_{k_n}\right\}$ astfel încât* $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_{k_n}$.

Observaţia 1.3.1. Dacă un şir are limită, atunci acest şir are un singur punct limită care coincide cu limita sa.

Exemple

1) Şirul $x_n = (-1)^n$ are două puncte limită –1 şi 1.

2) Şirul $x_n = n^{(-1)^n}$ are două puncte limită 0 şi ∞.

3) Şirul $x_n = n$ are un singur punct limită ∞.

4) Şirul $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ are un singur punct limită 0.

Teorema 1.3.1. *Pentru orice şir de numere reale $\{x_n\}$ există un cel mai mic punct limită (finit sau nu) şi un cel mai mare punct limită (finit sau nu).*

Demonstraţie

Dacă $\{x_n\}$ nu este majorat, atunci din Propoziția 1.3.1. rezultă că există un subşir care are limita $+\infty$. Aşadar, $+\infty$ este punct limită şi evident este cel mai mare.

Să presupunem acum că şirul $\{x_n\}$ este majorat şi să notăm cu A mulțimea punctelor sale limită finite. Dacă A este vidă, atunci din Lema Cesàro rezultă cã $\{x_n\}$ nu este mărginit inferior. În această situație $-\infty$ este singurul punct limită şi deci şi cel mai mare. Să presupunem acum $A \neq \phi$. Cum $\{x_n\}$ este majorat, rezultă că şi A este majorată, deci există $\sup A \in \mathbb{R}$ (Teorema 1.1.1.). Să observăm însă că $\alpha = \sup A \in A$. Într-adevăr, din definiția marginii superioare rezultă că $\forall\ p \in \mathbb{N}^*$ există $a_p \in A$ astfel încât $\alpha - \frac{1}{p} < a_p \le \alpha$.

Pe de altă parte, pentru a_p există un subşir al şirului $\{x_n\}$ convergent la a_p. Aşadar, pentru a_1 există x_{k_1} astfel încât $\left|x_{k_1} - a_1\right| < 1$. Pentru a_2 există x_{k_2}, $k_2 > k_1$ astfel încât $\left|x_{k_2} - a_2\right| < \frac{1}{2}$.

Prin inducție construim un şir de numere naturale $k_1 < k_2 < \ldots < k_n < \ldots$ cu proprietatea $\left|x_{k_p} - a_p\right| < \frac{1}{p}$. Din inegalitatea

$$\left|x_{k_p} - \alpha\right| \le \left|x_{k_p} - a_p\right| + \left|a_p - \alpha\right| < \frac{1}{p} + \frac{1}{p} = \frac{2}{p}$$

rezultă $x_{k_p} \to \alpha$. Aşadar, $\alpha = \sup A$ este punct limită al şirului $\{x_n\}$ şi evident, este cel mai mare. Existența celui mai mic punct limită se dovedeşte în mod asemănător.

Definiția 1.3.3. *Cel mai mic punct limită al unui şir se numeşte limita inferioară a şirului şi se notează cu* $\lim\limits_{n\to\infty} \inf x_n$ *sau* $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n$. *Cel mai mare punct limită al şirului se numeşte limita superioară a şirului şi se notează cu* $\lim\limits_{n\to\infty} \sup x_n$ sau $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n$.

Observația 1.3.2. Din Teorema 1.3.1 rezultă că orice şir de numere reale are limită superioară şi limită inferioară (deşi poate să nu aibă limită). Fie $L = \lim\limits_{n\to\infty} \sup x_n$ şi $l = \lim\limits_{n\to\infty} \inf x_n$. Limita superioară L, când este finită, este caracterizată de proprietățile:

a) Pentru orice $a < L$ există o infinitate de termeni ai şirului mai mari ca a.

b) Pentru orice $b > L$ există un număr finit de termeni ai şirului mai mari ca b.

În mod analog, limita inferioară l, când este finită, este caracterizată de proprietăţile:

a) Pentru orice $a < l$ există un număr finit de termeni ai şirului mai mici ca a.

b) Pentru orice $b > l$ există o infinitate de termeni ai şirului mai mici ca b.

Într-adevăr, să justificăm afirmaţia în cazul limitei superioare L. Din a) şi b) rezultă cã $\forall \ n \in \mathbb{N}^*$ există o infinitate de termeni ai şirului în intervalul $\left(L - \frac{1}{n},\, L + \frac{1}{n}\right)$. Se poate construi prin inducţie un şir strict crescător de numere naturale $\{k_n\}$ astfel încât $x_{k_n} \in \left(L - \frac{1}{n},\, L + \frac{1}{n}\right)$. Rezultă $\left|x_{k_n} - L\right| < \frac{2}{n}$ şi deci $x_{k_n} \to L$. Aşadar, L este punct limită al şirului. Din proprietatea b) rezultă cã L este cel mai mare punct limită al şirului.

Am făcut mai înainte observaţia că orice mulţime de numere reale este mărginită în $\overline{\mathbb{R}}$. În particular, orice şir de numere reale, este mărginit în $\overline{\mathbb{R}}$. Fie $m = \inf\{x_n\,;\, n \in \mathbb{N}\}$ şi $M = \sup\{x_n\,;\, n \in \mathbb{N}\}$. Următoarele inegalităţi sunt evidente:

$$-\infty \le m \le l \le L \le M \le +\infty .$$

Exemplu. Fie şirul $x_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1+(-1)^n}{2}$. Observăm că

$$x_n = \begin{cases} -\dfrac{1}{n} & \text{dacă } n \text{ este impar} \\[2mm] \dfrac{1}{n} + 1 & \text{dacă } n \text{ este par}. \end{cases}$$

Aşadar, şirul conţine două subşiruri convergente care au limitele 0, respectiv 1. Rezultă că $l = 0$ şi $L = 1$.

Subşirul $\left\{-\frac{1}{n}\right\}$ este crescător, deci -1 este cel mai mic termen al său, iar subşirul $\left\{\frac{1}{n} + 1\right\}$ este descrescător, deci cel mai mare termen al său este 2. Rezultă $m = -1$, $M = 2$.

Aşadar, avem: $m = -1 < l = 0 < L = 1 < M = 2$.

Propoziţia 1.3.2. *Condiţia necesară şi suficientă ca un şir să aibă limită (finită sau nu) este ca* $L = \limsup a_n = \liminf a_n = l$.

Demonstraţie

Necesitatea. Dacă şirul are limită, atunci şirul are un singur punct limită, care coincide cu limita sa. Rezultă $L = l = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Suficienţa. Să presupunem că $L = l = a \in \mathbb{R}$. Din Observaţia 1.3.2. rezultă $\forall\ \varepsilon > 0$, în intervalul $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ se află o infinitate de termeni ai şirului, iar în afara acestui interval, se află un număr finit de termeni ai şirului. Rezultă $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Dacă $L = l = a = +\infty$ atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, iar dacă $L = l = a = -\infty$ atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

1.4. Serii numerice convergente şi divergente

Fie $\{u_n\}$ un şir de numere reale. Asociem acestui şir următorul şir:

$$\begin{aligned}
&s_1 = u_1\\
&s_2 = u_1 + u_2\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&s_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Definiţia 1.4.1. *Perechea* $(\{u_n\},\{s_n\})$ *se numeşte serie definită de şirul* $\{u_n\}$ *şi se notează cu*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ sau } u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots \tag{1.16}$$

Elementele şirului $\{u_n\}$ se numesc termenii seriei, iar şirul $\{s_n\}$ se numeşte şirul sumelor parţiale. Seria (1.16) se numeşte convergentă dacă şirul sumelor parţiale $\{s_n\}$ este convergent; limita $s = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$ se numeşte suma seriei şi se obişnuieşte să se scrie:

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \tag{1.17}$$

Dacă şirul sumelor parţiale $\{s_n\}$ este divergent (nu are limită sau are limită infinită) spunem că seria (1.17) este divergentă.

Exemple

1. Seria geometrică

$a + aq + aq^2 + \ldots + aq^n + \ldots$

Suma parţială $s_n = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} = a\dfrac{1-q^n}{1-q}$ pentru $q \neq 1$.

Dacă $|q| < 1$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ şi deci există $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \dfrac{a}{1-q}$. Prin urmare, dacă $|q| < 1$ seria geometrică este convergentă şi suma sa este $s = \dfrac{a}{1-q}$.

Dacă $q = 1$, atunci $s_n = n \cdot a$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \pm\infty$.

Dacă $q = -1$, atunci $s_n = \begin{cases} a & \text{dacă } n \text{ este impar} \\ 0 & \text{dacă } n \text{ este par}. \end{cases}$

Şirul $\{s_n\}$ nu are limită în acest caz.

Dacă $q > 1$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = +\infty$ şi deci $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \pm\infty$.

Dacă $q < -1$, atunci şirul $\{q^n\}$ nu are limită şi deci şirul $\{s_n\}$ nu are limită.

În concluzie, pentru $|q| \geq 1$ seria geometrică este divergentă.

2. Seria armonică

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$

Suma parţială $s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} = \ln n + C + \varepsilon_n$ unde $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$ (vezi subcap. 1.2, formula (1.15)). Rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = +\infty$, deci seria armonică este divergentă.

Propoziţia 1.4.1. *Dacă seria* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *este convergentă, atunci* $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

Demonstraţie

Fie $s = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$. Deoarece $u_n = s_n - s_{n-1}$, rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = s - s = 0$.

Afirmaţia reciprocă nu este în general adevărată. Există serii divergente cu proprietatea $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ (de exemplu seria armonică).

Din Propoziţia 1.4.1 rezultă următoarea observaţie utilă în aplicaţii:

Observația 1.4.1. Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$, atunci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ este divergentă.

Exemplu: Seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\ln\left(2+e^{3n}\right)}{\ln\left(3+e^{2n}\right)}$ este divergentă, deoarece

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln e^{3n}\left(1+2e^{-3n}\right)}{\ln e^{2n}\left(1+3e^{-2n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n+\ln\left(1+2e^{-3n}\right)}{2n+\ln\left(1+3e^{-2n}\right)} = \frac{3}{2} \neq 0 .$$

Teorema 1.4.1. (Criteriul general de convergență al lui Cauchy)

Condiția necesară și suficientă ca seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *să fie convergentă este ca pentru* $\forall\ \varepsilon > 0$ *să existe* $n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$, *astfel încât pentru* $\forall\ n \geq n_\varepsilon$ *și* $\forall\ p \in \mathbb{N}^*$ *să avem* $\left|u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+p}\right| < \varepsilon$.

Demonstrație

Seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă dacă și numai dacă șirul sumelor parțiale $\{s_n\}$ este convergent. Din Teorema 1.2.1 rezultă că $\{s_n\}$ este convergent dacă și numai dacă $\{s_n\}$ este fundamental, deci dacă $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\left|s_{n+p} - s_n\right| = \left|u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots\ u_{n+p}\right| < \varepsilon$, $\forall\ n \geq n_\varepsilon$ și $\forall\ p \in \mathbb{N}^*$.

Observația 1.4.2. Natura unei serii nu se schimbă, dacă schimbăm valorile unui număr finit de termeni ai săi (în particular, dacă îi suprimăm).

Într-adevăr, dacă $\{s_n\}$ este șirul sumelor parțiale al seriei inițiale, atunci șirul sumelor parțiale ale noii serii, este de forma $\{s_n + c\}$ (începând de la un anumit rang), unde *c* este un număr constant.

1.5. Serii cu termeni pozitivi

Seriile cu termeni pozitivi sunt seriile în care toți termenii sunt strict pozitivi ($u_n > 0$, $\forall\ n \in$ N). Locul special pe care îl ocupă aceste serii printre seriile numerice este pus în evidență de următoarea teoremă:

Teorema 1.5.1. *Condiţia necesară şi suficientă ca o serie de termeni pozitivi să fie convergentă este ca şirul sumelor parţiale să fie mărginit.*

Demonstraţie

Dacă seria este convergentă, atunci şirul sumelor parţiale este convergent şi deci mărginit.

Condiţia este şi suficientă, pentru că şirul sumelor parţiale al unei serii cu termeni pozitivi este monoton crescător şi dacă este în plus şi mărginit, rezultă că este convergent (Teorema 1.2.1.).

Teorema 1.5.2. (Criteriul I de comparaţie)

Fie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *şi* $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ *două serii cu termeni pozitivi. Presupunem că există* $k \in \mathbb{N}^*$ *astfel încât*

$$u_n \le v_n, \ \forall \ n \ge k \tag{1.18}$$

Atunci: a) Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ converge, rezultă că şi seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ converge.

b) Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ diverge, rezultă că şi seria $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ diverge.

Demonstraţie

Din Observaţia 1.4.2 rezultă că, suprimând eventual primii $k-1$ termeni din cele două serii, putem presupune că $u_n \le v_n$, $\forall \ n \in \mathbb{N}^*$. Dacă notăm cu $s_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$ şi cu $\sigma_n = v_1 + v_2 + \ldots + v_n$, atunci din (1.18) rezultă $s_n \le \sigma_n$, $\forall \ n \in \mathbb{N}^*$.

Dacă $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ este convergentă, atunci $\{\sigma_n\}$ este mărginit deci şi $\{s_n\}$ va fi mărginit. Din Teorema 1.5.1 rezultă că $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă.

b) Dacă $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este divergentă, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \infty$ şi deci $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = \infty$. Rezultă că seria $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ este divergentă.

Observaţia 1.5.1. În enunţul teoremei precedente inegalitatea (1.18) poate fi înlocuită cu inegalitatea

$$u_n \leq c \cdot v_n \,, \quad \forall \ n \geq k \,, \tag{1.18'}$$

unde c este un număr constant strict pozitiv.

Într-adevăr, natura seriilor $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ şi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (c \cdot v_n)$ este evident aceeaşi.

Teorema 1.5.3. (Criteriul de condensare al lui Cauchy)

Fie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *o serie cu termeni pozitivi cu proprietatea că şirul* $\{u_n\}$ *este descrescător. Atunci seriile* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *şi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot u_{2^n}$ *au aceeaşi natură.*

Demonstrație

Fie $k \in \mathbb{N}^*$ cu proprietatea $n < 2^k$.

Deoarece $\{u_n\}$ este un şir descrescător de numere pozitive avem:

$$s_n = u_1 + \ldots + u_n \leq u_1 + \ldots + u_{2^k - 1} = u_1 + (u_2 + u_3) + \ldots + \left(u_{2^{k-1}} + \ldots + u_{2^k - 1}\right) \leq$$
$$\leq u_1 + 2u_2 + \ldots + 2^{k-1} u_{2^{k-1}} = u_1 + \sigma_{2^{k-1}}$$

(cu σ_n notăm şirul sumelor parțiale al seriei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot u_{2^n}$).

Dacă seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot u_{2^n}$ este convergentă şi are suma σ, rezultă $s_n < u_1 + \sigma$, $\forall \ n \in \mathbb{N}^*$ şi deci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă.

Pe de altă parte, dacă $n \geq 2^k$ vom avea:

$$s_n = u_1 + \ldots + u_n \geq u_1 + \ldots + u_{2^k} = u_1 + u_2 + (u_3 + u_4) + \ldots + \left(u_{2^{k-1}} + \ldots + u_{2^k}\right) \geq$$
$$\geq \frac{1}{2} u_1 + u_2 + 2u_4 + \ldots + 2^{k-1} u_{2^k} = \frac{1}{2}\left(u_1 + 2u_2 + 2^2 u_{2^2} + \ldots + 2^k u_{2^k}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(u_1 + \sigma_{2^k}\right).$$

Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot u_{2^n}$ diverge, rezultă $\lim_{k\to\infty} \sigma_{2^k} = \infty$ şi deci $\lim_{n\to\infty} s_n = \infty$.

Aşadar, seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este divergentă.

Exemple

1. Seria armonică generalizată

Considerăm seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$, $\alpha > 0$, numită seria armonică generalizată.

Deoarece $\alpha > 0$, termenii seriei descresc şi se poate aplica Teorema 1.5.3. Rezultă că seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ are aceeaşi natură cu seria $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n(1-\alpha)}$, care este o serie geometrică, cu raţia $q = 2^{1-\alpha}$.

Dacă $\alpha \le 1$, atunci $q \ge 1$ şi $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ diverge.

Dacă $\alpha > 1$, atunci $q < 1$ şi $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ converge.

În particular, pentru $\alpha = 1$ obţinem o nouă demonstraţie a faptului că seria armonică $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ este divergentă.

2. Seria $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log_a n)^{\alpha}}$, unde $a > 1$ este convergentă pentru $\alpha > 1$ şi divergentă pentru $0 \le \alpha \le 1$.

Într-adevăr, din Teorema 1.5.3 rezultă că această serie are aceeaşi natură cu seria

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n}{2^n\left(\log_a 2^n\right)^{\alpha}} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n \cdot \log_a 2)^{\alpha}} = \frac{1}{(\log_a 2)^{\alpha}} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}.$$

Aşadar, seria dată are aceeaşi natură cu seria armonică generalizată.

Teorema 1.5.4. (Criteriul II de comparaţie)

Fie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *şi* $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ *două serii cu termeni pozitivi. Presupunem că există* $k \in \mathbb{N}^*$ *astfel încât*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \le \frac{v_{n+1}}{v_n}, \ \forall \ \ n \ge k. \tag{1.19}$$

Atunci: *a*) *Dacă seria* $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ *converge, rezultă că şi seria* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *converge.*

b) *Dacă seria* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *diverge, rezultă că şi seria* $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ *diverge.*

Demonstraţie

Din Observaţia 1.4.2 rezultă că putem presupune că inegalitatea (1.19) are loc pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Aşadar avem $\frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} \le \frac{u_n}{v_n}$, $\forall \; n \in \mathbb{N}^*$ şi mai departe

$\frac{u_n}{v_n} \le \frac{u_{n-1}}{v_{n-1}} \le \ldots \le \frac{u_2}{v_2} \le \frac{u_1}{v_1}$, de unde rezultă $u_n \le \frac{u_1}{v_1} \cdot v_n$, $\forall \; n \in$ N.

Afirmaţiile din enunţ rezultă acum din Teorema 1.5.2 (Observaţia 1.5.1).

Teorema 1.5.5. (Criteriul III de comparaţie)

Fie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *şi* $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ *două serii cu termeni pozitivi cu proprietatea:*

$$0 < \underline{\lim} \frac{u_n}{v_n} \le \overline{\lim} \frac{u_n}{v_n} < +\infty . \tag{1.20}$$

Atunci cele două serii au aceeaşi natură.

Demonstraţie

Fie a, $b \in \Upsilon$ astfel încât

$$0 < a < \underline{\lim} \frac{u_n}{v_n} \le \overline{\lim} \frac{u_n}{v_n} < b .$$

Din Observaţia 1.3.2 rezultă că numai un număr finit de termeni ai şirului $\left\{ \frac{u_n}{v_n} \right\}$ sunt mai mici ca a sau mai mari ca b. Prin urmare există $k \in \mathbb{N}^*$ astfel încât

$$a < \frac{u_n}{v_n} < b \text{, pentru orice } \; n \ge k . \tag{1.21}$$

Cum $v_n > 0$, mai departe avem:

$a v_n < u_n < b v_n$.

Afirmaţia rezultă acum din Teorema 1.5.2.

Corolar. *Fie* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *şi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ *două serii cu termeni pozitivi cu proprietatea că există* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n}$ *şi*

$$0 < \lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} < +\infty . \tag{1.22}$$

Atunci cele două serii au aceeaşi natură.

Demonstraţie

Afirmaţia rezultă din Teorema 1.5.5 şi Propoziţia 1.3.2.

Exemplu. Să se afle natura seriei $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \sqrt[n]{n}}$. Fie $u_n = \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$ şi $v_n = \frac{1}{n}$. Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ rezultă $\lim\limits_{n\to 1} \frac{u_n}{v_n} = 1$. Cum seria $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ este divergentă, rezultă că şi seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \sqrt[n]{n}}$ este divergentă.

Teorema 1.5.6. (Criteriul rădăcinii al lui Cauchy)

Fie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *o serie cu termeni pozitivi.*

a) Dacă există $0 < \alpha < 1$ şi $k \in \mathbb{N}^*$ *astfel încât*

$$\sqrt[n]{u_n} \le \alpha , \ \forall \ \ n \ge k , \tag{1.23}$$

atunci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *este convergentă.*

b) Dacă pentru o infinitate de termeni avem

$$\sqrt[n]{u_n} \ge 1 , \tag{1.24}$$

atunci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *este divergentă.*

Demonstraţie

Din (1.23) rezultă $u_n \le \alpha^n$, $\forall \; n \ge k$. Deoarece seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha^n$ este convergentă, fiind o serie geometrică cu rația $q = \alpha < 1$, din Teorema 1.5.2 rezultă că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă.

Din (1.24) rezultă $u_n \ge 1$ pentru o infinitate de termeni şi deci că şirul $\{u_n\}$ nu converge la 0. Din Observația 1.4.1 rezultă că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ este divergentă.

Corolarul 1. *Fie* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *o serie cu termeni pozitivi şi fie* $L = \overline{\lim} \sqrt[n]{u_n}$. *Dacă* $L < 1$ *seria este convergentă, iar dacă* $L > 1$ *seria este divergentă.*

Demonstrație

a) Fie $L < \alpha < 1$. Din definiția limitei superioare rezultă că există un număr finit de termeni ai şirului $\sqrt[n]{u_n}$ mai mari ca α. Aşadar există $k \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\sqrt[n]{u_n} \le \alpha$, $\forall \; n \ge k$. Afirmația rezultă acum din Teorema 1.5.6.

b) Dacă $L > 1$, atunci există o infinitate de termeni ai şirului $\left\{\sqrt[n]{u_n}\right\}$ mai mari ca 1, deci seria este divergentă (vezi Teorema 1.5.6).

Corolarul 2. *Fie* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *o serie cu termeni pozitivi cu proprietatea că există* $l = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n}$. *Dacă* $l < 1$ *seria este convergentă, iar dacă* $l > 1$ *seria este divergentă.*

Demonstrație

Afirmația rezultă din Corolarul 1 şi Propoziția 1.3.2.

Exemple

1. Să se afle natura seriei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left[2 + (-1)^n\right]^n \cdot a^n$, $a > 0$. Dacă notăm cu $u_n = \left[2 + (-1)^n\right]^n \cdot a^n$, atunci $\overline{\lim} \sqrt[n]{u_n} = \overline{\lim} \left[2 + (-1)^n\right]^n \cdot a = 3a$. Prin urmare,

din Corolarul 2 rezultă că dacă $a < \frac{1}{3}$ seria este convergentă, iar dacă $a > \frac{1}{3}$ seria este divergentă.

Dacă $a = \frac{1}{3}$ atunci $u_n = \begin{cases} \frac{1}{3^n} & \text{dacă } n \text{ este impar} \\ 1 & \text{dacă } n \text{ este par}. \end{cases}$

Seria este divergentă deoarece $u_n \not\to 0$.

2. Să se afle natura seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\left(3 + \frac{1}{n}\right)^n}$. Deoarece $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2} = 1$ rezultă $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \frac{1}{3} < 1$.

Din Corolarul 1 rezultă că seria este convergentă.

Teorema 1.5.7. (Criteriul raportului al lui D'Alembert)

Fie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *o serie cu termeni pozitivi.*

a) Dacă există $0 < \alpha < 1$ *şi* $k \in \mathbb{N}^*$ *astfel încât*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \le \alpha, \ \forall \ n \ge k, \tag{1.25}$$

atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *este convergentă.*

b) Dacă există $k \in \mathbb{N}^*$ *astfel încât*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \ge 1, \ \forall \ n \ge k, \tag{1.26}$$

atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *este divergentă.*

Demonstraţie

Suprimând eventual un număr finit de termeni ai seriei, putem presupune că inegalitatea (1.25) are loc pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Aşadar, avem:

$$u_{n+1} \le \alpha \cdot u_n, \ \forall \ n \ge 1 \tag{1.25'}$$

Dând succesiv lui n valorile 1, 2, 3, … din (1.25') rezultă

$$u_n \le \alpha^{n-1} u_1, \ \forall \ n \in \mathbb{N}^*.$$

Deoarece seria $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha^{n-1} u_1$ este convergentă, fiind o serie geometrică cu rația $q = \alpha < 1$, din Teorema 1.5.2 rezultă că seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă.

Din (1.26) rezultă $0 < u_n \le u_{n+1}$, $\forall \ n \ge k$. Aşadar, în acest caz, şirul $\{u_n\}$ este crescător (începând de la un anumit rang) şi deci termenul său general nu converge la 0. Din Observația 1.4.1 rezultă că seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este divergentă.

Corolarul 1. *O serie cu termeni pozitivi* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *este convergentă dacă* $\overline{\lim} \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ *şi divergentă dacă* $\underline{\lim} \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$.

Demonstrație

Fie $L = \overline{\lim} \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ şi $L < \alpha < 1$. Din definiția limitei superioare rezultă că numai un număr finit de termeni ai şirului $\left\{\frac{u_{n+1}}{u_n}\right\}$ sunt mai mari ca α. Aşadar, există $k \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\frac{u_{n+1}}{u_n} \le \alpha < 1$, $\forall \ n \ge k$. Din Teorema 1.5.7 rezultă că seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă.

Fie $l = \underline{\lim} \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$. Din definiția limitei inferioare rezultă că numai un număr finit de termeni ai şirului $\left\{\frac{u_{n+1}}{u_n}\right\}$ sunt mai mici ca 1. Aşadar, există $k \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\frac{u_{n+1}}{u_n} \ge 1$, $\forall \ n \ge k$. Din Teorema 1.5.7 rezultă că seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este divergentă.

Corolarul 2. *Fie* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *o serie cu termeni pozitivi cu proprietatea că există* $l = \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$. *Dacă* $l < 1$ *seria este convergentă, iar dacă* $l > 1$ *seria este divergentă.*

Demonstrație

Afirmaţia rezultă din Corolarul 1 şi Propoziţia 1.3.2.

Exemplu. Să se afle natura seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$, $a > 0$. Deoarece $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} =$ $= \lim_{n\to\infty} \frac{a}{n+1} = 0 < 1$, rezultă că seria este convergentă, $\forall\ a > 0$.

Teorema 1.5.8. (Criteriul Raabe-Duhamel)

Fie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *o serie cu termeni pozitivi.*

a) Dacă există $\alpha > 1$ şi $k \in \mathbb{N}^*$ *astfel încât*

$$n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) \geq \alpha,\ \forall\ n \geq k, \tag{1.27}$$

atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *converge.*

b) Dacă există $k \in \mathbb{N}^*$ *astfel încât*

$$n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) \leq 1,\ \forall\ n \geq k, \tag{1.28}$$

atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *diverge.*

Demonstraţie

a) Suprimând eventual un număr finit de termeni ai seriei, putem presupune că inegalitatea (1.27) are loc pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, aşadar avem

$$n u_n - n u_{n+1} \geq \alpha u_{n+1},\ \forall\ n \geq 1 \tag{1.27'}$$

Dând lui n succesiv valoarea 1,2,3,… în (1.27') rezultă:

$$u_1 - u_2 \geq \alpha u_2$$
$$2u_2 - 2u_3 \geq \alpha u_3$$
$$3u_3 - 3u_4 \geq \alpha u_4$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$nu_n - nu_{n+1} \geq \alpha u_{n+1}$$

Notând cu $s_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$ şi adunând inegalităţile de mai sus obţinem:

$$s_n \geq \alpha\left(s_n - u_1 + u_{n+1}\right) > \alpha\left(s_n - u_1\right)$$

şi mai departe $s_n \leq \frac{\alpha u_1}{\alpha - 1}$, $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$.

Aşadar, şirul sumelor parţiale este mărginit. Din Teorema 1.5.1 rezultă că seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă.

b) Din inegalitatea (1.28) rezultă

$$nu_n \le (n+1)u_{n+1} \text{ şi mai departe } \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} \le \frac{u_{n+1}}{u_n}, \ \forall \ n \ge k .$$

Deoarece seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ este divergentă, din Teorema 1.5.4 rezultă că seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este divergentă.

Corolarul 1. *Fie* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *o serie cu termeni pozitivi.*

a) Dacă $l = \underline{\lim}\, n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) > 1$, *seria* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *este convergentă.*

b) Dacă $L = \overline{\lim}\, n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) < 1$, *seria* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *divergentă.*

Demonstraţie

a) Fie $l > \alpha > 1$. Din definiţia limitei inferioare rezultă că există $k \in \mathbb{N}^*$ astfel încât: $n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) \ge \alpha$, $\forall \ n \ge k$. Afirmaţia rezultă acum din Teorema 1.5.8.

b) Fie $L < 1$. Din definiţia limitei superioare rezultă că există $k \in \mathbb{N}^*$ astfel încât: $n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) \le 1$, $\forall \ n \ge k$. Afirmaţia rezultă din Teorema 1.5.8.

Corolarul 2. *Fie* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *o serie cu termeni pozitivi cu proprietatea că există* $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right)$. *Dacă* $l > 1$ *seria* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *converge, iar dacă* $l < 1$ *seria* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *diverge.*

Demonstraţie

Afirmaţia rezultă din Corolarul 1 şi Propoziţia 1.3.2.

Exemplu: Să se afle natura seriei

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots\ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots\ldots (2n)} \cdot \frac{1}{2n+1}.$$

Dacă notăm cu u_n termenul general al seriei, atunci

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left[\frac{(2n+2)(2n+3)}{(2n+1)^2} - 1\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{6n^2 + 5n}{(2n+1)^2} = \frac{3}{2} > 1.$$

Din Corolarul 2 rezultă că seria este convergentă.

Teorema 1.5.9. (Criteriul logaritmic al lui Cauchy)

Fie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *o serie cu termeni pozitivi.*

a) Dacă există $\alpha > 1$ *şi* $k \in \mathbb{N}^*$ *astfel încât:*

$$\frac{\ln \frac{1}{u_n}}{\ln n} \geq \alpha, \ \forall \ n > k, \tag{1.29}$$

atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *este convergentă.*

b) Dacă există $k \in \mathbb{N}^*$ *astfel încât:*

$$\frac{\ln \frac{1}{u_n}}{\ln n} \leq 1, \ \forall \ n \geq k, \tag{1.30}$$

atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *este divergentă.*

Demonstraţie

a) Din (1.29) rezultă $\ln \frac{1}{u_n} \geq \alpha \ln n = \ln n^{\alpha}$. Deoarece funcţia f = ln este crescătoare, rezultă $\frac{1}{u_n} \geq n^{\alpha}$ şi mai departe $u_n \leq \frac{1}{n^{\alpha}}$, $\forall \ n \geq k$.

Cum seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ este convergentă pentru $\alpha > 1$, din Teorema 1.5.2 rezultă că şi seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă.

b) Din (1.30) rezultă $u_n \geq \frac{1}{n}$, $\forall\ n \geq k$. Cum seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ este divergentă, din Teorema 1.5.2 rezultă că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ este divergentă.

Corolarul 1. *Fie* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *o serie cu termeni pozitivi.*

a) Dacă $\underline{\lim} \frac{\ln \frac{1}{u_n}}{\ln n} > 1$, *seria* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *converge.*

b) Dacă $\overline{\lim} \frac{\ln \frac{1}{u_n}}{\ln n} < 1$, *seria* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *diverge.*

Demonstrația rezultă din Teorema 1.5.9 şi este asemănătoare cu demonstrația de la Corolarul 1, Teorema 1.5.8.

Corolarul 2. *Fie* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *o serie cu termeni pozitivi pentru care există* $l = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln \frac{1}{u_n}}{\ln n}$. *Dacă* $l > 1$ *seria este convergentă, iar dacă* $l < 1$ *seria este divergentă.*

Demonstrația rezultă din Corolarul 1 şi Propoziția 1.3.2.

Exemplu: Să se afle natura seriei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{\ln a}$, $a > 0$.

Dacă notăm cu $u_n = n^{\ln a}$, atunci

$$l = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln \frac{1}{u_n}}{\ln n} = -\ln a.$$

Dacă $a < \frac{1}{e}$ rezultă $l > 1$, deci seria este convergentă.

Dacă $a > \frac{1}{e}$ seria este divergentă.

Dacă $a = \frac{1}{e}$ atunci $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ coincide cu seria armonică $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ şi deci este divergentă.

1.6. Criterii de convergenţă pentru serii cu termeni oarecare

Vom considera acum serii de numere reale, în care termenii pot avea orice semn. Cazul interesant este acela al seriilor care au o infinitate de termeni pozitivi şi o infinitate de termeni negativi (O serie care are numai un număr finit de termeni de acelaşi semn poate fi asimilată cu o serie cu termeni pozitivi).

Pentru astfel de serii avem deja un criteriu de convergenţă şi anume, criteriul general de convergenţă al lui Cauchy (Teorema 1.4.1).

În continuare vom prezenta un criteriu care ne dă o condiţie suficientă pentru convergenţa unei serii cu termeni oarecare.

Teorema 1.6.1. (Criteriul Abel-Dirichlet)

Fie $\{a_n\}$ un şir descrescător de numere pozitive convergent la 0 şi fie seria $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ cu proprietatea că şirul sumelor sale parţiale $\{s_n\}$ este mărginit. Atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n v_n$ este convergentă.

Demonstraţie

Demonstraţia se bazează pe Teorema 1.4.1 (criteriul general de convergenţă al lui Cauchy).

Prin ipoteză, există $M > 0$, astfel încât

$$|s_n| < M, \ \forall \ n \in \mathbb{N}^*.$$

Observăm că, deoarece şirul $\{a_n\}$ este descrescător, avem

$$|a_k - a_{k+1}| = a_k - a_{k+1}, \ \forall \ k \in \mathbb{N}^*.$$

Dacă notăm cu cu $\{\sigma_n\}$ şirul numerelor parţiale ale seriei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n v_n$, atunci:

$$\begin{aligned}
&|\sigma_{n+p} - \sigma_n| = |a_{n+1}v_{n+1} + a_{n+2}v_{n+2} + \ldots + a_{n+p}v_{n+p}| = \\
&= \left|a_{n+1}(s_{n+1} - s_n) + a_{n+2}(s_{n+2} - s_{n+1}) + \ldots + a_{n+p}\left(s_{n+p} - s_{n+p-1}\right)\right| = \\
&= \left|-a_{n+1}s_n + (a_{n+1} - a_{n+2})s_{n+1} + \ldots + \left(a_{n+p-1} - a_{n+p}\right)s_{n+p-1} + a_{n+p}s_{n+p}\right| \le \\
&\le a_{n+1}|s_n| + (a_{n+1} - a_{n+2})|s_{n+1}| + \ldots + \left(a_{n+p-1} - a_{n+p}\right)|s_{n+p-1}| + a_{n+p}|s_{n+p}| \le \\
&\le M\left(a_{n+1} + a_{n+1} - a_{n+2} + \ldots + a_{n+p-1} - a_{n+p} + a_{n+p}\right) = 2M\, a_{n+1}.
\end{aligned}$$

Aşadar, pentru orice n şi $p \in \mathbb{N}^*$ avem:

$$\left|\sigma_{n+p} - \sigma_n\right| \le 2M\, a_{n+1} . \tag{1.31}$$

Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, pentru $\forall$ ε > 0, $\exists$ $n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $a_n < \dfrac{\varepsilon}{2M}$, $\forall\ n \ge n_\varepsilon$.

Dacă în inegalitatea (1) considerăm $n \ge n_\varepsilon$ obținem

$$\left|\sigma_{n+p} - \sigma_n\right| \le 2M \frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon,\ \forall\ \ p \in \mathbb{N}^*.$$

Din Teorema 1.4.1 rezultă că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n v_n$ este convergentă.

Exemplu: Să se afle natura seriei:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \cos n^2}{n} .$$

Deoarece

$$\sin n \cos n^2 = \frac{1}{2}\left[\sin n\left(n+1\right) - \sin n\left(n-1\right)\right],$$

seria dată se mai poate scrie sub forma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}\left[\sin n\left(n+1\right) - \sin\left(n-1\right)n\right].$$

Fie $a_n = \dfrac{1}{2n}$ şi $v_n = \sin n\left(n+1\right) - \sin\left(n-1\right)n$. Se observă imediat că

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} v_k = \sin n\left(n+1\right) \text{ şi deci } \left|s_n\right| \le 1,\ \forall\ \ n \in \mathrm{N}.$$

Din Teorema 1.6.1 rezultă că seria este convergentă.

Următorul criteriu de convergență se referă la serii alternate. Prin serie alternată se înțelege o serie în care termenii sunt alternativ strict pozitivi sau strict negativi. O serie alternată este deci de forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(-1\right)^{n-1} u_n = u_1 - u_2 + u_3 + \ldots\ldots, \text{ unde } u_n > 0,\ n \in \mathbb{N}^* .$$

Teorema 1.6.2. (Criteriul lui Leibniz)

Orice serie alternată $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(-1\right)^{n-1} u_n$ *cu proprietatea că şirul* $\left\{u_n\right\}$ este *descrescător şi convergent la* 0 *este convergentă.*

Demonstrație

Demonstrația rezultă imediat din Teorema 1.6.1 dacă vom condidera $a_n = u_n$ şi $v_n = (-1)^{n-1}$.

Într-adevăr $a_n \searrow 0$ şi $s_n = \sum_{k=1}^{n} v_k = \begin{cases} 1 & \text{dacă } n \text{ este impar} \\ 0 & \text{dacă } n \text{ este par} . \end{cases}$

Exemplu. Seria armonică alternată

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + \ldots,$$

este convergentă deoarece $u_n = \frac{1}{n} \searrow 0$.

1.7. Calculul aproximativ al sumei unor serii

Calculul exact al sumei unei serii convergente este posibil numai în cazuri foarte particulare (de exemplu pentru seria geometrică). În general, acest lucru nu este posibil şi de aceea se aproximează suma *s* a seriei, cu suma parțială s_n. Eroarea absolută care se face este $|r_n| = |s - s_n|$.

1. Cazul seriilor cu termeni pozitivi

Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este cu termeni pozitivi, atunci $u_n > 0$ şi valoarea aproximativă s_n va fi mai mică decât valoarea exactă *s*.

a) Să presupunem că există $m \in \mathbb{N}^*$ şi $0 < \alpha(m) < 1$ astfel încât

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \le \alpha(m) \, , \; \forall \;\; n \ge m \, . \tag{1.32}$$

Atunci avem

$$r_m \le \frac{\alpha(m)}{1-\alpha(m)} u_m \, . \tag{1.33}$$

Într-adevăr, din (1.32) rezultă:

$$r_m = u_{m+1} + u_{m+2} + \ldots \le \left[\alpha(m) + \alpha^2(m) + \ldots \right] u_m = \frac{\alpha(m)}{1-\alpha(m)} u_m \, .$$

Exemplu: Să se calculeze cu trei zecimale exacte suma seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!n}$.

Deoarece $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n}{(n+1)^2} < \frac{1}{n+1} \le \frac{1}{m+1}$ pentru $n \ge m$, putem lua $\alpha(m) = \frac{1}{m+1}$ şi vom pune condiţia ca $\frac{\alpha(m)}{1-\alpha(m)} u_m = \frac{1}{m!m^2} < 10^{-3}$, de unde rezultă $m \ge 5$. Vom aproxima deci suma seriei cu

$$s_5 = 1 + \frac{1}{2!2} + \frac{1}{3!3} + \frac{1}{4!4} + \frac{1}{5!5} \approx 1{,}3176 .$$

b) Presupunem că există $m \in \mathbb{N}^*$ şi $0 < \alpha(m) < 1$ astfel încât

$$\sqrt[n]{u_n} \le \alpha(m) < 1, \ \forall \ n \ge m . \tag{1.34}$$

Atunci avem

$$r_m \le \frac{\alpha^{m+1}(m)}{1-\alpha(m)} . \tag{1.35}$$

Într-adevăr, din (1.34) rezultă

$$r_m = u_{m+1} + u_{m+2} + \ldots \le \alpha^{m+1}(m) + \alpha^{m+2}(m) + \ldots = \frac{\alpha^{m+1}(m)}{1-\alpha(m)} .$$

Exemplu. Să se calculeze cu două zecimale exacte suma seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$.

Deoarece $\sqrt[n]{u_n} = \frac{1}{n} \le \frac{1}{m}$ pentru $n \ge m$, putem lua $\alpha = \alpha(m) = \frac{1}{m}$ şi punem condiţia

$$\frac{\alpha^{m+1}}{1-\alpha} = \frac{1}{m^m (m-1)} < 10^{-2} ,$$

de unde rezultă $m \ge 4$. Vom aproxima deci suma seriei cu

$$s_4 = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^4} \approx 1{,}290 .$$

2. Cazul seriilor alternate

Fie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ o serie alternată care îndeplineşte condiţiile din criteriul lui Leibniz $(u_n \searrow 0)$. Vom arăta că eroarea absolută $|r_n| = |s - s_n| < u_{n+1}$.

Într-adevăr, deoarece $\{u_n\}$ este descrescător, rezultă:

$$s_{2n} = s_{2n-2} + (u_{2n-1} - u_{2n}) \geq s_{2n-2}$$

$$s_{2n+1} = s_{2n-1} - (u_{2n} - u_{2n+1}) \leq s_{2n-1}.$$

Dacă notăm cu s suma seriei, atunci: $s_{2n} \nearrow s$ iar $s_{2n-1} \searrow s$ şi deci avem următoarea situaţie

$$s_2 < s_4 < \ldots < s_{2n} < \ldots < s < \ldots < s_{2n+1} < \ldots < s_3 < s_1,$$

de unde rezultă:

$$0 < s - s_{2n} < s_{2n+1} - s_{2n} = u_{2n+1} \quad \text{şi} \quad 0 < s_{2n+1} - s < s_{2n+1} - s_{2n+2} = u_{2n+2}.$$

Prin urmare, dacă aproximăm suma seriei cu o sumă parţială s_n, eroarea care se face este mai mică decât primul termen neglijat. Eroarea este prin lipsă dacă n este par şi prin adaus dacă n este impar.

Exemplu: Să se calculeze cu patru zecimale exacte suma seriei $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^n}$.

Conform celor de mai sus vom pune condiţia ca $u_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^{n+1}} < 10^{-4}$, de unde rezultă $n \geq 5$. Vom aproxima deci suma seriei cu

$$s_5 = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^5} \approx 0,78345.$$

1.8. Serii absolut convergente

Definiţia 1.8.1. *O serie cu termeni oarecare* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *se numeşte **absolut convergentă**, dacă seria* $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ *este convergentă.*

Teorema 1.8.1. *Orice serie absolut convergentă este convergentă.*

Demonstraţie

Fie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ o serie absolut convergentă. Deoarece seria $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ este convergentă, din criteriul general de convergență al lui Cauchy rezultă că $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ astfel încât

$$|u_{n+1}| + |u_{n+2}| + \ldots + |u_{n+p}| < \varepsilon,\ \forall\ n \geq n_\varepsilon,\ \forall\ p \in \mathbb{N}^*.$$

Pe de altă parte avem

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+p}| \leq |u_{n+1}| + |u_{n+2}| + \ldots + |u_{n+p}| < \varepsilon,$$

pentru $\forall\ n \geq n_\varepsilon$ și $\forall\ p \in \mathbb{N}^*$.

Rezultă că seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă în virtutea aceluiași criteriu.

Observația 1.8.1. Afirmația reciprocă nu este în general adevărată. Există serii convergente care nu sunt absolut convergente.

Exemplu. Seria armonică alternată $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ este convergentă, dar nu este absolut convergentă, deoarece seria $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ este divergentă.

Definiția 1.8.2. *O serie convergentă care nu este absolut convergentă se numește* ***semiconvergentă*** *(sau* ***condiționat convergentă****). Rezultă că seria armonică alternată este semiconvergentă.*

Una din proprietățile cele mai importante ale unei sume finite de numere reale este proprietatea de comutativitate, care constă în faptul că suma nu se schimbă dacă schimbăm ordinea termenilor. Se pune în mod natural problema dacă proprietatea aceasta se păstrează și în cazul seriilor convergente. Răspunsul este în general negativ.

Exemplu: Fie seria armonică alternată

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} + \ldots.. \tag{1.36}$$

Așa cum am văzut, suma acestei serii este $s = \ln 2$. Dacă notăm cu $\{s_n\}$ șirul sumelor sale parțiale rezultă $\ln 2 = \lim_{n\to\infty} s_n$.

Considerăm acum seria următoare:

$$\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{4n-2}-\frac{1}{4n}\right)+\ldots.. \qquad (1.37)$$

(obţinută din seria armonică alternată prin schimbarea ordinii termenilor). Dacă notăm $\{\sigma_n\}$ şirul sumelor parţiale ale acestei serii, rezultă:

$$\sigma_{3n}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{4k}\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{4k}\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\sum\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right)=\frac{1}{2}s_{2n}.$$

Aşadar avem: $\sigma_{3n}=\frac{1}{2}s_{2n}$. Evident, avem şi relaţiile:

$$\sigma_{3n-1}=\frac{1}{2}s_{2n}+\frac{1}{4n}$$
$$\sigma_{3n-2}=\sigma_{3n-1}+\frac{1}{4n-2}.$$

Deoarece $\lim_{n\to\infty} s_n=\ln 2$ rezultă că $\exists\ \lim_{n\to\infty}\sigma_n=\frac{1}{2}\ln 2$. Prin urmare seria (1.37), obţinută din seria (1.36) printr-o schimbare a ordinii termenilor este convergentă şi are suma $\frac{1}{2}\ln 2$.

Am arătat astfel că schimbând ordinea termenilor într-o serie semiconvergentă suma sa se schimbă. Prezentăm în continuare, fără demonstraţie, următorul rezultat datorat lui B. Riemann.

Teorema 1.8.2. *Într-o serie semiconvergentă se poate schimba ordinea termenilor astfel încât noua serie să aibă suma egală cu un număr dat dinainte sau astfel încât seria să devină divergentă.*

Din Teorema 1.8.2 rezultă că într-o serie semiconvergentă nu este permisă schimbarea ordinii termenilor.

Definiţia 1.8.3. *O serie convergentă care are proprietatea de comutativitate (adică suma sa nu se schimbă dacă se schimbă ordinea termenilor) se numeşte* ***necondiţionat convergentă****.*

Teorema 1.8.3. (Cauchy). *Orice serie absolut convergentă este necondiţionat convergentă.*

Demonstraţie

Considerăm seria absolut convergentă $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ şi notăm cu *s* suma sa.

Notăm cu σ suma seriei $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$.

Etapa I. Vom arăta că într-o serie absolut convergentă seriile formate cu termenii pozitivi, respectiv negativi sunt convergente şi că suma seriei este egală cu diferenţa sumelor acestor serii.

Fie $\{s_n\}$ şirul numerelor parţiale ale seriei $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ şi fie $\{\sigma_n\}$ şirul sumelor parţiale ale seriei $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$. Dacă notăm cu a_n suma termenilor pozitivi din s_n şi cu $-b_n$ suma termenilor negativi din s_n rezultă: $s_n = a_n - b_n$, $\sigma_n = a_n + b_n$ şi mai departe

$$a_n = \frac{1}{2}(\sigma_n + s_n),\ b_n = \frac{1}{2}(\sigma_n - s_n).$$

Aşadar, avem:

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}(\sigma + s);\ b = \lim_{n\to\infty} b_n = \frac{1}{2}(\sigma + s) \text{ şi } s = a - b.$$

Etapa II. Vom arăta că o serie cu termeni pozitivi convergentă este necondiţionat convergentă.

Presupunem deci că $u_n > 0$, $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$. Fie seria $\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{u}_n$ obţinută din seria $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ prin schimbarea ordinii termenilor. Evident $\tilde{u}_n = u_{k_n}$, $k_n \in \mathbb{N}^*$. Deoarece $\tilde{s}_n = \tilde{u}_1 + \tilde{u}_2 + \ldots + \tilde{u}_n < s$ rezultă că seria $\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{u}_n$ este convergentă şi suma sa $\tilde{s} \le s$.

Pe de altă parte, putem presupune că seria iniţială $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ este obţinută din seria $\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{u}_n$ prin schimbarea ordinii termenilor, de unde rezultă $s \le \tilde{s}$, deci $s = \tilde{s}$.

Etapa III. Vom arăta că orice serie $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ absolut convergentă este necondiţionat convergentă. Dacă notăm cu $\{u_n'\}$ termenii negativi şi cu $\{u_n''\}$ termenii negativi, atunci din prima parte a demonstraţiei rezultă:

$$a = \sum_{n=1}^{\infty}u_n',\ b = \sum_{n=1}^{\infty}u_n'' \text{ şi } s = a - b.$$

Orice schimbare a ordinii termenilor în seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ revine la schimbarea ordinii termenilor în seriile $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n$, respectiv $\sum_{n=1}^{\infty} u''_n$. Cum sumele acestor serii nu se schimbă dacă se schimbă ordinea termenilor (aşa cum s-a demonstrat în etapa II) rezultă că $\tilde{s} = a - b = s$, şi cu aceasta teorema este demonstrată.

1.9. Operaţii cu serii convergente

Teorema 1.9.1. *Dacă seriile* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *şi* $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ *sunt convergente şi au sumele U, respectiv V atunci* $\forall\ \alpha, \beta \in \Upsilon$ *seria* $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\alpha u_n + \beta v_n\right)$ *este convergentă şi are suma egală cu* $\alpha U + \beta V$.

Demonstraţie

Afirmaţia rezultă imediat din următoarea egalitate:

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\alpha u_k + \beta v_k\right) = \alpha \sum_{k=1}^{n} u_k + \beta \sum_{k=1}^{n} v_k .$$

Prin produsul a două serii $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ şi $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ se înţelege orice serie de forma $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ unde $w_n = u_k v_l$, $k, l \in \square^*$. Există deci o infinitate de pozibilităţi pentru a înmulţi două serii. Dintre acestea, două tipuri de serie produs sunt mai des utilizate şi anume:

$$u_1 v_1 + \left(u_1 v_2 + u_2 v_1\right) + \ldots + \left(u_1 v_n + u_2 v_{n-1} + \ldots + u_n v_1\right) + \ldots \tag{1.38}$$

$$\begin{aligned} & u_1 v_1 + \left(u_1 v_2 + u_2 v_2 + u_2 v_1\right) + \ldots + \left(u_1 v_n + u_2 v_n + \ldots\right. \\ & \left.\ldots + u_n v_n + u_n v_{n-1} + \ldots + u_n v_1\right) + \ldots \end{aligned} \tag{1.39}$$

Produsul a două serii convergente nu este în general o serie convergentă.

Teorema 1.9.2. *Dacă seriile* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *şi* $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ *sunt absolut convergente şi au sumele U, respectiv V, atunci orice serie produs este absolut convergentă şi are suma egală cu UV.*

Demonstraţie

Fie $\sum_{k=1}^{\infty} u_{i_k} v_{j_k}$ o serie produs oarecare. Deoarece

$$\left|u_{i_1} v_{j_1}\right| + \left|u_{i_2} v_{j_2}\right| + \ldots + \left|u_{i_n} v_{j_n}\right| \le \left(|u_1| + \ldots + |u_m|\right)\left(|v_1| + \ldots + |v_m|\right)$$

unde $m = \max\{ i_1,\ldots,i_n;\ j_1,\ldots,j_n\}$ şi seriile $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$, $\sum_{n=1}^{\infty} |v_n|$ sunt convergente, rezultă că seria $\sum_{k=1}^{\infty} u_{i_k} v_{j_k}$ este absolut convergentă şi deci convergentă.

Deoarece seriile absolut convergente sunt necondiţionat convergente, rezultă că suma seriei $\sum_{k=1}^{\infty} u_{i_k} v_{j_k}$ este egală cu suma seriei produs de tipul (1.39).

Se observă însă imediat că suma parţială p_n a seriei produs de tipul (1.39) este egală cu:

$$p_n = \left(u_1 + u_2 + \ldots + u_n\right)\left(v_1 + v_2 + \ldots + v_n\right).$$

Rezultă că suma oricărei serii produs va fi egală cu $\lim p_n = UV$ şi cu aceasta teorema este demonstrată.

2. Şiruri şi serii de funcţii reale

2.1. Convergenţă simplă (punctuală) şi convergenţă uniformă

Fie $E \subset \mathbb{R}$ şi $\{f_n\}$ un şir de funcţii definite pe E cu valori în $\mathbb{R}$. Fie de asemenea $f: E \to \mathbb{R}$.

Definiţia 2.1.1. *Spunem că şirul de funcţii* $\{f_n\}$ *converge simplu* (*punctual*) *pe mulţimea E la funcţia f, dacă* $\forall\ x \in E$, *şirul de numere reale* $\{f_n(x)\}$ *converge la* $f(x)$. *Folosim notaţia* $f_n \xrightarrow[E]{s} f$. *Evident, când se schimbă x, se schimbă şi şirul* $\{f_n(x)\}$. *Rezultă că* $f_n \xrightarrow[E]{s} f$ *dacă* $\forall\ x \in E$ *şi* $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists$ *un rang* $n(x,\varepsilon) \in \mathbb{N}^*$ *astfel încât*:

$$\left|f_n(x) - f(x)\right| < \varepsilon,\ \forall\ n \geq n(x,\varepsilon).$$

Exemplul 1. Fie $f_n(x) = x^n$, $x \in [0, 1]$. Dacă notăm cu

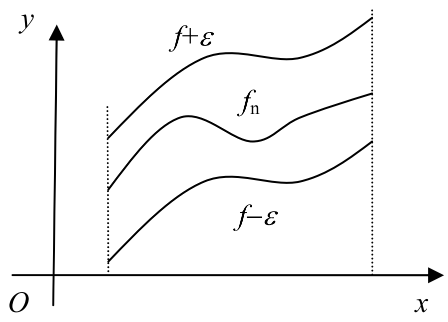
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pentru} \quad x \in [0,1) \\ 1 & \text{pentru} \quad x = 1 \end{cases}, \quad \text{atunci} \quad f_n \xrightarrow[{[0,1]}]{s} f.$$

Definiţia 2.1.2. *Spunem că şirul de funcţii* $\{f_n\}$ *converge uniform pe mulţimea E la funcţia f, dacă* $\varepsilon > 0$, $\exists\ n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ *astfel încât*:

$$\left|f_n(x) - f(x)\right| < \varepsilon,\ \forall\ n \geq n_\varepsilon \text{ şi } \forall\ x \in E. \tag{2.1}$$

Vom folosi notaţia $f_n \xrightarrow[E]{u} f$.

Interpretarea geometrică a convergenţei uniforme este următoarea: pentru $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists$ un rang $n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$, astfel încât pentru $\forall\ n \geq n_\varepsilon$, graficul funcţiei f_n este cuprins între graficele funcţiilor $f - \varepsilon$ şi $f + \varepsilon$.



Observația 2.1.1. În definiția convergenței uniforme este important faptul că rangul n_ε, începând de la care are loc inegalitatea (1), depinde numai de ε şi nu depinde de x. Dacă presupunem că funcțiile f şi f_n, $n \in \mathbb{N}^*$ sunt mărginite pe mulțimea E, atunci

$$f_n \xrightarrow[E]{u} f \text{ dacă şi numai dacă } \lim_{n\to\infty} \rho_n = 0,$$

unde $\rho_n = \sup\left\{\left|f_n(x) - f(x)\right|,\ x \in E\right\}$.

Într-adevăr, afirmația rezultă imediat dacă observăm că inegalitatea

$$\left|f_n(x) - f(x)\right| < \varepsilon,\ \forall\ n \ge n_\varepsilon \text{ şi } \forall\ x \in E$$

este echivalentă cu inegalitatea

$$\sup\left\{\left|f_n(x) - f(x)\right|;\ x \in E\right\} < \varepsilon,\ \forall\ n \ge n_\varepsilon.$$

Observația 2.1.2. Este evident faptul că dacă un şir de funcții este uniform convergent pe o mulțime E, el este simplu convergent pe orice submulțime $A \subset E$. Afirmația reciprocă nu este în general adevărată.

Într-adevăr, să considerăm din nou şirul de funcții $f_n(x) = x^n$, $x \in [0, 1]$ şi funcția

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } x \in [0,1) \\ 1 & \text{dacă } x = 1. \end{cases}$$

Am văzut că $f_n \xrightarrow[[0,1]]{s} f$.

Pe de altă parte se observă cu uşurință că

$$\rho_n = \sup\left\{\left|f_n(x) - f(x)\right|;\ x \in [0,1]\right\} = 1,\ \forall\ n \in \mathbb{N}^*.$$

Rezultă că $\rho_n \to 1 \ne 0$, deci, în virtutea Observației 2.1.2, şirul de funcții $\{f_n\}$ nu converge uniform la f pe mulțimea [0, 1].

Teorema 2.1.1. *Condiţia necesară şi suficientă ca un şir de funcţii* $\{f_n\}$ *să convergă uniform pe mulţimea E la funcţia f este ca pentru* $\forall\ \varepsilon > 0$ *să* $\exists\ n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ *astfel încât* $\left|f_{n+p}(x) - f_n(x)\right| < \varepsilon$ *pentru* $\forall\ x \in E$, $\forall\ n \geq n_\varepsilon$ *şi* $\forall\ p \in \mathbb{N}^*$.

Demonstraţie

Necesitatea. Dacă $f_n \xrightarrow[E]{u} f$, atunci $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $\left|f_n(x) - f(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2}$, $\forall\ n \geq n_\varepsilon$, $\forall\ x \in E$. Dacă $p \in \mathbb{N}^*$, atunci cu atât mai mult rezultă:

$$\left|f_{n+p}(x) - f(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2},\ \forall\ n > n_\varepsilon \text{ şi } \forall\ x \in E.$$

În continuare avem:

$$\left|f_{n+p}(x) - f_n(x)\right| \leq \left|f_{n+p}(x) - f(x)\right| + \left|f(x) - f_n(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

pentru orice $n \geq n_\varepsilon$, $\forall\ p \in \mathbb{N}^*$ şi $\forall\ x \in E$.

Suficienţa. Din ipoteză rezultă că $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ astfel încât

$$\left|f_{n+p}(x) - f_n(x)\right| < \varepsilon,\ \forall\ n \geq n_\varepsilon,\ \forall\ p \in \mathbb{N}^* \text{ şi } \forall\ x \in E, \tag{2.2}$$

Din (2.2) rezultă că pentru orice $x \in E$ fixat, şirul de numere reale $\{f_n(x)\}$ este fundamental şi deci convergent, în virtutea criteriului general de convergenţă al lui Cauchy. Dacă notăm cu $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ şi trecem la limită după p în inegalitatea (2.2) obţinem:

$$\left|f(x) - f_n(x)\right| < \varepsilon,\ \forall\ n \geq n_\varepsilon \text{ şi } \forall\ x \in E, \text{ deci } f_n \xrightarrow[E]{u} f.$$

Următoarea propoziţie stabileşte o condiţie suficientă ca un şir de funcţii să conveargă uniform.

Propoziţia 2.1.1. *Dacă există un şir de numere pozitive* $\{a_n\}$ *cu proprietatea* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ *şi un rang* $n_0 \in \mathbb{N}^*$, *astfel încât*:

$$\left|f_n(x) - f(x)\right| \leq a_n,\ \forall\ n \geq n_0 \text{ şi } \forall\ x \in E, \tag{2.3}$$

atunci $f_n \xrightarrow[E]{u} f$.

Demonstraţie

Din (3) rezultă $\rho_n = \sup\left\{\left|f_n(x) - f(x)\right|;\ x \in E\right\} \leq a_n$, $\forall\ n \geq n_0$.

Cum $a_n \to 0$ rezultă $\rho_n \to 0$, deci $f_n \xrightarrow[E]{u} f$ în virtutea Observației 2.1.1.

Exemplu. Fie $f_n(x) = \dfrac{2n + \sin nx}{n}$, $x \in \mathbb{R}$ şi fie $f(x) = 2$, $x \in \mathbb{R}$. Observăm că $\forall\, x \in \mathbb{R}$ avem:

$$\left|f_n(x) - f(x)\right| = \frac{|\sin nx|}{n} \le \frac{1}{n} \to 0 .$$

Rezultă $f_n \xrightarrow[E]{u} f$.

În continuare, vom examina în ce condiții o anumită proprietate comună (continuitate, derivabilitate etc.) a termenilor unui şir de funcții se transmite şi limitei acestui şir. Observăm că, de regulă, convergența simplă este insuficientă pentru realizarea acestui transfer.

Într-adevăr, reluând exemplul 1, constatăm că deşi funcțiile f_n sunt continue pe [0, 1], limita şirului nu este continuă în punctul $x = 1$.

Teorema 2.1.2. *Dacă şirul de funcții* $f_n \xrightarrow[E]{u} f$ *şi* f_n *este continuă pe E pentru orice* $n \in \mathbb{N}^*$, *atunci f este continuă pe E.*

Demonstrație

Fie $a \in E$ oarecare fixat. Pentru $\forall\ x \in E$ şi $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$ avem:

$$\left|f(x) - f(a)\right| \le \left|f(x) - f_n(x)\right| + \left|f_n(x) - f_n(a)\right| + \left|f_n(a) - f(a)\right| \qquad (2.4)$$

Deoarece $f_n \xrightarrow[E]{u} f$, $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\left|f_n(t) - f(t)\right| < \dfrac{\varepsilon}{3}$, $\forall\ n \ge n_\varepsilon$, $\forall\ t \in E$. Pe de altă parte, deoarece f_n este continuă în $x = a$ rezultă că $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ \delta_\varepsilon > 0$, astfel încât $\left|f_n(x) - f_n(a)\right| < \dfrac{\varepsilon}{3}$, $\forall\ x \in E$ cu proprietatea $|x - a| < \delta_\varepsilon$.

Dacă în inegalitatea (2.4) presupunem $n \ge n_\varepsilon$ şi $|x - a| < \delta_\varepsilon$, rezultă $\left|f(x) - f(a)\right| < \dfrac{\varepsilon}{3} + \dfrac{\varepsilon}{3} + \dfrac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$, deci f este continuă în $x = a$.

Observația 2.1.3. Dacă presupunem că $x = a$ este punct de acumulare al mulțimii *E*, atunci din Teorema 2.1.2 rezultă:

$$\lim_{x\to a}\left[\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\lim_{x\to a} f_n(x)\right].$$

Într-adevăr, continuitatea lui f (respectiv f_n) în punctul $x = a$ revine la:

$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$, respectiv $\lim_{x\to a} f_n(x) = f_n(a)$.

Aşadar avem:

$$\lim_{x\to a}\left[\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right] = \lim_{x\to a} f(x) = f(a) = \lim_{n\to\infty} f_n(a) = \lim_{n\to\infty}\left[\lim_{x\to a} f_n(x)\right].$$

Teorema 2.1.3. *Dacă* $f_n \xrightarrow[{[a,b]}]{u} f$ *şi* f_n *este continuă pe* $[a,b]$ *pentru orice* $n \in \mathbb{N}^*$, *atunci există* $\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b\left[\lim_{n\to 0} f_n(x)\right]\mathrm{d}x$.

Demonstraţie

Din Teorema 2.1.2 rezultă că f este continuă pe $[a,b]$, deci că f este integrabilă pe $[a,b]$. În continuare avem:

$$\left|\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| = \left|\int_a^b\left[f_n(x) - f(x)\right]\mathrm{d}x\right| \le$$

$$\le \int_a^b\left|f_n(x) - f(x)\right|\mathrm{d}x \le \rho_n\int_a^b \mathrm{d}x = (b-a)\rho_n.$$

Cum $\rho_n \to 0$, rezultă că

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x. \tag{2.5}$$

Teorema 2.1.4. *Fie* $\{f_n\}$ *un şir de funcţii derivabile pe intervalul* (a,b), *cu proprietatea că şirul derivatelor* $\{f_n'\}$ *este uniform convergent pe* (a,b). *Dacă şirul însuşi* $\{f_n\}$ *converge cel puţin într-un punct* $x_0 \in (a,b)$, *atunci* $\{f_n\}$ *converge uniform pe* (a,b) *la o funcţie f, care este derivabilă pe* (a,b) *şi* $\forall$ $x \in (a,b)$ *avem*:

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = f'(x) = \left(\lim_{n\to\infty} f_n\right)'(x).$$

Demonstraţie

Pentru orice $x \in E$, $\forall$ n şi $p \in \mathbb{N}^*$ avem

$$f_{n+p}(x) - f_n(x) = f_{n+p}(x) - f_{n+p}(x_0) + f_{n+p}(x_0) - f_n(x_0) + f_n(x_0) - f_n(x) =$$

$$\left(f_{n+p} - f_n\right)(x) - \left(f_{n+p} - f_n\right)(x_0) + f_{n+p}(x_0) - f_n(x_0).$$

Din Teorema Lagrange rezultă că $\exists$ c între x_0 şi x astfel încât:

$$\left(f_{n+p} - f_n\right)(x) - \left(f_{n+p} - f_n\right)(x_0) = \left(f_{n+p}' - f_n'\right)(c)\left(x - x_0\right).$$

Prin urmare avem:

$$\left|f_{n+p}(x)-f_n(x)\right| \le \left|f'_{n+p}(c)-f'_n(c)\right|\left|x-x_0\right|+\left|f_{n+p}\left(x_0\right)-f_n\left(x_0\right)\right|. \quad (2.6)$$

Deoarece $\left\{f'_n\right\}$ este uniform convergent pe $[a,b]$ rezultă că $\forall$ $\varepsilon > 0$, $\exists$ $n'_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ astfel încât

$$\left|f'_{n+p}(t)-f'_n(t)\right| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}, \ \forall \ \ n \ge n'_\varepsilon, \ \forall \ \ t \in [a,b].$$

Pe de altă parte $\left\{f_n\left(x_0\right)\right\}$ este convergent, deci $\exists$ $n''_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ astfel încât

$$\left|f_{n+p}\left(x_0\right)-f_n\left(x_0\right)\right| < \frac{\varepsilon}{2}, \ \forall \ \ n \ge n''_\varepsilon \ \text{ şi } \ \forall \ \ p \in \mathbb{N}^*.$$

Fie $n_\varepsilon = \max\left(n'_\varepsilon, n''_\varepsilon\right)$.

Dacă în inegalitatea (2.6) considerăm $n \ge n_\varepsilon$ şi $p \in \mathbb{N}^*$ rezultă

$$\left|f_{n+p}(x)-f_n(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a)+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon, \ \ \forall \ \ x \in (a,b).$$

Din Teorema 2.1.1 rezultă că şirul $\left\{f_n\right\}$ este uniform convergent pe (a,b). Fie $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ şi $g = \lim\limits_{n\to\infty} f'_n$. Rămâne să arătăm că f este derivabilă în orice punct $x \in [a,b]$ şi $f'(x)=g(x)$. Pentru aceasta să observăm că $\forall$ $n, p \in \mathbb{N}^*$ şi $\forall$ $h \in \Upsilon$ astfel încât $x+h \in (a,b)$ avem

$$\frac{f_{n+p}(x+h)-f_{n+p}(x)}{h}-g(x)=\frac{\left(f_{n+p}-f_n\right)(x+h)-\left(f_{n+p}-f_n\right)(x)}{h}+$$
$$+\left[\frac{f_n(x+h)-f_n(x)}{h}-f'_n(x)\right]+\left[f'_n(x)-g(x)\right].$$

Aplicând din nou Teorema Lagrange rezultă că $\exists$ c_1 între x şi $x+h$ astfel încât

$$\left(f_{n+p}-f_n\right)(x+h)-\left(f_{n+p}-f_n\right)(x)=\left(f'_{n+p}-f'_n\right)\left(c_1\right)h.$$

Aşadar, $\forall$ $x \in E$ şi $\forall$ $n, p \in \mathbb{N}^*$ avem:

$$\begin{aligned}&\left|\frac{f_{n+p}(x+h)-f_{n+p}(x)}{h}-g(x)\right| \le \left|f'_{n+p}\left(c_1\right)-f'_n\left(c_1\right)\right|+\\ &+\left|\frac{f_n(x+h)-f_n(x)}{h}-f'_n(x)\right|+\left|f'_n(x)-g(x)\right|.\end{aligned} \quad (2.7)$$

Deoarece $f'_{n+p} \xrightarrow[(a,b)]{u} g$, rezultă că $\forall$ $\varepsilon > 0$, $\exists$ $\tilde{n}_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ astfel încât

$$\left|f'_{n+p}(c_1)-f'_n(c_1)\right|+\left|f'_n(x)-g(x)\right|<\frac{\varepsilon}{2},\ \forall\ n\geq \tilde{n}_\varepsilon \text{ şi } \forall\ \ p\in\mathbb{N}^*.$$

Pe de altă parte, deoarece

$$\lim_{h\to 0}\frac{f_n(x+h)-f_n(x)}{h}=f'_n(x),$$

rezultă că $\exists\ \delta_\varepsilon>0$ astfel încât

$$\left|\frac{f_n(x+h)-f_n(x)}{h}-f'_n(x)\right|<\frac{\varepsilon}{2},\ \forall\, x\in E,\ \forall\ \ h\in\mathbb{R} \text{ cu } x+h\in E \text{ şi } |h|<\delta_\varepsilon.$$

Dacă în inegalitatea (2.7) presupunem $n\geq\tilde{n}_\varepsilon$, $p\in\mathbb{N}^*$ şi $|h|<\delta_\varepsilon$, rezultă:

$$\left|\frac{f_{n+p}(x+h)-f_{n+p}(x)}{h}-g(x)\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon. \tag{2.8}$$

Trecând la limită după p în inegalitatea (2.8) obţinem:

$$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-g(x)\right|<\varepsilon,\ \forall\, x\in E,\ \forall\ \ h\in\mathbb{R} \text{ cu } x+h\in E \text{ şi } |h|<\delta_\varepsilon,$$

de unde rezultă că

$$\exists\ \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=g(x)$$

şi cu aceasta teorema este demonstrată.

Definiţia 2.1.3. *Fie* $\{u_n\}_{n\geq 1}$ *un şir de funcţii reale definite pe mulţimea* $E\subset\mathbb{R}$ *şi fie* $\{u_n\}_{n\geq 1}$ *şirul sumelor parţiale asociat* $s_n=\sum\limits_{k=1}^{n}u_k$. *Perechea* $(\{u_n\},\{s_n\})$ *se numeşte serie de funcţii şi se notează cu* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$.

Seria se numeşte simplu convergentă (uniform convergentă) pe mulţimea $E_0\subset E$ dacă şirul sumelor parţiale $\{s_n\}_{n\geq 1}$ este simplu convergent (uniform convergent) pe E_0.

Cea mai mare submulţime $A\subset E$ pe care seria este simplu convergentă se numeşte mulţimea de convergenţă a seriei. Deci

$$A=\left\{x_0\in E;\ \sum_{n=1}^{\infty}u_n(x_0)\quad \text{este convergentă}\right\}.$$

Funcţia $s:A\to\mathbb{R}$ definită prin

$$s(x)=\lim_{n\to\infty}s_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x),\ \forall\ \ x\in A$$

se numeşte suma seriei şi se scrie

$$s=\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1+\ldots+u_n+\ldots$$

Teorema 2.1.5. (Cauchy). *Condiția necesară și suficientă ca seria de funcții* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *să fie uniform convergentă pe mulțimea E este ca pentru* $\forall\ \varepsilon>0$ *să* $\exists$ $n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ *astfel încât*

$$\left|u_{n+1}(x)+\ldots+u_{n+p}(x)\right|<\varepsilon,\ \forall\ n\ge n_\varepsilon,\ p\in\mathbb{N}^*\ \textit{și}\ \forall\ x\in E.$$

Demonstrație

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ este uniform convergentă pe E dacă şi numai dacă $\{s_n\}$ este uniform convergentă pe E, deci dacă şi numai dacă $\forall\ \varepsilon>0$, $\exists\ n_\varepsilon\in\mathbb{N}^*$ astfel încât

$$\left|s_{n+p}(x)-s_n(x)\right|=\left|u_{n+1}(x)+\ldots+u_{n+p}(x)\right|<\varepsilon,$$

$\forall\ n\ge n_\varepsilon$, $\forall\ p\in\mathbb{N}^*$ şi $\forall\ x\in E$ (Vezi Teorema 2.1.1).

Definiția 2.1.4. *Un șir de funcții* $\{f_n\}$ *definite pe mulțimea* $E \in \Upsilon$ *se numește* ***uniform mărginită*** *pe E dacă* $\exists\ M>0$ *astfel încât* $\left|f_n(x)\right|\le M$, $\forall\ x\in E$ *și* $\forall\ n\in\mathbb{N}^*$.

Teorema 2.1.6. (Abel-Dirichlet). *Fie* $\{a_n\}_{n\ge 1}$ *un șir de funcții pe E, monoton descrescător pentru orice* $x\in E$ *fixat și cu proprietatea* $a_n \xrightarrow[E]{u} 0$. *Fie* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ *o serie de funcții pe E cu proprietatea că șirul sumelor parțiale* $\{s_n\}$ *este uniform mărginit pe E. Atunci seria* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n v_n$ *este uniform convergentă pe E.*

Demonstrația rezultă din Teorema 2.1.5 şi practic coincide cu demonstrația Teoremei 1.6.1.

Exemplul 2. Să se studieze convergența uniformă a seriei

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+x},\ x\in(0,\infty).$$

Fie $a_n(x)=\dfrac{1}{n+x}$ şi $v_n(x)=(-1)^n$, $x\in(0,\infty)$.

Deoarece

$$0<\frac{1}{n+x}<\frac{1}{n},\ \forall\ x>0 \text{ şi } \frac{1}{n}\to 0, \text{ rezultă } a_n \xrightarrow[(0,\infty)]{u} 0.$$

Pe de altă parte este evident că $\{a_n(x)\}$ este descrescător pentru orice x fixat. Seria $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ este o serie numerică în acest caz şi are şirul sumelor parţiale mărginit $\left(|s_n|\le 1,\ \forall\ n\right)$. Din Teorema 2.1.6 rezultă că seria $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+x}$ este uniform convergentă pe $(0,\infty)$.

Există şi următoarea variantă a criteriului Abel-Dirichlet de convergenţă uniformă pentru serii.

Teorema 2.1.6'. *Fie* $\{a_n\}$ *un şir de funcţii pe E, monoton descrescător pentru orice x fixat şi uniform mărginit pe E. Dacă seria de funcţii* $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ *este uniform convergentă pe E, atunci seria* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n v_n$ *este uniform convergentă pe E.*

Demonstraţie

Dacă notăm cu $\sigma_k = v_{n+1}+\ldots+v_{n+k}$, atunci avem:

$$a_{n+1}v_{n+1}+\ldots+a_{n+p}v_{n+p}=a_{n+1}\sigma_1+a_{n+2}\left(\sigma_2-\sigma_1\right)+\ldots+a_{n+p}\left(\sigma_p-\sigma_{p-1}\right)=$$

$$=\left(a_{n+1}-a_{n+2}\right)\sigma_1+\left(a_{n+2}-a_{n+3}\right)\sigma_2+\ldots+\left(a_{n+p-1}-a_{n+p}\right)\sigma_{p-1}+a_{n+p}\sigma_p=$$

$$=\sum_{k=1}^{p-1}\left(a_{n+k}-a_{n+k+1}\right)\sigma_k+a_{n+p}\sigma_p .$$

Prin ipoteză $\exists\ M>0$ astfel încât $|a_k(x)|\le M$, $\forall\ x\in E$ şi $\forall\ k\in\mathbb{N}^*$.

Deoarece $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ este uniform convergentă pe *E*, din Teorema 2.1.5 rezultă că $\forall\ \varepsilon>0$, $\exists\ n_\varepsilon\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $|\sigma_k(x)|<\varepsilon$, pentru $\forall\ n\ge n_\varepsilon$ şi $\forall\ k$ natural. Fie $n\ge n_\varepsilon$ şi $p\in\mathbb{N}^*$ oarecare. Atunci

$$\left|a_{n+1}(x)v_{n+1}(x)+\ldots+a_{n+p}(x)v_{n+p}(x)\right|\le\left|\sum_{k=1}^{n}\left[a_{n+k}(x)-a_{n+k+1}(x)\right]\sigma_k\right|+$$

$$+\left|a_{n+p}(x)\sigma_p(x)\right| < \varepsilon\sum_{k=1}^{n}\left[a_{n+k}(x)-a_{n+k+1}(x)\right]+\varepsilon\left|a_{n+p}(x)\right| =$$

$$=\varepsilon\left[a_{n+1}(x)-a_{n+p}(x)\right]+\varepsilon\left|a_{n+p}(x)\right| \le 3\varepsilon M\ ,\ \forall\ x\in E.$$

Aplicând din nou Teorema 2.1.5 rezultă că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n v_n$ este uniform convergentă pe E.

Teorema 2.1.7. (Weierstrass). *Dacă există o serie numerică cu termeni pozitivi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ *convergentă şi un rang* $n_0\in\mathbb{N}^*$ *astfel încât* $\left|u_n(x)\right|\le c_n$, $\forall\ x\in E$ *şi* $\forall\ n\ge n_0$, *atunci seria de funcţii* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *este uniform convergentă pe E.*

Demonstraţie

Deoarece seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ este convergentă, rezultă că $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ n'_\varepsilon\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $c_{n+1}+\ldots+c_{n+p}<\varepsilon$, $\forall\ n\ge n'_\varepsilon$ şi $\forall\ p\in\mathbb{N}^*$. Fie $n_\varepsilon=\max\left(n_0,n'_\varepsilon\right)$, $n\ge n_\varepsilon$ şi $p\in\mathbb{N}^*$. Atunci avem

$$\left|u_{n+1}(x)+\ldots+u_{n+p}(x)\right|\le\left|u_{n+1}(x)\right|+\ldots+\left|u_{n+p}(x)\right|\le c_{n+1}+\ldots+c_{n+p}<\varepsilon\ ,$$

$\forall\ x\in E$. Afirmaţia rezultă acum din Teorema 2.1.3.

Exemplul 3. Seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{x^2+n^2}$ este uniform convergentă pe $\mathbb{R}$ deoarece avem:

$$\left|\frac{\sin nx}{x^2+n^2}\right|\le\frac{1}{x^2+n^2}\le\frac{1}{n^2}\ ,\ \forall\ x\in\mathbb{R},\ \forall\ n\in\mathbb{N}^*$$

iar seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ este convergentă.

Pentru un număr finit de funcţii sunt cunoscute proprietăţile: a) dacă funcţiile sunt continue, atunci şi suma lor este continuă; b) integrala sumei este suma integralelor; c) derivata sumei este suma derivatelor. Teoremele care urmează stabilesc în ce condiţii aceste proprietăţi se păstrează pentru o infinitate de funcţii.

Demonstraţiile lor decurg din rezultatele corespunzătoare pentru şirurile de funcţii (Teoremele 2.1.2; 2.1.3; 2.1.4) şi Definiţia 2.1.3.

Teorema 2.1.8. *Dacă seria* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *este uniform convergentă pe E, având suma s şi dacă funcţiile* u_n *sunt continue pe E, atunci şi funcţia s este continuă pe E.*

Teorema 2.1.9. *Dacă seria* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *este uniform convergentă pe intervalul* $[a,\, b]$*, având suma s şi dacă funcţiile* u_n *sunt continue pe E, atunci*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)\mathrm{d}x = \int_a^b s(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \left[\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x) \right] \mathrm{d}x .$$

Teorema 2.1.9 stabileşte că seriile uniform convergente pot fi integrate termen cu termen.

Teorema 2.1.10. *Dacă seria* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *este convergentă cel puţin într-un punct* $x_0 \in (a,b)$ *şi dacă funcţiile* u_n *sunt derivabile pe* (a,b)*, astfel încât seria derivatelor* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'$ *este uniform convergentă pe* (a,b)*, având suma t, atunci seria* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *este uniform convergentă pe* (a,b)*, suma sa s este derivabilă şi* $s'(x) = t(x)$, $\forall\, x \in (a,b)$.

Teorema 2.1.10 stabileşte condiţii suficiente ca o serie de funcţii să se poată deriva termen cu termen. Relaţia $s'(x) = t(x)$ se poate scrie mai sugestiv astfel:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x) .$$

Exemplu: Funcţia $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$, $x \in \Upsilon$ este derivabilă pe Υ.

Într-adevăr, seria de funcţii $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$ este uniform convergentă pe Υ, deoarece $\left| \frac{\sin nx}{n^3} \right| \le \frac{1}{n^3}$ (Teorema 2.1.7).

Seria derivatelor $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n'(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos nx}{n^2}$ este de asemenea uniform convergentă pe Υ, deoarece $\left|\dfrac{\cos nx}{n^2}\right| \le \dfrac{1}{n^2}$. Din Teorema 2.1.10 rezultă că f este derivabilă pe Υ şi $f'(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos nx}{n^2}$.

2.2. Formula Taylor

Formula Taylor este una din formulele de bază din analiza matematică, care are numeroase aplicații, legate în principal de aproximarea funcțiilor cu ajutorul polinoamelor.

Teorema 2.2.1. (Taylor). *Fie $I \subset \Upsilon$ un interval, $a \in I$ un punct interior şi $f : I \to \Upsilon$ o funcție de $n + 1$ ori derivabilă pe I. Fie $x \in I$ şi $p \in \square^{*}$. Atunci există ξ între a şi x astfel încât*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x), \quad (2.9)$$

unde

$$R_n(x) = \left(\frac{x-a}{x-\xi}\right)^p \frac{(x-\xi)^{n+1}}{n!\,p} f^{(n+1)}(\xi). \quad (2.10)$$

Formula (2.9) se numeşte formula Taylor de ordinul n în $x = a$, iar funcția R_n se numeşte restul formulei Taylor de ordinul n. Forma restului dată în (2.10) se numeşte formula Schömlich-Roche.

Demonstrație

Notăm cu T_n polinomul Taylor de rodinul n, care se defineşte astfel:

$$T_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n, \ \forall\ x \in I. \quad (2.11)$$

Cu R_n notăm diferența:

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x), \ \forall\ x \in I. \quad (2.12)$$

Din (2.12) rezultă

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x), \quad (2.13)$$

adică exact formula (2.9).

Prin urmare rămâne să arătăm că restul R_n are forma dată în (2.10).

Fie $x \in I$ oarecare fixat, $x > a$ şi fie

$$Q(x)=\frac{R_n(x)}{(x-a)^p}\,. \tag{2.14}$$

Cu această notaţie formula (2.13) devine

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+(x-a)^p\,Q(x)\,. \tag{2.15}$$

Pentru a determina funcţia Q considerăm următoarea funcţie auxiliară

$$\varphi(t)=f(t)+\frac{f'(t)}{1!}(x-t)+\ldots+\frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n+(x-t)^p\,Q(x)\,. \tag{2.16}$$

Observăm că funcţia φ este continuă pe $[a,x]$, derivabilă pe (a,x) şi $\varphi(a)=\varphi(x)=f(x)$. Din Teorema Rolle rezultă că $\exists\ \xi\in(a,x)$, astfel încât

$$\varphi'(\xi)=0. \tag{2.17}$$

Derivând (2.16) obţinem:

$$\varphi'(t)=f'(t)+\frac{f''(t)}{1!}(x-t)-\frac{f'(t)}{1!}+\ldots+\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n-\frac{f^{(n)}(t)}{n!}n(x-t)^{n-1}-$$

$$-p(x-t)^{p-1}Q(x)=\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n-p(x-t)^{p-1}Q(x)\,.$$

Ţinând seama de (2.17) rezultă:

$$Q(x)=\frac{(x-\xi)^n}{(x-\xi)^{p-1}}\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!\,p}\,. \tag{2.18}$$

În sfârşit, din (2.14) şi (2.18) obţinem:

$$R_n(x)=\left(\frac{x-a}{x-\xi}\right)^p\frac{(x-\xi)^{n+1}}{n!\,p}f^{(n+1)}(\xi)$$

şi cu aceasta teorema este demonstrată.

Observaţia 2.2.1. Dacă f este un polinom de gradul n, atunci restul $R_n(x)=0,\ \forall\ x\in I$ şi formula Taylor devine:

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n=$$

$$=c_0+c_1(x-a)+\ldots+c_n(x-a)^n\,.$$

Astfel, în cazul unui polinom, formula Taylor revine la reprezentarea acestuia ca polinom în puterile lui $x-a$.

Din forma generală (2.10) a restului Taylor dată de Schömlich-Roche, se obţin două forme particulare importante prin particularizarea lui p.

Pentru $p = 1$, expresia (2.10) devine:

$$R_n(x) = \frac{(x-a)(x-\xi)^n}{n!} f^{(n+1)}(\xi) \tag{2.19}$$

care se numeşte restul Taylor de ordinul n sub forma Cauchy.

Pentru $p = n + 1$, expresia (2.10) devine

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \tag{2.20}$$

care se numeşte restul Taylor de ordinul n sub forma Lagrange.

Deoarece ξ se află între a şi x, există $0 < \theta < 1$ astfel încât $\xi - a = \theta(x-a)$. Dacă notăm cu $h = x - a$, rezultă $x = a + h$, $\xi = a + \theta h$, $x - \xi = (1-\theta)h$ şi formula Taylor se scrie:

$$f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1!} f'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \ldots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a) + R_n(x), \tag{2.21}$$

unde restul are una din formulele

$$R_n(x) = \frac{h^{n+1}(1-\theta)^{n-p+1}}{n!\,p} f^{(n+1)}(a+\theta h) \text{ (Schömlich-Roche)} \tag{2.10'}$$

$$R_n(x) = \frac{h^{n+1}(1-\theta)^n}{n!} f^{(n+1)}(a+\theta h) \text{ (Cauchy)} \tag{2.19'}$$

$$R_n(x) = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a+\theta h) \text{ (Lagrange)} \tag{2.20'}$$

Deoarece formulele Cauchy (2.19) şi Lagrange (2.20) ale restului R_n corespund la valori diferite ale lui p şi deoarece θ depinde în general de p, rezultă că valorile lui θ în (2.19') şi (2.20') sunt în general diferite.

Dacă $a = 0 \in I$, formula (2.21) se numeşte formula Mac Laurin. Aşadar, formula Mac Laurin cu restul Cauchy este:

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}(1-\theta)^n}{n!} f^{(n+1)}(\theta x), \tag{2.22}$$

iar, formula Mac Laurin cu restul Lagrange este:

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x). \tag{2.23}$$

Definiţia 2.2.1. *O funcţie f definită pe o vecinătate a punctului* $x = a$ *se numeşte infinit mică în* $x = a$ *dacă* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$. *Fie f şi g două funcţii infinit mici*

în $x = a$ *. Spunem că f este infinit mică de ordin mai mare ca g şi notăm* $f = 0(g)$ *dacă* $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$.

Din formula (2.20) rezultă:

$$\lim_{x \to a} \frac{R_n(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x \to a} (x-a) f^{(n+1)}(\xi) = 0,$$

deci

$$R_n(x) = 0\left[(x-a)^n\right]. \tag{2.24}$$

Ultima egalitate se numeşte restul formulei Taylor în forma lui Peano.

În continuare vom scrie formula Mac Laurin pentru câteva funcţii uzuale:

1. Pentru funcţia $f(x) = e^x$, $x \in \Upsilon$, avem

$f^{(n)}(x) = e^x$ şi $f^{(n)}(0) = 1 \quad \forall \ n \in$ N, deci

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o\left(x^n\right).$$

2. Pentru funcţia $f(x) = \sin x$, $x \in \Upsilon$, avem:

$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\dfrac{\pi}{2}\right)$, deci

$$f^{(n)}(0) = \sin n\frac{\pi}{2} = \begin{cases} 0 & \text{dacă } n = 2k \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}} & \text{dacă } n = 4k+1 \text{ sau } 4k+3. \end{cases}$$

Aşadar avem:

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o\left(x^{2n+1}\right).$$

3. Pentru funcţia $f(x) = \cos x$, $x \in \Upsilon$ avem

$$f^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) \text{ şi } f^{(n)}(0) = \cos n\frac{\pi}{2} = \begin{cases} 0 & \text{dacă } n = 2k+1 \\ (-1)^k & \text{dacă } n = 4k. \end{cases}$$

Formula Mac Laurin este în acest caz:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o\left(x^{2n}\right).$$

4. Pentru funcţia $f(x) = \ln(1+x)$, $x \in (-1, \infty)$,

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(1+x)^n}, \ f(0) = 0, \ f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$$

Formula Mac Laurin va fi:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{4} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o\left(x^n\right).$$

5. Pentru funcția $f(x) = (1+x)^{\alpha}$ avem:

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n} \text{ şi}$$

$$f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1).$$

Formula Mac Laurin este

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o\left(x^n\right).$$

În cazul particular când $\alpha = n \in \mathbb{N}^*$, $R_n(x) = 0$ (pentru că $f^{(n+1)}(x) = 0$) şi formula Mac Laurin coincide în acest caz cu formula binomului lui Newton.

$$(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1!}x + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots 1}{n!}x^n =$$

$$= 1 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \ldots + C_n^n x^n.$$

Formula Taylor (Mac Laurin) este utilă în calculul unor limite de funcții.

Exemplu. Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^{-\frac{x^2}{2}} - \cos x}{x^3 \sin x}$. Aplicând formulele stabilite anterior obținem:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}} - \cos x}{x^3 \sin x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + o\left(x^4\right) - 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o\left(x^4\right)}{x^3 \sin x} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{24}\right)x^4 + o\left(x^4\right)}{x^4 + o\left(x^4\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{8} - \frac{1}{24} + \alpha(x)}{1 + \alpha(x)} = \frac{1}{8} - \frac{1}{24} = \frac{1}{12}.$$

(unde $\alpha(x) = \dfrac{o\left(x^4\right)}{x^4} \to 0$ când $x \to 0$).

În continuare vom prezenta două aplicații interesante ale formulei Taylor în studiul funcțiilor reale.

Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval deschis, $a \in I$ şi $f : I \to \mathbb{R}$. Se ştie că o condiție necesară ca punctul $x = a$ să fie punct de extrem pentru f este ca $f'(a) = 0$ (în ipoteza că f este derivabilă în $x = a$).

Următoarea teoremă stabileşte condiţii suficiente pentru existenţa punctelor de extrem.

Teorema 2.2.2. *Fie* $f: I \to \mathbb{R}$ *cu proprietatea că are derivate continue pe I până la ordinul n inclusiv şi a* $\in$ *I un punct interior astfel încât*:

$f'(a) = f''(a) = \ldots = f^{(n-1)}(a) = 0$, $f^{(n)}(a) \neq 0$.

Dacă *n* este par, atunci *x* = *a* este punct de extrem pentru f şi anume, de maxim dacă $f^{(n)}(a) < 0$, respectiv de minim dacă $f^{(n)}(a) > 0$.

Dacă *n* este impar *x* = *a* nu este punct de extrem.

Demonstraţie

Din formula Taylor cu restul lui Lagrange rezultă

$$f(x) = f(a) + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(\xi), \ \forall\ x \in I,$$

unde ξ se află între *a* şi *x*.

Să presupunem *n* par şi $f^{(n)}(a) < 0$. Deoarece $f^{(n)}$ este o funcţie continuă în *x* = *a*, rezultă că există un interval deschis *J* astfel încât $a \in J \subset I$ şi $f^{(n)}(t) < 0$, $\forall\ t \in J$, $x \in J$ avem:

$$f(x) - f(a) = \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(\xi) \leq 0,$$

de unde rezultă că

$$f(x) \leq f(a) \quad \forall\ x \in J,$$

deci *x* = *a* este punct de maxim local pentru *f*. Analog se arată că dacă $f^{(n)}(a) > 0$, atunci *x* = *a* este punct de minim local pentru *f*.

Dacă *n* este impar, atunci diferenţa $f(x) - f(a)$ nu păstrează semn constant pe nici o vecinătate a punctului *x* = *a*, deci *x* = *a* nu este punct de extrem local pentru *f*.

Corolarul 2.2.1. *Dacă* $f'(a) = 0$ *şi* $f''(a) \neq 0$, *atunci x = a este punct de minim dacă* $f''(a) > 0$, *respectiv punct de maxim dacă* $f''(a) < 0$.

Dacă $f'(a) = f''(a) = 0$ şi $f'''(a) \neq 0$, atunci *x* = *a* nu este punct de extrem pentru *f* (este punct de inflexiune).

Definiţia 2.2.2. *O funcţie* $f: I \to \mathbb{R}$ *se numeşte de clasă* C^p *pe I, dacă f are derivate continue pe I până la ordinul p inclusiv. Se foloseşte notaţia* $f = C^p(I)$.

Definiția 2.2.3. *O funcție* $f \in C^2(I)$ *se numeşte convexă* (*concavă*) *pe I, dacă* $\forall$ *a, x* $\in$ *I avem*

$$f(x) \geq f(a) + f'(a)(x-a)\left[f(x) \leq f(a) + f'(a)(x-a)\right]$$

Din punct de vedere geometric funcția este convexă (concavă) dacă graficul său este situat deasupra (dedesubtul) tangentei în orice punct al său.

Propoziția 2.2.1. *Dacă* $f \in C^2(I)$ *şi* $f''(x) > 0$ ($f''(x) < 0$) *pentru orice* $x \in I$, *atunci* f *este convexă* (*concavă*) *pe intervalul I.*

Demonstrație

Fie $a, x \in I$. Din formula Taylor pentru $n = 1$ rezultă:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x-a)^2,$$

unde ξ se află între a şi x.

Dacă $f'' > 0$ pe I rezultă

$$f(x) - \left[f(a) + f'(a)(x-a)\right] = \frac{f''(\xi)}{2}(x-a)^2 \geq 0, \ \forall \ x \in I,$$

deci f este convexă pe intervalul I. Analog, dacă $f'' < 0$ pe I rezultă

$$f(x) \leq f(a) + f'(a)(x-a), \ \forall \ x \in I,$$

deci f este concavă pe I.

2.3. Serii Taylor şi Mac Laurin

Definiția 2.3.1. *Fie* $f : I \to \mathbb{R}$ *o funcție indefinit derivabilă pe I şi* $a \in I$ *un punct interior. Seria de funcții*

$$f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(n)}{n!}(x-a)^n + \ldots \qquad (2.25)$$

se numeşte seria Taylor ataşată funcției f *în* $x = a$. *Dacă notăm cu A mulțimea de convergență a seriei* (2.25) (Vezi Definiția 2.1.3.) *atunci observăm că* $a \in A$, *deci* $A \neq \Phi$.

Spunem că funcția f se dezvoltă în serie Taylor în jurul punctului $x = a$ pe mulțimea $B \subset I \cap A$, dacă $\forall \ x \in B$ avem:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(n)}{n!}(x-a)^n + \ldots \qquad (2.26)$$

În cazul particular $a = 0 \in I$, seria (2.25) devine

$$f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \ldots$$

şi se numeşte seria Mac Laurin.

Observaţia 2.3.1. Fie $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie indefinit derivabilă pe I şi $a \in I$. În general nu este adevărat că funcţia f se poate dezvolta în serie Taylor în jurul punctului $x = a$ pe mulţimea $A \cap I$ aşa cum rezultă din următorul exemplu datorat lui Cauchy.

Exemplu. $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{dacă} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{dacă} \quad x = 0. \end{cases}$

Vom arăta că f este indefinit derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi $f^{(n)}(0) = 0$, $\forall \; n \in \mathbb{N}^*$.

Într-adevăr, dacă $x \neq 0$, atunci $f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}}$. Cum f este continuă în $x = 0$, avem:

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} f'(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{2}{x^3}}{e^{\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \to 0} \frac{-\frac{6}{x^4}}{-\frac{2}{x^3} e^{\frac{1}{x^2}}} =$$

$$= 3 \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x^2}}} = 3 \lim_{x \to 0} \frac{-\frac{1}{x^2}}{-\frac{2}{x^3} e^{\frac{1}{x^2}}} = \frac{3}{2} \lim_{x \to 0} \frac{x}{e^{\frac{1}{x^2}}} = 0 .$$

În general avem: $f^{(n)}(0) = \frac{P(x)}{x^m} e^{-\frac{1}{x^2}}$ dacă $x \neq 0$, unde P este polinom. Aplicând de un număr suficient de mare regula L'Hospital rezultă:

$$f^{(n)}(0) = \lim_{x \to 0} f^{(n)}(x) = P(0) \lim_{x \to 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^k} = P(0) \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{x^k}}{e^{\frac{1}{x^2}}} = 0 .$$

Seria Mac Laurin ataşată lui f este convergentă pe $\mathbb{R}$ şi are suma $s(x) = 0$, $\forall \; x \in \mathbb{R}$.

Rezultă că $f(x) \neq s(x)$, $\forall \; x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, deci f nu se dezvoltă în serie Mac Laurin pe nici o mulţime $B \subset \mathbb{R}$, $B \neq \{0\}$.

Teorema 2.3.1. *Condiția necesară și suficientă ca funcția f să se dezvolte în serie Taylor în jurul punctului x = a pe mulțimea $B \subset I \cap A$ este ca* $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, $\forall\ x \in B$.

Demonstrație

Observăm că polinomul Taylor de ordinul n atașat funcției f în punctul $x = a$ este exact suma parțială de ordinul n a seriei Taylor atașat lui f în $x = a$. Dacă notăm cu s suma seriei (2.26) atunci

$$s(x) = \lim_{n\to\infty} T_n(x),\ \forall\ x \in A. \tag{2.27}$$

Pe de altă parte, din formula Taylor avem:

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x),\ \forall\ x \in I. \tag{2.28}$$

Faptul că f se dezvoltă în serie Taylor pe mulțimea $B \subset A \cap I$ revine la a spune că $f(x) = s(x)$, $\forall\ x \in B$. Din (2.27) și (2.28) rezultă că $f(x) = s(x)$, $\forall\ x \in B$ dacă și numai dacă $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, $\forall\ x \in B$.

Corolarul 2.3.1. *Dacă există $M > 0$ astfel încât*

$$\left|f^{(n)}(x)\right| \le M,\ \forall\ n \in \mathbb{N}^* \text{ și } \forall\ x \in B \subset A \cap I,$$

atunci f se dezvoltă în serie Taylor în jurul punctului x = a pe mulțimea B.

Demonstrație

Pentru orice $x \in B$ fixat, avem:

$$\left|R_n(x)\right| = \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}\left|f^{(n+1)}(\xi)\right| \le M\,\frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} = u_n. \tag{2.29}$$

Observăm că $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, deoarece u_n este termenul general al unei serii cu termeni pozitivi convergente, așa cum rezultă imediat din criteriul raportului

$$\left(\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{|x-a|}{n+2} = 0 < 1\right).$$

Așadar, $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, $\forall\ x \in B$ și afirmația din Corolar rezultă acum din Teorema 2.3.1.

Exemple

1. Funcția $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$ se dezvoltă în serie Taylor pe $\mathbb{R}$ în jurul oricărui punct. Într-adevăr, pentru orice $r > 0$, avem:

$$\left|f^{(n)}(x)\right| = e^x \le e^r = M \ , \ \forall \ x \in [-r, r].$$

Din Corolarul 2.3.1 rezultă că funcţia $f(x) = e^x$ se dezvoltă în serie Taylor pe intervalul $[-r, r]$ în jurul oricărui punct $a \in (-r, r)$. Cum $r > 0$ a fost arbitrar, rezultă că dezvoltarea are loc pe $\mathbb{R}$. Dezvoltarea sa în serie Mac Laurin este:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

2. Funcţia $f(x) = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$ se dezvoltă în serie Taylor pe $\mathbb{R}$ în jurul oricărui punct.

Într-adevăr, $\left|f^{(n)}(x)\right| = \left|\sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)\right| \le 1 = M$, $\forall \ x \in \mathbb{R}$. Dezvoltarea în serie Mac Laurin este:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

3. Funcţia $f(x) = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$ se dezvoltă în serie Taylor pe $\mathbb{R}$ în jurul oricărui punct, deoarece

$$\left|f^{(n)}(x)\right| = \left|\cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)\right| \le 1, \ \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

4. Funcţia $f(x) = \ln(1+x)$, $x \in (-1, \infty)$ se dezvoltă în serie Taylor în serie Mac Laurin pe intervalul $(-1, 1]$.

Din Teorema 2.3.1 rezultă că trebuie să demonstrăm că $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, $\forall \ x \in (-1, 1]$. Prin inducţie se demonstrează uşor că

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(1+x)^n}, \ \forall \ x \in \mathbb{N}^*.$$

Pentru $x \in [0, 1]$ scriem restul Taylor sub forma Lagrange şi obţinem

$$|R_n(x)| = \left|\frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}\right| \le \frac{1}{n+1}, \ \forall \ x \in [0, 1]. \tag{2.30}$$

Rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ pentru $x \in [0, 1]$.

Pentru $x \in (-1, 0)$ folosim formula Cauchy a restului şi obţinem:

$$|R_n(x)| = \left|(-1)^n x^{n+1} \frac{(1-\theta)^n}{(1+\theta x)^{n+1}}\right| < \left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n \cdot \frac{|x|^{n+1}}{1+\theta x} \tag{2.31}$$

unde $\theta \in (-1,0)$ şi depinde în general de *n*.

Pentru a arăta că $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x)=0$, $\forall\ x\in(-1,0)$ este suficient să arătăm că $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x)=0$, $\forall\ x\in[-r,0)$ unde $0<x<1$ este arbitrar.

Fie deci $-1 < -r \le x < 0$. Cum $\theta\in(0,1)$ rezultă $-\theta<-\theta r\le\theta x$, deci $0<1-\theta<1-\theta r\le 1+\theta x$. În continuare avem:

$$0<\frac{1-\theta}{1+\theta x}<1 \tag{2.32}$$

$$\frac{1}{1-r}>\frac{1}{1-r\theta}\ge\frac{1}{1+\theta x}. \tag{2.33}$$

Ţinând seama de (2.32) şi (2.33) în (2.34) obţinem:

$$|R_n(x)|<\frac{r^{n+1}}{1-r},\ \forall\ \ x\in[-r,0).$$

Cum $\lim\limits_{n\to\infty} r^{n+1}=0$, rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x)=0$ pentru $\forall\ x\in(-1,0)$ şi cu aceasta demonstraţia este terminată.

Dezvoltarea în serie Mac Laurin este

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\ldots\quad\forall\ \ x\in(-1,1].$$

În particular, pentru $x = 1$ obţinem rezultatul cunoscut

$$\ln 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots$$

5. Funcţia $f(x)=(1+x)^{\alpha}$, $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{N}$, $x\in(-1,\infty)$ se dezvoltă în serie Mac Laurin pe intervalul $(-1,1)$.

Vom arăta că $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x)=0$, $\forall\ x\in(-1,1)$. Pentru restul Taylor vom folosi forma Cauchy.

Deoarece $f^{(n)}(x)=\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$, rezultă

$$R_n(x)=\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)x^{n+1}}{n!}\cdot\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^{n}\cdot(1+\theta x)^{\alpha-1}, \tag{2.34}$$

unde $\theta\in(0,1)$ şi depinde în general de *n*.

Dacă notăm cu $u_n=\left|\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)}{n!}x^{n+1}\right|$ şi presupunem $|x|<1$, atunci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ este convergentă, aşa cum rezultă imediat din criteriul raportului

$$\left(\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{|\alpha-n-1|}{n+1}|x|=|x|<1\right).$$

Aşadar avem

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0\,. \tag{2.35}$$

Pe de altă parte, dacă $|x|<1$ avem $0<1-\theta<1+\theta x$ de unde rezultă

$$0<\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n<1\,. \tag{2.36}$$

În sfârşit, observăm că pentru $-1 < x < 1$ avem

$$1-|x|\le 1-\theta|x|\le|1+\theta x|\le 1+\theta|x|\le 1+|x|,$$

de unde rezultă

$$\begin{cases}|1+\theta x|^{\alpha-1}\le\left(1+|x|\right)^{\alpha-1} & \text{dacă} \quad \alpha>1\\ |1+\theta x|^{\alpha-1}\le\left(1-|x|\right)^{\alpha-1} & \text{dacă} \quad \alpha<1\end{cases} \tag{2.37}$$

Trecând la modul în (10) obţinem:

$$|R_n(x)|=u_n\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n\left(1+\theta x\right)^{\alpha-1}<u_n\left(1+\theta x\right)^{\alpha-1}.$$

Din (2.35) şi (2.37) rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x)=0$, $\forall\ x\in(-1,1)$ şi cu aceasta demonstraţia este terminată.

În particular, pentru $\alpha=-\dfrac{1}{2}$ obţinem

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\frac{1}{2}x+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2\ldots+(-1)^n\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots(2n)}x^n+\ldots\quad\forall\ \ x\in(-1,1)\,.$$

2.4. Serii de puteri

O serie de puteri este o serie de funcţii de forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots\quad x\in \Upsilon, \tag{2.38}$$

$\{a_n\}$ este un şir de numere reale.

Dacă notăm cu A mulţimea de convergenţă a seriei (1), atunci se observă că $0 \in A$, deci $A \neq \Phi$.

Lema 2.4.1. *Dacă seria* (1) *este convergentă în* $x_0 \in \Upsilon$, *atunci ea este absolut convergentă în orice punct* $x \in \Upsilon$ *cu proprietatea* $|x| < |x_0|$.

Demonstrație

Deoarece seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ este convergentă, rezultă că şirul $\left\{a_n x_0^n\right\}$ este convergent şi are limita 0. Cum orice şir convergent este mărginit, rezultă că $\exists\ M > 0$ astfel încât $\left|a_n x_0^n\right| < M$, $\forall\ n \in \square^*$. Pe de altă parte avem

$$\left|a_n x^n\right| = \left|a_n x_0^n\right| \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^n < M \left|\frac{x}{x_0}\right|^n = v_n . \tag{239}$$

Dacă $|x| < |x_0|$, atunci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ este o serie geometrică convergentă (deoarece rația $q = \left|\frac{x}{x_0}\right| < 1$). Din criteriul I de comparație rezultă că seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ este convergentă şi cu aceasta lema este demonstrată.

Observația 2.4.1. Lema 2.4.1 pune în evidență o proprietate importantă a mulțimii de convergență a unei serii de puteri şi anume dacă $x_0 \in A$, atunci intervalul deschis $\left(-|x_0|, |x_0|\right) \subset A$.

Observația 2.4.2. Din Lema 2.4.1 rezultă că dacă $x_0 \notin A$ şi $|x| > |x_0|$, atunci $x \notin A$.

Teorema 2.4.1. (Teorema I a lui Abel). *Pentru orice serie de puteri există un număr* $0 \le \rho \le \infty$, *cu proprietățile*:

1) *Seria este absolut convergentă pentru orice* $x \in \Upsilon$, $|x| < \rho$.

2) *Seria este divergentă pentru orice* $x \in \Upsilon$, $|x| > \rho$.

3) *Seria este absolut uniform convergentă pe intervalul* $[-r, r]$, $\forall\ 0 < r < R$.

Numărul ρ se numeşte raza de convergență, iar intervalul $(-\rho, \rho)$ intervalul de convergență.

Demonstrație

Dacă mulțimea de convergență A se reduce la $\{0\}$, atunci $\rho = 0$ şi teorema este demonstrată.

Presupunem $A \neq \{0\}$.

Cazul 1. Dacă A este nemărginită superior, atunci $A = \Upsilon$ şi $\rho = +\infty$.

Într-adevăr, fie $x_1 \in \square$ oarecare. Dacă A este nemărginită, atunci există $x_0 \in A$ astfel încât $|x_0| > |x_1|$, deci seria este absolut convergentă în x_1, conform Lemei 2.4.1. Cum $x_1 \in \square$ era arbitrar, rezultă că seria este absolut convergentă pe Υ.

Cazul 2. Dacă A este mărginită superior, atunci $\rho = \sup A > 0$. Într-adevăr, din definiţia marginii superioare rezultă că dacă $|x| < \rho$, atunci $\exists\ x_0 \in A$ astfel încât $|x| < |x_0| < \rho$; conform Lemei 2.4.1 seria este absolut convergentă în x. Fie $x \in \Upsilon$, astfel încât $|x| > \rho$. Evident $|x| > y > \rho$. Dacă presupunem prin absurd că seria este convergentă în x, din Lema 2.4.1 rezultă $y \in A$, ceea ce contrazice definiţia $\rho = \sup A$.

În sfârşit, faptul că seria este uniform convergentă pe $[-r, r]$, $\forall\ 0 < r < \rho$, rezultă din Teorema 2.1.7 (Weierstrass), observând că pentru $\forall\ x \in [-r, r]$ avem $\left|a_n x^n\right| < \left|a_n r^n\right|$, iar seria numerică $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left|a_n r^n\right|$ este convergentă. Cu aceasta teorema este demonstrată.

Următoarea teoremă ne dă un procedeu practic de calcul al razei de convergenţă.

Teorema 2.4.2. (Cauchy-Hadamard). *Fie* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ *o serie de puteri,* ρ *raza sa de convergenţă şi* $\omega = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$. *Atunci*:

1) $\rho = \dfrac{1}{\omega}$ *dacă* $0 < \omega < \infty$.
2) $\rho = 0$ *dacă* $\omega = +\infty$.
3) $\rho = \infty$ *dacă* $\omega = 0$.

Demonstraţie

Aplicând criteriul rădăcinii (Teorema 1.5.6, Corolarul 1) seriei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left|a_n x^n\right|$ obţinem

$$L = \limsup \sqrt[n]{\left|a_n x^n\right|} = \omega |x|.$$

1) Fie $0 < \omega < \infty$.

Dacă $|x| < \dfrac{1}{\omega}$, atunci $L < 1$, deci seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left|a_n x^n\right|$ este convergentă.

Fie $|x| > \frac{1}{\omega}$. Evident există $|x| > y > \frac{1}{\omega}$. Dacă presupunem prin absurd că seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ este convergentă în punctul *x*, atunci din Lema 4.1 rezultă că ea este absolut convergentă în punctul *y*. Pe de altă parte, $\limsup \sqrt[n]{|a_n| y^n} = \omega y > 1$, de unde rezultă că $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| y^n$ este divergentă (Teorema 1.5.6, Corolarul 1). Am ajuns astfel la o contradicție. Deci $\rho = \frac{1}{\omega}$.

2) Fie $\omega = \infty$ şi $x_0 \neq 0$ oarecare. Vom arăta că seria $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ este divergentă. Într-adevăr, fie $0 < y < |x_0|$. Dacă presupunem prin absurd că $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ este convergentă, atunci din Lema 4.1 rezultă $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| y^n$ este convergentă. Pe de altă parte avem: $\limsup \sqrt[n]{|a_n| y^n} = \omega y > 1$, deci seria $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| y^n$ este divergentă (contradicție). Cum $x_0 \neq 0$ a fost arbitrar, rezultă $A = \{0\}$, deci $\rho = 0$.

3) Dacă $\omega = 0$, atunci $L = 0 \cdot |x| = 0 < 1$, deci seria $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ este convergentă. Rezultă $A = \Upsilon$, deci $\rho = +\infty$.

Observația 2.4.3. $\rho = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ dacă această limită există. Într-adevăr, dacă $\exists \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$, atunci există $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ (cu convențiile $\frac{1}{0} = \infty$ şi $\frac{1}{\infty} = 0$). Dar se ştie că dacă $\exists \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$, atunci $\exists \lim \sqrt[n]{|a_n|} = l$.

Exemple

1. Seria $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$ are raza de convergenţă ρ = 1. Într-adevăr, conform Observaţiei 2.4.3 avem:

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = 1 .$$

Din Teorema 2.4.1 rezultă că seria este absolut convergentă pe intervalul $(-1,1)$ şi divergentă pe mulţimea $(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$.

Pentru x = 1 seria devine $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ care este convergentă, conform criteriului Leibniz pentru serii alternate. Pentru x = –1, seria devine $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{n}\right)=$ $=(-1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ care este divergentă. Rezultă că mulţimea de convergenţă este $A=(-1,1]$.

2. Seria $\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$ are raza de convergenţă ρ = 0. Într-adevăr,

$$\rho = \lim\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0 .$$

Mulţimea sa de convergenţă este $A = \{0\}$.

3. Seria $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ are raza de convergenţă ρ = +∞. Avem

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}(n+1) = +\infty .$$

Mulţimea de convergenţă este $A = \Upsilon$.

4. Seria $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{2^n}$ are raza de convergenţă $\rho = \sqrt[3]{2}$. Într-adevăr,

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{dacă } n \neq 3k \\ 2^{-n} & \text{dacă } n = 3k. \end{cases}$$

Şirul $\left\{\sqrt[n]{a_n}\right\}$ se compune din subşirurile constante $\{0\}$ şi $\left\{\sqrt[3n]{2^{-n}}\right\}$, deci $\omega =$ $= \lim\sup \sqrt[n]{\left|a_n\right|} = \max\left\{0, \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right\} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$. Din Teorema 2.4.2 rezultă $\rho = \frac{1}{\omega} = \sqrt[3]{2}$.

Teorema 2.4.3. *Suma unei serii de puteri este o funcţie continuă pe intervalul de convergenţă al seriei.*

Demonstraţie

Fie $x \in (-\rho, \rho)$ oarecare fixat. Evident, există r astfel încât $|x| < r < \rho$. Deoarece seria este uniform convergentă pe intervalul $[-r, r]$ (Teorema 2.4.1 punctul 3) rezultă că suma sa s este continuă pe $[-r, r]$, deci şi în punctul x. (Am aplicat aici Teorema 2.1.8).

Teorema 2.4.4. *O serie de puteri* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *poate fi integrată termen cu termen pe intervalul de convergenţă al seriei. Seria de puteri care rezultă are aceeaşi rază de convergenţă cu seria iniţială.*

Demonstraţie

Fie $s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $\forall\ x \in (-\rho, \rho)$.

Fie $|x| < \rho$ şi r astfel încât $|x| < r < \rho$. Deoarece seria $s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ este uniform convergentă pe $[-r, r]$ din Teorema 2.1.9 rezultă

$$\int_0^x s(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^x t^n \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$

Pe de altă parte avem:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{a_n}{n+1}} = \frac{\overline{\lim} \sqrt[n]{a_n}}{\lim \sqrt[n]{n+1}} = \overline{\lim} \sqrt[n]{\left|a_n\right|},$$

de unde rezultă că seria are raza de convergenţă egală cu ρ.

Teorema 2.4.5. *O serie de puteri* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *poate fi derivată termen cu termen pe intervalul de convergenţă al seriei.*

Demonstraţie

Seria derivatelor este:

$a_1 + 2a_2x + \ldots + na_nx^{n-1} + \ldots$

$$\overline{\lim}\sqrt[n]{|na_n|} = \overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|} \cdot \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = \overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|},$$

rezultă că seria derivatelor are aceeaşi rază de convergenţă ca seria iniţială.

Fie $r \in (-\rho, \rho)$ oarecare şi $|x| < r < \rho$. Deoarece seria derivatelor este uniform convergentă pe $[-r, r]$, din Teorema 2.1.10

$$s'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} na_nx^{n-1} = a_1 + 2a_2x + \ldots + na_nx^{n-1} + \ldots$$

unde

$$s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n + \ldots$$

Observaţia 2.4.4. O serie de puteri poate fi derivată termen cu termen sau integrată termen cu termen, pe intervalul de convergenţă ori de câte ori dorim. De fiecare dată, seria obţinută are aceeaşi rază de convergenţă cu seria iniţială.

Teorema 2.4.6. (Teorema a II-a lui Abel). *Fie seria de puteri* $\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$*, având raza de convergenţă* $\rho < \infty$ *şi suma s. Dacă seria este convergentă în punctul* $x = \rho$*, atunci suma sa s este continuă pe intervalul* $(-\rho, \rho]$.

Demonstraţie

Din Teorema 2.4.3 rezultă continuitatea lui s pe $(-\rho, \rho)$. Rămâne să dovedim continuitatea în $x = \rho$. Observăm că:

$$a_nx^n = \left(a_n\rho^n\right) \cdot \left(\frac{x}{\rho}\right)^n.$$

Şirul de funcţii $\left(\frac{x}{\rho}\right)^n$ este uniform mărginit pe intervalul $[0, \rho]$ şi descrescător pentru orice x fixat. Cum seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n\rho^n$ este convergentă, din criteriul Abel-Dirichlet de convergenţă uniformă în varianta a II-a (Teorema 2.1.6') rezultă că seria $\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ este uniform convergentă pe $[0, \rho]$. Din Teorema 2.1.8 rezultă că funcţia s (suma seriei) este continuă pe $[0, \rho]$, deci şi în punctul $x = \rho$.

Exemplu. Să se afle mulțimea de convergență şi suma seriei $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^{2n-1}}{2n-1}$.

Avem $a_n=\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$, de unde rezultă $\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|=1$. Pentru $x = 1$, seria devine $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{2n-1}$ şi este convergentă (criteriul Leibniz). Pentru $x = -1$, seria devine $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2n-1}$ şi este divergentă.

Mulțimea de convergență este deci $A=(-1,1]$. Fie

$$s(x)=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots\quad \forall\ x\in A.$$

Din Teorema 2.4.5 rezultă

$$s'(x)=1-x^2+x^4-x^6+\ldots\quad \forall\ x\in(-1,1).$$

Seria din dreapta este o serie geometrică, cu rația $q=-x^2$. Rezultă

$$s'(x)=\frac{1}{1+x^2},\quad \forall\ x\in(-1,1).$$

Integrând ultima relație obținem:

$$s(x)=\operatorname{arctg}x+C,\quad \forall\ x\in(-1,1).$$

Deoarece $s(0) = 0$ rezultă $C = 0$, deci

$$\operatorname{arctg}x=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1},\ \forall\ x\in(-1,1).$$

Pe de altă parte, deoarece $\rho = 1 \in A$, din Teorema a II-a a lui Abel rezultă:

$$s(1)=\lim_{x\nearrow 1}s(x)=\lim_{x\nearrow 1}\operatorname{arctg}x=\operatorname{arctg}1=\frac{\pi}{4}.$$

Aşadar avem

$$\operatorname{arctg}x=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1},\ \forall\ x\in(-1,1).$$

În particular, pentru $x = 1$ obținem:

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots$$

3. Spații metrice. Spații normate. Spații Hilbert

Spațiile metrice au fost introduse la începutul secolului XX de matematicianul francez M. Fréchet şi constituie cadrul natural de prezentare a principiului contracției, care stă la baza demonstrării unor teoreme fundamentale din matematică, cum ar fi: teorema funcțiilor implicite, teorema de existență şi unicitate pentru ecuații şi sisteme de ecuații diferențiale (integrale) etc. De asemenea, spațiile metrice oferă un cadru suficient de general, relativ simplu, pentru studiul limitelor de funcții (şiruri) şi a continuității funcțiilor.

3.1. Spații metrice. Principiul contracției

Definiția 3.1.1. *O mulțime nevidă X se numeşte spațiu metric dacă există o funcție* $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ *cu proprietățile*:

a) $d(x,y) \geq 0$, $\forall\, x, y \in X$ *şi* $d(x,y) = 0$ *dacă şi numai dacă* $x = y$.

b) $d(x,y) = d(y,x)$, $\forall\, x, y \in X$.

c) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$, $\forall\, x, y \in X$.

Funcția d se numeşte funcția-distanță sau metrica spațiului. Evident, dacă (X,d) este un spațiu metric şi $Y \subset X$, atunci (Y,d) este de asemenea spațiu metric.

Propoziția 3.1.1. *Dacă* (X,d) *este spațiu metric, atunci*:

$$\left|d(x_1,x_2) - d(x_3,x_4)\right| \leq d(x_1,x_3) + d(x_2,x_4),\ \ \forall\ \ x_i \in X,\ i = \overline{1,4}\,.$$

Demonstrație

Din proprietatea *c*) a distanței rezultă

$$d(x_1,x_2) \leq d(x_1,x_3) + d(x_3,x_4) + d(x_4,x_2)$$

$$d(x_3,x_4) \leq d(x_3,x_1) + d(x_1,x_2) + d(x_2,x_4)\,.$$

Ținând seama şi de proprietatea *b*) obținem:

$$d(x_1,x_2)-d(x_3,x_4)\le d(x_1,x_3)+d(x_2,x_4) \tag{3.1}$$

$$d(x_1,x_2)-d(x_3,x_4)\ge -\left[d(x_1,x_3)+d(x_2,x_4)\right] \tag{3.2}$$

Din (3.1) şi (3.2) rezultă:

$$\left|d(x_1,x_2)-d(x_3,x_4)\right|\le d(x_1,x_3)+d(x_2,x_4).$$

Exemple de spaţii metrice

1. Mulţimea Υ a numerelor reale este spaţiu metric în raport cu distanţa euclidiană.

$$d(x,y)=|x-y|,\ \forall\, x,y\in \Upsilon.$$

Facem observaţia că pe Υ se pot introduce şi alte distanţe, de exemplu:

$$d(x,y)=\sqrt{|x-y|}\quad \text{sau}\quad d(x,y)=\frac{|x-y|}{1+|x-y|}.$$

2. Mulţimea $\mathbb{R}^n=\left\{x=(x_1,x_2,\dots,x_n);\ x_i\in\mathbb{R},\ i=\overline{1,n}\right\}$ este un spaţiu metric în raport cu distanţa definită de

$$d(x,y)=\max_{1\le i\le n}|x_i-y_i|,\ \text{unde}\ \ x=(x_1,\dots,x_n)\ \text{şi}\ \ y=(y_1,\dots,y_n)$$

sunt elemente oarecare din $\mathbb{R}^n$. Verificarea proprietăţilor *a*)-*c*) este imediată.

3. Mulţimea numerelor complexe:

$$\mathbb{C}=\{z=x+i\,y;\ x,y\in\mathbb{R}\}$$

este un spaţiu metric în raport cu distanţa

$$d(z_1,z_2)=|z_1-z_2|,\ \ \forall\ \ z_1,z_2\in\mathbb{C}$$

(reamintim că dacă $z=x+iy$, atunci $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$).

4. Fie E o mulţime oarecare şi fie $B(E)$ mulţimea funcţiilor reale şi mărginite pe E, adică mulţimea funcţiilor $f:E\to\mathbb{R}$ cu proprietatea că există $M_f>0$ astfel încât $|f(x)|\le M_f$, $\forall\ x\in E$.

Mulţimea $B(E)$ este spaţiu metric în raport cu distanţa:

$$d(f,g)=\sup\{|f(x)-g(x)|\ ;\ x\in E\},\ \forall\ \ f,g\in B(E) \tag{3.3}$$

Existenţa membrului drept din relaţia (3.1) rezultă din Teorema 1.1.1. Verificarea proprietăţilor a)-c) este imediată.

5. Orice mulţime X este spaţiu metric în raport cu distanţa trivială:

$$d(x,y)=\begin{cases}1 & \text{dacă}\ \ x\ne y\\ 0 & \text{dacă}\ \ x\ne y.\end{cases}$$

Un astfel de spaţiu metric nu prezintă interes decât din punct de vedere teoretic.

Definiţia 3.1.2. *Fie* (X,d) *un spaţiu metric. Spunem că un şir de elemente* $\{x_n\}$ *din* $\mathbb{R}^n$ *converge la* $x\in\mathbb{R}^n$*, dacă şirul de numere reale* $\{d(x_n,x)\}$

converge la 0*, deci dacă* $\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ *astfel încât* $d(x_n, x) < \varepsilon,\ \forall\ n \geq n_\varepsilon$. *Vom folosi notaţia* $x_n \to x$ *sau* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

Exemple

1. Dacă $X = \mathbb{R}$ şi $d(x,y) = |x-y|$, atunci $\{x_n\}$ converge la x dacă

$$\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ n_\varepsilon \in \mathbb{N}^* \text{ astfel încât } |x_n - x| < \varepsilon,\ \forall\ n \geq n_\varepsilon.$$

Regăsim astfel definiţia cunoscută a şirului de numere reale convergent.

2. Fie $X = \mathbb{R}^n$, şi fie $\{x_k\}$ un şir de elemente (vectori) din $\mathbb{R}^n$. Fiecare element x_k va fi de forma $x_k = (x_{k1}, x_{k2}, \ldots, x_{kn})$, $x_{ki} \in \mathbb{R}$, $\forall\ i = \overline{1,n}$. Dacă $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, atunci $x_k \xrightarrow{\mathbb{R}^n} x$ dacă $\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $d(x_k, x) < \varepsilon,\ \forall\ n \geq n_\varepsilon$. Ţinând seama de definiţia distanţei $\mathbb{R}^n$ aceasta revine la:

$$|x_{ki} - x_i| < \varepsilon,\ \forall\ k \geq n_\varepsilon,\ \forall\ i = \overline{1,n}.$$

Am obţinut astfel următorul rezultat:

Teorema 3.1.1. *Şirul de elemente* $\{x_k\}$ *converge în* $\mathbb{R}^n$ *la elementul x, dacă şi numai dacă* x_{ki} *converge în* $\mathbb{R}$ *la* x_i, $\forall\ i = \overline{1,n}$.

În concluzie, convergenţa unui şir de elemente (vectori) din $\mathbb{R}^n$, revine la convergenţa pe componente.

De exemplu, şirul $\left\{\dfrac{n+1}{n}, \dfrac{1}{n}\right\} \to (1,0)$ în $\mathbb{R}^2$.

3. Fie $X = \mathbb{C}$ şi $d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$, $\forall\ z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

Teorema 3.1.2. *Un şir de numere complexe* $\{z_n\}$*, unde pentru* $\forall\ n$, $z_n = x_n + iy_n$*, converge în* $\mathbb{C}$ *la* $z = x + iy$*, dacă şi numai dacă* $x_n \to x$ *şi* $y_n \to y$ *în* $\mathbb{R}$.

Demonstraţie

$z_n \to z$ în $\mathbb{C}$ dacă şi numai dacă

$$\lim_{n\to\infty} d(z_n, z) = \lim_{n\to\infty} \sqrt{(x_n - x)^2 + (y_n - y)^2} = 0.$$

Din inegalităţile evidente:

$$\max\{|x_n - x|, |y_n - y|\} \leq \sqrt{(x_n - x)^2 + (y_n - y)^2} \leq |x_n - x| + |y_n - y|$$

rezultă că $z_n \to z$ în $\mathbb{C}$ dacă şi numai dacă $x_n \to x$ şi $y_n \to y$ în $\mathbb{R}$.

4. Fie $X = B(E)$ mulţimea funcţiilor reale şi mărginite pe E. Un şir de funcţii $\{f_n\}$ converge la f în $B(E)$ dacă $\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ astfel încât:

$$d\left(f_n, f\right) = \sup_{x \in E}\left\{\left|f_n(x) - f(x)\right|\right\} < \varepsilon, \ \forall \ \ n \geq n_\varepsilon .$$

Această definiție este evident echivalentă cu următoarea: $\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ \ n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\left|f_n(x) - f(x)\right| < \varepsilon, \ \forall \ \ n \geq n_\varepsilon$ și $\forall \ \ x \in E$. Sub această formă recunoaștem definiția șirului uniform convergent (Definiția 2.1.2). Facem observația că în Definiția 3.1.2, faptul că $E \subset \Upsilon$ este lipsit de importanță, deci definiția șirului de funcții uniform convergent are sens pe o mulțime E oarecare.

Din cele de mai sus rezultă:

Teorema 3.1.3. *Un șir de funcții* $\left\{f_n\right\}$ *converge la* f *în* $B\left(E\right)$ *dacă și numai dacă* $f_n \xrightarrow[E]{u} f$.

Definiția 3.1.3. *Un șir de elemente* $\left\{x_n\right\}$ *dintr-un spațiu metric X se numește fundamental* (*Cauchy*) *dacă* $\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ \ n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ *astfel încât* $d\left(x_n, x_m\right) < \varepsilon$*,* $\forall\ \ n, m \geq n_\varepsilon$.

Dacă $X = \Upsilon$ și $d\left(x, y\right) = \left|x - y\right|$, reobținem definiția șirului fundamental de numere reale.

Definiția 3.1.4. *Un șir* $\left\{x_n\right\}$ *se numește mărginit dacă* $\exists \ \ a \in X$ *și* $r > 0$ *astfel încât* $d\left(x_n, a\right) < r$*,* $\forall \ \ n \in$ N. *Principalele proprietăți ale șirurilor de elemente dintr-un spațiu metric sunt concentrate în următoarea teoremă*:

Teorema 3.1.4. *Fie* $\left(X, d\right)$ *un spațiu metric.*

i) *Dacă* $x_n \to x$ *și* $y_n \to y$ *atunci* $\lim\limits_{n\to\infty} d\left(x_n, y_n\right) = d\left(x, y\right)$.

ii) *Orice șir convergent are linită unică.*

iii) *Orice șir convergent este fundamental.*

iv) *Orice șir fundamental este mărginit.*

v) *Orice subșir al unui șir convergent este convergent și are limita egală cu limita șirului inițial.*

Demonstrație

i) Din Propoziția 3.1.1 avem:

$$\left|d\left(x_n, y_n\right) - d\left(x, y\right)\right| \leq d\left(x_n, x\right) + d\left(y_n, y\right).$$

Cum $\lim\limits_{n\to\infty} d\left(x_n, x\right) = \lim\limits_{n\to\infty} d\left(y_n, y\right) = 0$, rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} d\left(x_n, y_n\right) = d\left(x, y\right)$.

ii) Presupunem că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ și de asemenea $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = y$. Din *i*) rezultă

$$d\left(x, y\right) = \lim_{n\to\infty} d\left(x_n, x_n\right) = 0, \text{ deci } x = y .$$

iii) Dacă $x_n \to x$, atunci $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $d(x_n, x) < \dfrac{\varepsilon}{2}$, $\forall\ n \geq n_\varepsilon$. Pentru $\forall\ m \geq n_\varepsilon$ avem de asemenea, $d(x_m, x) < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Din proprietatea c) a distanţei rezultă:

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \ \forall\ n, m \geq n_\varepsilon$$

deci $\{x_n\}$ este fundamental.

iv) Fie $\{x_n\}$ un şir fundamental şi $\varepsilon = 1$. Atunci, $\exists\ n_1 \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $d(x_n, x_m) < 1$, $\forall\ n, m \geq n_1$. În particular, $d\left(x_{n_1}, x_m\right) < 1$, $m \geq n_1$. Fie

$$\alpha = \max\left\{d\left(x_{n_1}, x_m\right);\ m = 1, 2, \ldots, n_1 - 1\right\}$$

şi fie $r = \max\{1, \alpha\}$. Evident, $d\left(x_{n_1}, x_m\right) < r$, $\forall\ m \in \mathbb{N}^*$, deci $\{x_n\}$ este mărginit.

v) Fie $x_n \to x$. Orice subşir al şirului $\{x_n\}$ este la rândul său un şir de forma $\left\{x_{k_n}\right\}$, unde $k_1 < k_2 < \ldots < k_n < \ldots$ este un şir strict crescător de numere naturale.

Pentru $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $d(x_n, x) < \varepsilon$, $\forall\ n \geq n_\varepsilon$. Deoarece $k_n \geq n$, rezultă $d\left(x_{k_n}, x\right) < \varepsilon$, $\forall\ n \geq n_\varepsilon$, deci $x_{k_n} \to x$.

Am văzut că orice şir convergent este fundamental. Afirmaţia reciprocă nu este în general adevărată. Există spaţii metrice care conţin şiruri fundamentale divergente.

Exemplu. Fie $X = \mathbb{Q}$ şi $d(x, y) = |x - y|$, $\forall\ x, y \in \mathbb{Q}$. Considerăm şirul $x_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$. Acest şir este fundamental în $\mathbb{Q}$, deoarece este fundamental în $\mathbb{R}$, dar nu este convergent în $\mathbb{Q}$ deoarece $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = e \notin \mathbb{Q}$.

Definiţia 3.1.5. *Un spaţiu metric* (X, d) *se numeşte complet, dacă orice şir fundamental de elemente din X este convergent către un element din X. Din criteriul general de convergenţă al lui Cauchy pentru şiruri de numere reale rezultă că* $\mathbb{R}$ *este spaţiu metric complet în raport cu distanţa euclidiană* $d(x, y) = |x - y|$, $\forall\ x, y \in \mathbb{R}$.

Teorema 3.1.5. *Spaţiul* $\mathbb{R}^n$ *este complet.*

Demonstraţie

Fie $\{x_k\}$ un şir de elemente din $\mathbb{R}^n$. Fiecare element x_k este de forma:

$$x_k = \left(x_{k1}, x_{k2}, \ldots, x_{kn}\right).$$

Din inegalitățile evidente:

$$\left|x_{ki} - x_{li}\right| \le \max_{1 \le i \le n} \left|x_{ki} - x_{li}\right| = d\left(x_k, x_l\right) \le \sum_{i=1}^{n} \left|x_{ki} - x_{li}\right|,$$

rezultă (ca în demonstrația Teoremei 3.1.1) că $\{x_k\}$ este fundamental în $\mathbb{R}^n$ dacă şi numai dacă $\{x_{ki}\}$ este fundamental în $\mathbb{R}$, $\forall \ i = \overline{1,n}$. Afirmația din teoremă rezultă acum din Criteriul general de convergență al lui Cauchy pentru şiruri de numere reale şi din Teorema 3.1.1. Într-adevăr, dacă $\{x_k\}$ este fundamental în $\mathbb{R}^n$, atunci $\{x_{ki}\}$ este fundamental în $\mathbb{R}$, deci convergent pentru $\forall \ i = \overline{1,n}$. Din Teorema 3.1.1. rezultă $\{x_k\}$ convergent în $\mathbb{R}^n$.

Teorema 3.1.6. *Spațiul numerelor complexe $\mathbb{C}$ este complet.*

Demonstrație

Dacă $z_n = x_n + iy_n$, atunci conform Teoremei 3.1.2, $z_n \to z = x + iy$ dacă şi numai dacă $x_n \to x$ şi $y_n \to y$ în $\mathbb{R}$. În mod analog se arată că $\{z_n\}$ este fundamental dacă şi numai dacă $\{x_n\}$ şi $\{y_n\}$ sunt fundamentale în $\mathbb{R}$. Afirmația rezultă acum (ca în Teorema 3.1.5) din criteriul general de convergență al lui Cauchy pentru şiruri de numere reale.

Teorema 3.1.7. *Spațiul $B(E)$ al funcțiilor reale şi mărginite pe E este complet.*

Demonstrație

Din Teorema 3.1.3 rezultă că $\{f_n\}$ converge la *f* în $B(E)$ dacă şi numai dacă $f_n \xrightarrow[E]{u} f$. Afirmația din teoremă rezultă acum din Teorema 2.1.1, cu observația că în demonstrația Teoremei 3.1.1 nu a intervenit nicăieri faptul că $E \subset \mathbb{R}$.

Definiția 3.1.6. *Fie (X, d) un spațiu metric. Se numeşte contracție pe X, orice aplicație $T : X \to X$ cu proprietatea că există $0 \le \alpha < 1$ astfel încât*

$$d\left(T(x), T(y)\right) \le \alpha d\left(x, y\right), \ \forall \ x, y \in X.$$

Teorema 3.1.8. (**Banach**). *Dacă (X, d) este un spațiu metric complet şi $T : X \to X$ este o contracție, atunci există $z \in X$, unic, astfel încât $T(z) = z$.*

Demonstrație

Alegem un punct oarecare $x_0 \in X$ şi notăm cu

$$x_1 = T(x_0),\; x_2 = T(x_1), \ldots, x_n = T(x_{n-1}), \ldots$$

Vom arăta că şirul $\{x_n\}$ este fundamental. Într-adevăr,

$$d(x_1, x_2) = d(T(x_0), T(x_1)) \le \alpha d(x_0, x_1)$$

$$d(x_2, x_3) = d(T(x_1), T(x_2)) \le \alpha d(x_1, x_2) \le \alpha^2 d(x_0, x_1).$$

Prin inducție completă se arată că:

$$d(x_k, x_{k+1}) \le \alpha^k d(x_0, x_1),\; \forall\; k \in \mathbb{N}^*$$

În continuare avem

$$d(x_k, x_{k+p}) \le d(x_k, x_{k+1}) + d(x_{k+1}, x_{k+2}) + \ldots + d(x_{k+p-1}, x_{k+p}) \le$$

$$\le \left(\alpha^k + \alpha^{k+1} + \ldots + \alpha^{k+p-1}\right) d(x_0, x_1) = \frac{\alpha^k - \alpha^{k+p}}{1-\alpha} d(x_0, x_1) <$$

$$< \frac{\alpha^k}{1-\alpha} d(x_0, x_1),\; \forall\; k, p \in \mathbb{N}^* \tag{3.4}$$

Deoarece $0 \le \alpha < 1$, avem $\alpha^k \to 0$, deci $\forall\; \varepsilon > 0$, $\exists\; k_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $\alpha^k < \dfrac{(1-\alpha)\varepsilon}{d(x_0, x_1)}$, $\forall\; k \ge k_\varepsilon$. Rezultă $d(x_k, x_{k+p}) < \varepsilon$, $\forall\; k \ge k_\varepsilon$ şi $\forall\; p \in \mathbb{N}^*$, deci $\{x_k\}$ este şir fundamental. Cum X este complet rezultă că $\exists\; z \in X$ astfel încât $x_k \to z$. Mai departe avem:

$$d(z, T(z)) \le d(z, x_k) + d(x_k, T(z)) = d(z, x_k) + d(T(x_{k-1}), T(z)) \le$$

$$\le d(z, x_k) + \alpha d(x_{k-1}, z).$$

Deoarece, conform Teoremei 3.1.4 punctul *i*), membrul drept tinde la 0, rezultă $d(z, T(z)) = 0$, deci $T(z) = z$. Pentru a demonstra unicitatea punctului fix z, să presupunem că $\exists\; z' \in X$ astfel încât $T(z') = z'$. Atunci avem:

$$d(z, z') = d(T(z), T(z')) \le \alpha d(z, z').$$

Cum $0 \le \alpha < 1$, această inegalitate nu poate avea loc decât dacă $d(z, z') = 0$, adică dacă $z = z'$ şi cu aceasta teorema este demonstrată.

Şirul $\{x_k\}$, obținut pornind de la un punct arbitrar $x_0 \in X$, prin relația de recurență $x_k = T(x_{k-1})$, $\forall\; k \in \mathbb{N}^*$, se numeşte şirul aproximațiilor succesive, iar metoda de obținere a punctului fix z ca limita acestui şir, poartă numele de metoda aproximațiilor succesive. E. Picard a utilizat metoda aproximațiilor succesive cu mult înainte ca Banach să fi stabilit rezultatul său foarte general (Teorema 3.1.8). Din această cauză, această metodă se mai numeşte şi metoda Picard-Banach.

Pentru a evalua eroarea în metoda aproximațiilor succesive, trecem la limită după p în inegalitatea (3.4) şi obținem:

$$d\left(x_k, x\right) \le \frac{\alpha^k}{1-\alpha} d\left(x_0, x_1\right) \tag{3.5}$$

Aşadar, dacă aproximăm pe z cu x_k facem o eroare care este mai mică decât $\frac{\alpha^k}{1-\alpha} d\left(x_0, x_1\right)$.

Teorema 3.1.8 are numeroase aplicații în matematică. Pentru exemplificare, vom arăta cum poate fi folosită metoda aproximațiilor succesive la rezolvarea ecuațiilor algebrice sau transcendente.

Fie ecuația

$$F(x) = 0, \quad x \in [a,b] \tag{3.6}$$

Această ecuație se înlocuieşte cu ecuația echivalentă:

$$x = f(x); \quad x \in [a,b] \tag{3.7}$$

Acest lucru se poate realiza de exemplu, dacă notăm $f(x) = x + F(x)$. Să presupunem că $f : [a,b] \to [a,b]$ este derivabilă şi există $0 \le \alpha < 1$ astfel încât

$$|f'(x)| \le \alpha, \quad \forall \ x \in [a,b]. \tag{3.8}$$

Din Teorema Lagrange rezultă că $\forall \ x, y \in [a,b]$, $\exists\ \xi$ între x şi y astfel încât $f(x) - f(y) = f'(\xi)(x-y)$. Ținând seama de (3.8) obținem:

$$|f(x) - f(y)| \le \alpha |x-y|, \ \forall \ x, y \in [a,b]. \tag{3.9}$$

Din (3.9) rezultă că f este o contracție pe $[a,b]$, iar din Teorema 3.1.8 rezultă că există o soluție unică z a ecuației 3.7) care se poate obține cu metoda aproximațiilor succesive. Din punct de vedere geometric, orice soluție a ecuației (3.7) este abscisa unui punct de intersecție dintre dreapta $y = x$ şi graficul funcției $y = f(x)$.

Pe figura (1) se poate urmări şirul aproximațiilor succesive pentru $0 < f'(x) \le \alpha < 1$, iar pe figura (2), pentru $-1 < -\alpha \le f'(x) < 0$.

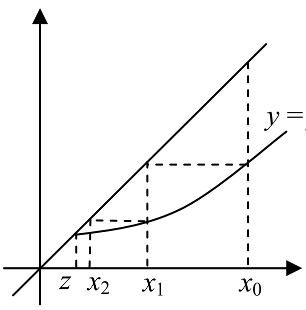


Fig. 1

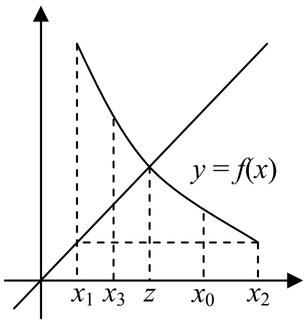


Fig. 2

Exemplu. Fie ecuația $x^5 - x - 0,2 = 0$, care admite o rădăcină în intervalul $[-0,3;-0,2]$. Ecuația echivalentă este $x = x^5 - 0,2$, deci $f(x) = x^5 - 0,2$. Se verifică imediat că $|f'(x)| < 0,05$, $\forall\ x \in [-0,3;-0,2]$, deci putem lua α = 0,05. Drept primă aproximație se poate lua $x_0 = -0,2$.

Aflarea unei soluții aproximative se face cu ajutorul calculatorului.

3.2. Spații normate

În definiția spațiului metric nu s-a presupus că mulțimea *X* are vreo structură algebrică. Din această cauză, într-un spațiu metric oarecare nu se poate dezvolta o teorie a seriilor, deoarece nu are sens operația de adunare. Pentru a elimina această deficiență vom introduce noțiunea de spațiu normat, în care se presupune că mulțimea *X* este un spațiu vectorial.

Definiția 3.2.1. *Fie X un spațiu vectorial peste corpul* K ($\mathbb{R}$ *sau* C). *Se numește normă pe X orice aplicație* $\|\ \| : X \to \mathbb{R}$ *cu proprietățile.*

(*i*) $\|x\| \geq 0$, $\forall\ x \in X$ *și* $\|x\| = 0$ *dacă și numai dacă* $x = 0_X$.

(*ii*) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ $\forall\ \lambda \in$ K, $\forall\ x \in X$.

(*iii*) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $\forall\ x \in X$, $\forall\ y \in X$.

Perechea $(X, \|\ \|)$ *se numește spațiu normat.*

Exemple:

1. Mulțimea $\mathbb{R}$ este spațiu normat în raport cu norma: $\|x\| = |x|$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$.

2. Mulțimea $\mathbb{R}^n$ este spațiu normat în raport cu norma $\|x\|_\infty =$ $= \max\{|x_i|; 1 \leq i \leq n\}$, unde $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ este un vector oarecare.

3. Mulțimea numerelor complexe $\mathbb{C}$ este spațiu normat în raport cu norma

$$\|z\| = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}\ ,\ \forall\ \ z = x + iy \in \mathbb{C}\ .$$

4. Mulțimea *B*(*E*) a funcțiilor reale și mărginite pe *E* este spațiu normat în raport cu norma

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)|; x \in E\}$$

Observația 3.2.1. Orice spațiu normat este spațiu metric în raport cu distanța

$$d(x,y) = \|x - y\|,\ \forall\ x \in X,\ \forall\ y \in X.$$

Afirmația reciprocă nu este în general adevărată. Există spații metrice care nu sunt spații normate.

Exemplu. Fie A o mulțime oarecare și fie $X = \{f : A \to [0,1]\}$. Evident X este spațiu metric în raport cu distanța:

$$d(f,g) = \sup\{|f(x) - g(x)|; x \in E\}.$$

Observăm însă că X nu este spațiu normat deoarece nu este spațiu vectorial. Într-adevăr, dacă $f, g \in X$ și $\alpha, \beta \in$ Υ, atunci $\alpha f + \beta g$ în general nu aparține lui X.

Cum spațiile normate sunt cazuri particulare de spații metrice, rezultă că definițiile și rezultatele privind șirurile în spațiile metrice rămân valabile și în spațiile normate. Astfel, dacă X este un spațiu normat, atunci un șir $\{x_n\}$ de elemente din X converge la elementul $x \in X$, dacă și numai dacă

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = \lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0.$$

Definiția 3.2.2. *Orice spațiu normat și complet se numește spațiu Banach.*

Așa cum s-a arătat în §1, spațiile □^{n}, ≤ și $B(E)$ sunt complete, deci sunt spații Banach.

3.3. Spații Hilbert

Spațiul Hilbert este un caz particular de spațiu Banach, în care norma provine dintr-un produs scalar.

Definiția 3.3.1. *Fie E un spațiu vectorial peste corpul* K. *Se numește produs scalar o aplicație* $(x,y) \to \langle x,y\rangle : E \times E \to$ □ *cu proprietățile:*

(*i*) $\langle y,x\rangle = \langle x,y\rangle$, $\forall$ *x, y* $\in$ *E dacă* K = Υ *și*

$\langle y,x\rangle = \overline{\langle x,y\rangle}$, $\forall$ *x, y* $\in$ *E dacă* K = ≤.

(*ii*) $\langle \lambda x + \mu y, z\rangle = \lambda\langle x,z\rangle + \mu\langle y,z\rangle$, $\forall$ *x, y, z* $\in$ *E și* $\forall$ $\lambda, \mu \in$ K.

(*iii*) $\langle x,x\rangle \geq 0$, $\forall$ $x \in X$ *și* $\langle x,x\rangle = 0$ *dacă și numai dacă* $x = 0_E$.

Perechea (E, <, >) se numește spațiu prehilbert.

Observația 3.3.1. $\langle x, 0_E\rangle = 0$, $\forall$ $x \in E$ (unde cu 0_E am notat elementul neutru la adunare din X și cu 0 numărul zero din K).

Într-adevăr, $\langle x, 0_E\rangle = \langle x, 0\cdot 0_E\rangle = 0\langle x, 0_E\rangle = 0$.

Teorema 3.3.1. **(inegalitatea Cauchy-Buniakovski-Schvarz)**

$$\left|\langle x,y\rangle\right|^2 \le \langle x,x\rangle\langle y,y\rangle\,,\ \forall\ \ x,y\in E \tag{3.10}$$

Demonstrație

Dacă $y = 0_E$, atunci $\langle x,y\rangle = 0$, deci inegalitatea (1) este evident satisfăcută.

Fie $y \neq 0_E$. Pentru $\forall\ \lambda \in \le$ avem:

$$0 \le \langle x-\lambda y, x-\lambda y\rangle = \langle x, x-\lambda y\rangle - \lambda\langle y, x-\lambda y\rangle =$$
$$= \langle x,x\rangle - \overline{\lambda}\langle x,y\rangle - \lambda\langle y,x\rangle + \overline{\lambda}\lambda\langle y,y\rangle .$$

În particular, pentru $\lambda = \dfrac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle}$ avem

$$0 \le \langle x,x\rangle - \frac{\overline{\langle x,y\rangle}\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle} - \frac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle}\cdot\overline{\langle x,y\rangle} + \frac{\langle x,y\rangle\overline{\langle x,y\rangle}}{\langle y,y\rangle\langle y,y\rangle}\cdot\langle y,y\rangle$$

Deoarece $\langle x,y\rangle\overline{\langle x,y\rangle} = \left|\langle x,y\rangle\right|^2$, mai departe obținem:

$$0 \le \langle x,x\rangle - \frac{\left|\langle x,y\rangle\right|^2}{\langle y,y\rangle}\,,\ \text{deci}\ \ \left|\langle x,y\rangle\right|^2 \le \langle x,x\rangle\langle y,y\rangle .$$

Corolar. *Orice spațiu prehilbert este un spațiu normat.*

Demonstrație

Pentru $\forall\ \ x \in E$ notăm cu $\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$. Evident,

$$\|x\| \ge 0\ \text{ și }\ \|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|,\ \forall\ \ \lambda \in \mathrm{K}\ \text{și}\ \ \forall\ \ x \in X.$$

Rămâne să dovedim și proprietatea (iii) din Definiția 3.2.1. Pentru $\forall\ \ x, y \in E$ avem

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle =$$
$$= \langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \overline{\langle x,y\rangle} + \langle y,y\rangle = \langle x,y\rangle + 2\,\mathrm{Re}\langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle \le$$
$$\le \langle x,x\rangle + 2\left|\langle x,y\rangle\right| + \langle y,y\rangle .$$

Ținând seama de inegalitatea (1) obținem:

$$\|x+y\| \le \langle x,x\rangle + 2\sqrt{\langle x,x\rangle\langle y,y\rangle} + \langle y,y\rangle =$$
$$= \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = \left(\|x\| + \|y\|\right)^2 .$$

Rezultă $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|,\ \forall\ \ x,y\in X$.

Definiția 3.3.2. *Un spațiu prehilbert complet se numește spațiu Hilbert.*

Exemple

1. Spațiul $\square^n$ este un spațiu Hilbert.

Într-adevăr, observăm pentru început că $\mathbb{R}^n$ este un spațiu vectorial peste $\mathbb{R}$ în raport cu operațiile:

$$x+y=\left(x_1+y_1,\ldots,x_n+y_n\right),\ \forall\ \ x=\left(x_1,\ldots,x_n\right),\ y=\left(y_1,\ldots,y_n\right)\in\mathbb{R}^n.$$

$$\lambda x=\left(\lambda x_1,\ldots,\lambda x_n\right),\ \forall\ \lambda\in\mathbb{R}.$$

Elementul neutru la adunare este $0_E=\left(0,0,\ldots,0\right)$. Dacă notăm cu

$$\left\langle x,y\right\rangle=\sum_{i=1}^{n}x_i y_i\ , \tag{3.11}$$

atunci formula (3.11) definește un produs scalar pe $\mathbb{R}^n$, iar formula

$$\|x\|_2=\sqrt{\left\langle x,x\right\rangle}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}\ ,\ \forall\ x\in\mathbb{R}^n \tag{3.12}$$

definește norma euclidiană pe $\mathbb{R}^n$. Așadar, $\mathbb{R}^n$ este un spațiu prehilbertian. Inegalitatea Cauchy-Buniakovski-Schwarz capătă următoarea formă:

$$\left|\sum_{i=1}^{n}x_i y_i\right|^2\le\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^2\right). \tag{3.13}$$

Pe spațiul $\mathbb{R}^n$ s-a definit în subcap 3.2 și o altă normă, care nu provine dintr-un produs scalar și anume:

$$\|x\|_\infty=\ =\max\left\{\left|x_i\right|;1\le i\le n\right\}.$$

2. Fie $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ spațiul vectorial al matricelor cu m linii și n coloane cu elemente din $\mathbb{R}$.

Dacă $A=\left(a_{ij}\right)$ și $B=\left(b_{ij}\right)$, $1\le i\le m$ și $1\le j\le n$, atunci formula

$$\left\langle A,B\right\rangle=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{ij}$$

definește un produs scalar, deci $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ este un spațiu prehilbertian.

Norma unei matrice este deci:

$$\|A\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^2}\ ,\ \forall\ A\in\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}).$$

Spațiul $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ se poate identifica cu spațiul $\mathbb{R}^{mn}$ prin următoarea aplicație

$$\varphi:\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})\to\mathbb{R}^{mn},\ \varphi\left(A\right)=\left(a_{11},\ldots,a_{1n},\ldots,a_{n1},\ldots,a_{mn}\right),$$

pentru

$$\forall\ A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \hdashline a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}).$$

Se observă imediat că aplicația φ are următoarele proprietăți: φ este bijectivă, $\varphi(A+B) = \varphi(A) + \varphi(B)$ şi $\varphi(\lambda A) = \lambda\varphi(A)$, $\forall\ A,\ B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ şi $\forall\ \lambda \in \mathbb{R}$, de unde rezultă că spațiul $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ şi $\mathbb{R}^{mn}$ sunt izomorfe din punct de vedere algebric. Avem de asemenea:

$$\|\varphi(A)\| = \|A\|,\ \forall\ A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}),$$

de unde rezultă că cele două spații sunt izomorfe şi din punct de vedere topologic. Cum spațiul $\mathbb{R}^{mn}$ este Hilbert, rezultă că şi spațiul $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ este un spațiu Hilbert.

3. Fie $\mathcal{C}([a,b])$ spațiul vectorial al funcțiilor $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continue pe $[a,b]$. Pentru $\forall\ f, g \in \mathcal{C}([a,b])$ notăm

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x. \tag{3.14}$$

Se verifică imediat că sunt satisfăcute proprietățile (i) şi (ii) din Definiția 3.3.1 a produsului scalar. Este de asemenea evident că $\langle f, f\rangle = \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$, $\forall f \in \mathcal{C}([a,b])$. Faptul că $\langle f, f\rangle = \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x = 0$ dacă şi numai dacă f este identic nulă pe $[a,b]$, rezultă din următorul rezultat cunoscut din liceu: dacă $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ este continuă şi pozitivă, neidentic nulă pe $[a,b]$, atunci $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x > 0$. Aşadar, formula (3.14) defineşte un produs scalar pe $\mathcal{C}([a,b])$. Norma euclidiană va fi:

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x} = 0,\ \forall\ f \in \mathcal{C}([a,b]). \tag{3.15}$$

Pe spațiul $\mathcal{C}([a,b])$ se poate introduce şi norma

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)|;\ x \in [a,b]\} \tag{3.16}$$

Deoarece orice funcție continuă pe $[a,b]$ este mărginită, rezultă

$$\mathcal{C}([a,b]) \subset B([a,b])$$

şi evident norma (3.16) este restricția la $\mathcal{C}([a,b])$ a normei (3.12).

Spațiul $(\mathcal{C}([a,b]), \|\ \|_\infty)$ este spațiu Banach. Remarcăm că spațiul $\mathcal{C}([a,b])$ nu este complet în raport cu norma (3.15), deci nu este spațiu Hilbert.

Într-adevăr, dacă considerăm şirul de funcții continue:

$$f_n(x)=\begin{cases} 0 \text{ dacă } -1\le x\le 0 \\ nx \text{ dacă } 0<x\le \dfrac{1}{n}, \\ 1 \text{ dacă } \dfrac{1}{n}<x\le 1 \end{cases}$$

atunci: $\left\|f_{n+p}-f_n\right\|_2^2=\int_0^{\frac{1}{n+p}}p^2x^2dx+\int_{\frac{1}{n+p}}^{\frac{1}{n}}(1-nx)^2\,dx<\dfrac{1}{3n}+\dfrac{1}{3n}+\dfrac{1}{n}=\dfrac{5}{3n},\forall p$.

Rezultă că $\{f_n\}$ este fundamental în raport cu norma $\|\ \|_2$. Pe de altă parte observăm că $\{f_n\}$ nu converge în $C([-1,1])$ în raport cu această normă.

Într-adevăr, dacă $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ este continuă, atunci avem:

$$\|f_n-f\|_2^2=\int_{-1}^0 f^2(x)\,dx+\int_0^{\frac{1}{n}}\left[nx-f(x)\right]^2dx+\int_{\frac{1}{n}}^1\left[1-f(x)\right]^2dx$$

Dacă presupunem că $\lim_{n\to\infty}\|f_n-f\|_2^2=0$, rezultă că $\int_{-1}^0 f^2(x)\,dx+\int_0^1\left[1-f(x)\right]^2dx=0$ şi mai departe că $f(x)=0,\forall x\in[-1,0]$ şi $f(x)=1,\forall x\in(0,1]$ ceea ce contrazice faptul că f este continuă pe $[-1,1]$. Rezultă $f_n\xrightarrow{\|\ \|_2}f$, dar $f\notin C([-1,1])$ deci $\left(C([-1,1]),\|\ \|_2\right)$ nu este complet.

3.4. Serii în spaţii normate

Definiţia 3.4.1. *Fie X un spaţiu normat şi* $\{u_n\}_{n\ge1}$ *un şir de elemente din X. Pentru orice* $n\in\mathbb{N}^*$, *notăm cu* $s_n=u_1+u_2+\ldots+u_n$.

Perechea $\left(\{u_n\}_{n\ge1},\{s_n\}_{n\ge1}\right)$ *se numeşte serie de elemente din spaţiul normat X şi se notează* $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$.

Seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *se numeşte convergentă dacă şirul sumelor parţiale* $\{s_n\}$ *este convergent, deci dacă* $\exists\ s \in X$ *astfel încât* $\lim_{n\to\infty} \|s_n - s\| = 0$. *În acest caz s se numeşte suma seriei şi notăm* $s = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

Teorema 3.4.1. *Fie X un spaţiu Banach şi* $\{u_n\}$ *un şir de elemente din X. Condiţia necesară şi suficientă ca seria* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *să fie convergentă este ca* $\forall\ \varepsilon > 0$ *să* $\exists\ n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ *astfel încât* $\forall\ n \ge n_\varepsilon$ *şi* $\forall\ p \in \mathbb{N}^*$ *să avem* $\|u_{n+1} + \ldots + u_{n+p}\| < \varepsilon$.

Demonstraţie

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă $\Leftrightarrow \{s_n\}$ este convergent $\Leftrightarrow$ $\{s_n\}$ este fundamental, deci $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\forall\ n \ge n_\varepsilon$ şi $\forall\ p \in \mathbb{N}^*$ avem

$$\|s_{n+p} - s_n\| = \|u_{n+1} + \ldots + u_{n+p}\| < \varepsilon .$$

Definiţia 3.4.2. *O serie de elemente din spaţiul normat X se numeşte absolut convergentă dacă seria cu termeni pozitivi* $\sum_{n=1}^{\infty} \|u_n\|$ *este convergentă.*

Teorema 3.4.2. *Condiţia necesară şi suficientă ca un spaţiu normat X să fie spaţiu Banach, este ca orice serie absolut convergentă de elemente din X să fie convergentă.*

Demonstraţie

Necesitate. Fie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ o serie absolut convergentă. Atunci $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists$ $n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\|u_{n+1}\| + \ldots + \|u_{n+p}\| < \varepsilon$, $\forall\ n \ge n_\varepsilon$ şi $\forall\ p \in \mathbb{N}^*$. În continuare avem:

$$\|u_{n+1} + \ldots + u_{n+p}\| \le \|u_{n+1}\| + \ldots + \|u_{n+p}\| < \varepsilon,\ \forall\ n \ge n_\varepsilon \text{ şi } \forall\ p \in \mathbb{N}^*,$$

deci $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă conform Teoremei 3.4.1.

Suficienţa. Fie $\{x_n\}$ un şir fundamental de elemente din *X*. Atunci există un subşir $\{x_{n_k}\}$ cu proprietatea:

$$\left\| x_{n_{k+1}} - x_{n_k} \right\| < \frac{1}{2^k}, \ \forall \ k \in \mathbb{N}^* \tag{3.17}$$

(vezi raționamentul din demonstrația Teoremei 1.2.1).

Deoarece seria $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$ este convergentă, din (3.17) rezultă că seria $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(x_{n_{k+1}} - x_{n_k} \right)$ este absolut convergentă, deci convergentă, conform ipotezei noastre. Observăm însă că şirul sumelor parțiale al acestei serii coincide cu subşirul $\left\{ x_{n_k} \right\}$, deci $\exists \ x \in X$ astfel încât $\forall \ \varepsilon > 0$, $\exists \ n'_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ cu proprietatea:

$$\left\| x_{n_k} - x \right\| < \frac{\varepsilon}{2}, \ \forall \ k \geq n'_\varepsilon .$$

Pe de altă parte, şirul $\{x_n\}$ este fundamental, deci $\exists \ n''_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ cu proprietatea:

$$\left\| x_n - x_m \right\| < \frac{\varepsilon}{2}, \ \ \forall \ \ n, m \geq n''_\varepsilon .$$

Fie $n_\varepsilon = \max\{n'_\varepsilon, n''_\varepsilon\}$, $n \geq n_\varepsilon$ şi $k \geq n_\varepsilon$. Atunci

$$\left\| x_n - x \right\| \leq \left\| x_n - x_{n_k} \right\| + \left\| x_{n_k} - x \right\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon ,$$

de unde rezultă $x_n \to x$.

Aşadar, am arătat că orice şir fundamental este convergent, deci X este spațiu Banach.

Exemple

1. Fie $X = \mathbb{R}^n$ şi $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ o serie de elemente din $\mathbb{R}^n$. Fiecare element x_k va fi de forma: $x_k = (x_{k1}, x_{k2}, \ldots, x_{kn})$.

Şirul sumelor parțiale $\{s_k\}$ este de forma

$$s_k = (s_{k1}, s_{k2}, \ldots, s_{kn}) \text{ unde } s_{ki} = x_{1i} + x_{2i} + \ldots + x_{ki} .$$

Din Teorema 3.1.1 rezultă că $\{s_k\}$ este convergent dacă şi numai dacă şirul de numere reale $\{s_{ki}\}$ este convergent, $\forall \ \ i = \overline{1,n}$. Prin urmare, seria de vectori $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ este convergentă în $\mathbb{R}^n$, dacă şi numai dacă seriile de numere reale $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_{ki}$ sunt convergente în $\mathbb{R}$, $\forall \ \ i = \overline{1,n}$.

Seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n},\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right)$ este convergentă în $\mathbb{R}^2$ şi are suma $s=(1,\ln 2)\in\mathbb{R}^2$,

deoarece $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=1$ şi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=\ln 2$.

2. Fie $X=\mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ spațiul Banach al matricelor cu m linii şi n coloane cu elemente din Υ. Aşa cu am mai remarcat, acest spațiu se poate identifica cu spațiul $\mathbb{R}^{mn}$. Rezultă că o serie de matrice $\sum\limits_{k=1}^{\infty}A_k$, unde pentru $\forall\ k\in\mathbb{N}^*$,

$$A_k=\begin{pmatrix} a_{11}^{(k)} & a_{12}^{(k)} & a_{1n}^{(k)} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}^{(k)} & a_{m2}^{(k)} & a_{mn}^{(k)} \end{pmatrix}$$

este convergentă, dacă şi numai dacă seriile de numere reale $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_{ij}^{(k)}$ sunt convergente în Υ pentru $\forall\ i=\overline{1,m}$ şi $\forall\ j=\overline{1,n}$.

De exemplu, seria $\sum\limits_{k=1}^{\infty}A_k$, unde

$$A_k=\frac{1}{k+1}\begin{pmatrix} \frac{1}{k} & -\frac{1}{k+2} & (-1)^{k-1} \\ \frac{1}{k+2} & \frac{1}{k} & (k+1)\ln\left[1+\frac{(-1)^{k-1}}{k+1}\right] \end{pmatrix}$$

este convergentă în $\mathrm{M}_{23}(\mathbb{R})$ şi are suma

$$S=\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 1-\ln 2 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Într-adevăr,

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_{11}^{(k)}=\sum_{k=1}^{\infty}a_{22}^{(k)}=\lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{k(k+1)}\right)=\lim_{k\to\infty}\left(1-\frac{1}{k+1}\right)=1$$

În mod analog avem

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_{21}^{(k)}=-\sum_{k=1}^{\infty}a_{12}^{(k)}=\frac{1}{2}.$$

În continuare observăm că

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{13}^{(k)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k+1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \ldots = 1 - \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots\right) = 1 - \ln 2 .$$

În sfârşit, dacă notăm cu $a_{23}^{(k)}$ suma parţială de ordinul k a seriei

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{23}^{(k)} = \sum_{k=1}^{\infty} \ln\left[1 + \frac{(-1)^{k-1}}{k+1}\right],$$

atunci

$$s_{23}^{(k)} = \ln \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{4}{5} \ldots \frac{k+1+(-1)^{k-1}}{k+1} = \begin{cases} \ln 1 & \text{dacă } k = 2p \\ \ln \dfrac{2p+1}{2p} & \text{dacă } k = 2p-1. \end{cases}$$

Rezultă că $\lim\limits_{k\to\infty} s_{23}^{(k)} = 0$, deci $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{23}^{(k)} = 0$.

Observaţia 3.4.1. Într-un spaţiu Banach pot exista serii convergente care nu sunt absolut convergente. Într-adevăr, dacă vom considera din nou seria precedentă, despre care s-a arătat că este convergentă, observăm că

$$\|A_k\| = \frac{1}{k+1} \sqrt{\frac{2}{k^2} + \frac{2}{(k+2)^2} + 1 + (k+1)^2 \ln^2\left[1 + \frac{(-1)^{k+1}}{k+1}\right]} \geq \frac{1}{k+1} .$$

Cum seria $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+1}$ este divergentă, rezultă că seria $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \|A_k\|$ este divergentă, deci seria $\sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ nu este absolut convergentă.

3. Fie $X = ≤$ şi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ o serie de numere complexe, unde $z_n = x_n + i\, y_n$, $\forall\ n \in □^*$.

Deoarece şirul sumelor parţiale este

$$s_n = (x_1 + \ldots + x_n) + i(y_1 + \ldots + y_n),\ \ \forall\ \ n \in □^*,$$

din Teorema 3.1.2 rezultă că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ este convergentă în ≤ dacă şi numai dacă seriile de numere reale $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ şi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ sunt convergente în ϒ.

4. Fie $X = B(E)$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ o serie de funcţii din $B(E)$ şi $s_n = u_1 + \ldots + u_n$, $n \in$ N. Deoarece, aşa cum am văzut, $\{s_n\}$ este convergent în $B(E)$ dacă şi numai

dacă $\{s_n\}$ este uniform convergent pe E, rezultă că seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă în $B(E)$ în raport cu norma $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)|\,;\, x \in E\}$, $\forall\ f \in B(E)$, dacă şi numai dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este uniform convergentă pe E.

3.5. Funcții elementare. Formulele lui Euler

Observația 3.5.1. Demonstrația Teoremei 1.9.2 rămâne valabilă şi pentru serii de numere complexe. Prin urmare, dacă seriile de numere complexe $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ şi $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ sunt absolut convergente şi au sumele U, respectiv V, atunci orice serie produs a lor este absolut convergentă şi are suma egală cu UV.

În continuare definim funcțiile de variabilă complexă e^z, $\cos z$ şi $\sin z$ ca sumele următoarelor serii de numere complexe:

$$\exp z = e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots \tag{3.18}$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \ldots \tag{3.19}$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots \tag{3.20}$$

Definițiile au sens, deoarece seriile din dreapta sunt absolut convergente pe ≤, aşa cum rezultă imediat din criteriul raportului. Cum ≤ este spațiu Banach, din Teorema 3.4.2 rezultă că aceste serii sunt convergente pr orice $z \in$ ≤.

Teorema 3.5.1. $e^z \cdot e^u = e^{z+u}$, $\forall\ u, z \in$ ≤.

Demonstrație

În conformitate cu definiția (3.18) a funcției exponențiale avem:

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots$$

$$e^u = 1 + \frac{u}{1!} + \frac{u^2}{2!} + \ldots + \frac{u^n}{n!} + \ldots$$

În virtutea Observației 3.5.1, oricum am înmulți aceste serii, obținem o serie absolut convergentă, a cărei sumă este egală cu $e^z \cdot e^u$.

Folosind produsul de tipul I rezultă:

$$e^z \cdot e^u = 1 + \left(\frac{z}{1!} + \frac{u}{1!}\right) + \left(\frac{z^2}{2!} + \frac{zu}{1!1!} + \frac{u^2}{2!}\right) + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{n-k}}{(n-k)!k!}\right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{n!}{(n-k)!k!}z^{n-k}\cdot u^k\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\sum_{k=0}^{\infty}C_n^k z^{n-k}\cdot u^k\right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+u)^n}{n!} = e^{z+u}.$$

Dacă în definiția (3.18) a funcției exponențiale înlocuim z cu iz obținem

$$e^{iz} = 1 + \frac{iz}{1!} + \frac{z^2}{2!} - \frac{iz^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \ldots = \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots\right) + i\left(\frac{z}{1!} - \frac{z^3}{3!} + \ldots\right) =$$

$$= \cos z + i\sin z.$$

Aşadar, au loc formulele

$$\begin{cases} e^{iz} = \cos z + i\sin z \\ e^{-iz} = \cos z - i\sin z, \quad \forall\ z \in \mathbb{C} \end{cases} \tag{3.21}$$

Formulele (3.21) se pot pune sub forma echivalentă.

$$\begin{cases} \cos z = \dfrac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-z}\right) \\ \sin z = \dfrac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right), \quad z \in \mathbb{C} \end{cases} \tag{3.22}$$

Formulele (3.22) se numesc formulele lui Euler. Din Teorema 3.5.1 şi formulele lui Euler rezultă imediat:

$$\begin{cases} \sin(z+u) = \sin z\cos u + \cos z\sin u \\ \cos(z+u) = \cos z\cos u - \sin z\sin u \end{cases} \tag{3.23}$$

Dacă în definițiile (3.18), (3.19) şi (3.20) luăm $z = x \in \Upsilon$, obținem:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots\ldots \tag{3.18'}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots\ldots \tag{3.19'}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots\ldots, \quad \forall\ x \in \Upsilon. \tag{3.20'}$$

Ținând seama de dezvoltările în serie Mac Laurin a funcțiilor elementare studiate în subcap. 2.3, constatăm că funcțiile de variabilă complexă e^z, $\cos z$ şi

$\sin z$ definite în (3.18), (3.19) şi (3.20) sunt generalizări ale funcțiilor de variabilă reală e^x, $\cos x$ şi $\sin x$. Aşadar, restricția la $\mathbb{R}$ a funcției $z \to e^z : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ coincide cu funcția exponențială reală $x \to e^x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cunoscută din liceu etc.

Din Teorema 3.5.1 şi formulele (3.21) rezultă:

$$e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x\left(\cos y + i\sin y\right), \ \forall \quad z = x + iy \in \mathbb{C}$$

În particular avem:

$$e^{i2k\pi} = 1, \ \forall \ \ k \in \mathbf{Z}.$$

În sfârşit, funcția $z = \ln w$, $z \in \mathbb{C}$ se defineşte ca inversa funcției $w = e^z$, $z \in \mathbb{C}$.

Dacă $w \neq 0$ şi $w = r\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)$, atunci din ecuația $w = e^z = e^{x+iy} = = e^x\left(\cos y + i\sin y\right)$ rezultă $e^x = r = |w|$ şi $y = \theta + 2k\pi = \arg w + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. Prin urmare avem:

$$z = \ln w = \ln|w| + i\arg w + i\cdot 2k\pi, \ \ k \in \mathbf{Z}.$$

Din punct de vedere al teoriei funcțiilor complexe, $\ln w$ are o infinitate de valori dacă $w \neq 0$. În particular, $\ln 1 = 2k\pi i$, $\forall \ \ k \in \mathbf{Z}$, spre deosebire de analiza reală, unde $\ln 1 = 0$ (are o singură valoare).

3.6. Funcții de matrice

Fie $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ spațiul vectorial al matricelor pătratice de ordinul n cu elemente din $\mathbb{R}$. Aşa cum am văzut în subcap. 3.4 acest spațiu se poate identifica cu spațiul $\mathbb{R}^{n^2}$; $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ este un spațiu Banach (chiar Hilbert) în raport cu norma.

$$\|A\| = \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2\right)^{1/2}, \ \forall \ \ A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \hdashline a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

Lema 3.6.1. *Pentru orice A,B* $\in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$*, avem*:

$$\|AB\| \leq \|A\|\,\|B\| \ \ \text{şi} \ \ \left\|A^k\right\| \leq \|A\|^k, \ \forall \ \ k \in \mathbb{N}^* \tag{3.24}$$

Demonstrație

Dacă notăm cu $C = AB$, atunci elementele matricei C sunt

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}, \ \forall \ \ i, j = \overline{1,n}.$$

Din inegalitatea Cauchy-Buniakovski-Schwarz avem:

$$c_{ij}^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \right)^2 \le \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2 \right) \left(\sum_{k=1}^{n} b_{kj}^2 \right). \tag{3.25}$$

Sumând în (3.25) după indicele j rezultă:

$$\sum_{j=1}^{n} c_{ij}^2 \le \sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2 \left(\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} b_{kj}^2 \right) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2 \left\| B \right\|^2 . \tag{3.26}$$

Sumând acum după i obținem:

$$\left\| C \right\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}^2 \le \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2 \right) \cdot \left\| B \right\|^2 = \left\| A \right\|^2 \left\| B \right\|^2, \text{ deci } \quad \left\| C \right\| \le \left\| A \right\| \left\| B \right\| .$$

Inegalitatea (3.26) rezultă imediat din (3.25) prin inducție completă.

Fie seria de puteri $\sum_{k=1}^{n} a_k x^k$, $a_k \in \Upsilon$ pentru $\forall\ k \in \mathrm{N}$ şi fie f suma sa. Dacă notăm cu ρ raza sa de convergență, atunci avem:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_k x^k \text{, dacă } \left\| x \right\| < \rho . \tag{3.27}$$

Pentru orice $A \in \mathrm{M}_n(\square)$ considerăm seria de matrice

$$a_0 I_n + a_1 A + a_2 A^2 + \ldots + a_k A^k + \ldots \tag{3.28}$$

unde cu I_n am notat matricea unitate de ordinul n.

Teorema 3.6.1. *Seria* (3.28) *este convergentă pentru orice* $A \in \mathrm{M}_n(\square)$ *cu proprietatea* $\left\| A \right\| < \rho$.

Demonstrație

Deoarece $\mathrm{M}_n(\square)$ este un spațiu Banach, din Teorema 3.4.2 rezultă că este suficient să arătăm că seria (3.28) este absolut convergentă pentru $\left\| A \right\| < \rho$. Fie deci $A \in \mathrm{M}_n(\square)$ cu proprietatea $\left\| A \right\| < \rho$, şi fie $\left\| A \right\| < r < \rho$. Din Lema 3.6.1 rezultă:

$$\left\| a_k A^k \right\| = \left| a_k \right| \left\| A^k \right\| \le \left| a_k \right| \left\| A \right\|^k < \left| a_k \right| r^k .$$

Cum $\sum_{k=0}^{\infty} \left| a_k \right| r^k$ este convergentă, din Criteriul I de comparație rezultă că seria $\sum_{k=0}^{\infty} \left\| a_k A^k \right\|$ este convergentă, deci seria (3.28) $\sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k$ este convergentă (s-a folosit notația $A^0 = E$).

Definiția 3.6.1. *Se numeşte funcția de matrice definită de f şi se notează cu* $f(A)$, *suma seriei* (3.28). *Aşadar, avem*:

$$f(A) = a_0 I_n + a_1 A + a_2 A^2 + \ldots + a_k A^k + \ldots , \ \forall\ A \in \mathrm{M}_n(\square), \ \left\| A \right\| < \rho .$$

Cea mai importantă funcție de matrice este funcția exponențională de matrice. Deoarece seria $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ are raza de convergență $\rho = \infty$, rezultă că avem:

$$e^A = I_n + \frac{1}{1!}A + \frac{1}{2!}A^2 + \ldots + \frac{1}{k!}A^k + \ldots, \ \forall\, A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}). \tag{3.29}$$

Teorema 3.6.2. *Funcția exponențială de matrice are următoarele proprietăți*:

(i) $e^0 = I_n$

(ii) $e^{\lambda I_n} = e^{\lambda} I_n,\ \forall\ \lambda \in \Upsilon$

(iii) *Dacă* $AB = BA$, *atunci* $e^A \cdot e^B = e^B \cdot e^A = e^{A+B}$

(iv) *Matricea* e^A *este nesingulară și* $\left(e^A\right)^{-1} = e^{-A}$, $\forall\ A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

(v) *Pentru orice matrice nesingulară* $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *avem*

$$e^A = C \cdot e^{C^{-1}AC} \cdot C^{-1},\ \forall\ A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}).$$

Demonstrație

Proprietățile (i) și (ii) sunt evidente din (3.29). Demonstrația proprietății (iii) este identică cu demonstrația Teoremei 3.5.1, cu observația suplimentară că dacă $AB = BA$, atunci formula binomului lui Newton funcționează și pentru matrice, deci are loc formula:

$$(A + B)^k = \sum_{l=0}^{k} C_k^l A^{k-l} B^l .$$

Proprietatea (iv) rezultă din observația $e^A \cdot e^{-A} = e^0 = I_n$. Pentru a demonstra proprietatea (v) observăm pentru început că avem:

$$\left(C^{-1}AC\right)^k = C^{-1}A^k C,\ \forall\ k \in \mathbb{N}. \tag{3.30}$$

Într-adevăr, identitatea (3.30) se demonstrează imediat prin inducție matematică. Ținând seama de (3.30) rezultă:

$$e^{C^{-1}AC} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\left(C^{-1}AC\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} C^{-1}A^k C = C^{-1}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k\right) C = C^{-1}e^A C .$$

Așadar, avem $e^{C^{-1}AC} = C^{-1}e^A C$. Amplificând în această egalitate la stânga cu C și la dreapta cu C^{-1} obținem $C \cdot e^{C^{-1}AC} \cdot C^{-1} = e^A$, deci (v).

Exemple

1. Dacă matricea A are forma diagonală, adică dacă

$$A=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0\\ \hdotsfor{4}\\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n\end{pmatrix},\ \text{atunci}\quad A^k=\begin{pmatrix}\lambda_1^k & 0 & \dots & 0\\ 0 & \lambda_2^k & \dots & 0\\ \hdotsfor{4}\\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^k\end{pmatrix}.$$

Rezultă că

$$e^A=\begin{pmatrix}e^{\lambda_1} & 0 & \dots & 0\\ 0 & e^{\lambda_2} & \dots & 0\\ \hdotsfor{4}\\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n}\end{pmatrix}.$$

2. Fie $A=\begin{pmatrix}4 & -1\\ -3 & 2\end{pmatrix}$. Să se calculeze e^A.

În prima fază aducem matricea la forma diagonală. Ecuația caracteristică este $\lambda^2-6\lambda+5=0$, iar valorile proprii sunt $\lambda_1=1$, $\lambda_2=5$. Vectorii proprii sunt $x_1=(1,3)$, $x_2=(1,-1)$. În raport cu baza x_1,x_2 matricea A capătă forma diagonală $D=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix}$. Matricea de trecere este $C=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & -1\end{pmatrix}$, iar $C^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{4} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4}\end{pmatrix}$.

Aşadar, avem $D=C^{-1}AC$. Din Teorema 3.9.2, (v) rezultă

$$e^A=Ce^DC^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e & 0\\ 0 & e^5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{4} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4}\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}e+3e^5 & e-e^5\\ 3e-3e^5 & 3e+3e^5\end{pmatrix}$$

3. Să se calculeze $\sin A$, dacă $A=\begin{pmatrix}4 & -1\\ -3 & 2\end{pmatrix}$.

$$\sin A=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}A^{2k+1}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\left(CDC^{-1}\right)^{2k+1}=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}CD^{2k+1}C^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 5^{2k+1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{4} & \frac{1}{4}\\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{4}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sin 1 & 0\\ 0 & \sin 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{4} & \frac{1}{4}\\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{4}\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}\sin 1+3\sin 5 & \sin 1-\sin 5\\ 3\sin 1-3\sin 5 & 3\sin 1+\sin 5\end{pmatrix}.$$

În încheierea acestui paragraf menţionăm că funcţia exponenţială de matrice este utilă în studiul sistemelor de ecuaţii diferenţiale liniare.

3.7. Elemente de topologie în $\mathbb{R}^n$

Definiţia 3.7.1. *Fie* $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ *şi* $r > 0$. *Se numeşte bila deschisă (închisă) de centru a şi rază r mulţimea*

$$B(a,r) = \left\{x \in \mathbb{R}^n;\ \|x-a\| < r\right\}$$

$$\left[\check{B}(a,r) = \left\{x \in \mathbb{R}^n;\ \|x-a\| \le r\right\}\right].$$

Cum pe mulţimea $\mathbb{R}^n$ am introdus două norme $\left(\|\ \|_2 \text{ şi } \|\ \|_\infty\right)$ rezultă că pe $\mathbb{R}^n$ avem două tipuri de bile deschise (închise) şi anume:

$$B_2(a,r) = \left\{x = (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n;\ \|x-a\|_2 < r\right\} =$$

$$= \left\{x = (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n;\ (x_1-a_1)^2 + \ldots + (x_n-a_n)^2 < r^2\right\}.$$

$$B_\infty(a,r) = \left\{x = (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n;\ \|x-a\|_\infty < r\right\} =$$

$$= \left\{x = (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n;\ |x_1-a_1| < r, \ldots, |x_n-a_n| < r\right\}.$$

(respectiv $\breve{B}_2(a,r)$ şi $\breve{B}_\infty(a,r)$).

Exemple:

1. Fie $a \in \mathbb{R}$ şi $r > 0$. Deoarece pe $\mathbb{R}$ avem $\|x\|_2 = \|x\|_\infty = |x|$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$ rezultă că:

$$B_2(a,r) = B_\infty(a,r) = \left\{x \in \mathbb{R};\ |x-a| < r\right\} = (a-r,\ a+r).$$

Din punct de vedere geometric, pe $\mathbb{R}$, bila deschisă cu centrul în a şi de rază r reprezintă intervalul deschis $(a-r,\ a+r)$.

2. Fie $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ şi $r > 0$.

$$B_2(a,r) = \left\{x = (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2;\ (x_1-a_1)^2 + (x_2-a_2)^2 < r^2\right\} \text{ şi}$$

$$B_\infty(a,r) = \left\{x = (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2;\ |x_1-a_1| < r \text{ şi } |x_2-a_2| < r\right\}.$$

Din punct de vedere geometric $B_2(a,r)$ reprezintă interiorul cercului cu centrul în $a=(a_1,a_2)$ şi de rază r iar $B_\infty(a,r)$ este interiorul pătratului cu centrul în $a=(a_1,a_2)$ şi de latură $2r$.

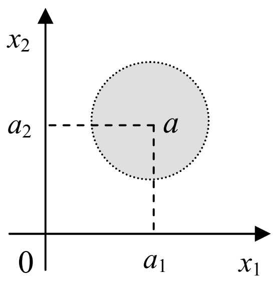


Fig. 1

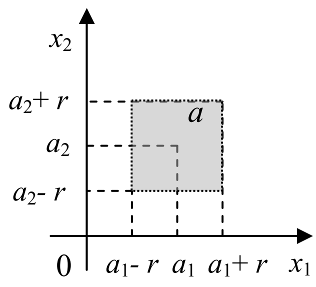


Fig. 2

3. În $\mathbb{R}^3$, $B_2(a,r)$ reprezintă interiorul sferei cu centrul în $a=(a_1,a_2,a_3)\in$ $\in\mathbb{R}^3$ şi de rază r, iar $B_\infty(a,r)$ reprezintă interiorul cubului cu centrul în a, feţele paralele cu planele de coordonate şi de muchie $2r$.

În general, în $\mathbb{R}^n$ vom numi $B_2(a,r)$ sfera n-dimensională şi $B_\infty(a,r)$ cubul n-dimensional.

Observaţia 3.7.1. Între cele două tipuri de bile din $\mathbb{R}^n$ au loc incluziunile:

$$B_\infty\left(a,\frac{r}{\sqrt{n}}\right)\subset B_2(a,r)\subset B_\infty(a,r).$$

Într-adevăr, dacă $x=(x_1,\ldots,x_n)\in B_\infty\left(a,\frac{r}{\sqrt{n}}\right)$, atunci $|x_i-a_i|<\frac{r}{\sqrt{n}}$, $\forall\ i=\overline{1,n}$, de unde rezultă că:

$$\left(x_1-a_1\right)^2+\ldots+\left(x_n-a_n\right)^2<\cancel{n}\cdot\frac{r^2}{\cancel{n}}=r^2 \text{, deci } x\in B_2\left(a,r\right).$$

Pe de altă parte, dacă

$$x=\left(x_1,\ldots,x_n\right)\in B_2\left(a,r\right),$$

atunci $\left(x_1-a_1\right)^2+\ldots+\left(x_n-a_n\right)^2<r^2$.

Cum $\left|x_i-a_i\right|\le\sqrt{\left(x_1-a_1\right)^2+\ldots+\left(x_n-a_n\right)^2}<r$, $\forall\ i=\overline{1,n}$ rezultă că

$$x\in\ B_\infty\left(a,r\right).$$

În cazul particular n = 2, incluziunile din Observația 3.7.1. sunt reprezentate geometric în Fig. 3.

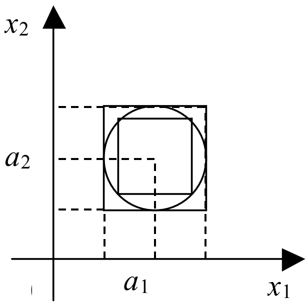


Fig. 3

Definiția 3.7.2. *Se numește vecinătate a punctului* $a\in\mathbb{R}^n$ *orice mulțime* $V\subset\mathbb{R}^n$ *cu proprietatea că există* $r>0$ *astfel încât* $V\supset B\left(a,r\right)$.

Conform acestor definiții, pe $\mathbb{R}$, o vecinătate a punctului $a\in\mathbb{R}$, este orice mulțime $V\subset\mathbb{R}$ care conține un interval deschis $(a-r,\ a+r)$, unde $r>0$. În particular orice interval deschis $(a-r,\ a+r)$ este vecinătate a punctului $a\in\mathbb{R}$.

S-ar părea că în $\mathbb{R}^n$ $(n\ge 2)$ există două tipuri de vecinătăți pentru un punct şi anume: vecinătăți ce conțin bile de tipul $B_2\left(a,r\right)$, respectiv vecinătăți ce conțin bile de tipul $B_\infty\left(a,r\right)$. Din Observația 3.7.1. rezultă că cele două tipuri de vecinătăți coincid. De aceea în continuare, prin vecinătate a punctului $a\in\mathbb{R}^n$, înțelegem orice mulțime din $\mathbb{R}^n$ care conține fie o sferă n-dimensională deschisă, fie un cub n-dimensional deschis.

Mulțimea tuturor vecinătăților punctului $a\in\mathbb{R}^n$ o notăm cu $\mathcal{V}(a)$.

Propoziția 3.7.1. *Familia* $\mathcal{V}(a)$ *are următoarele proprietăți:*

1) $a\in V$ *pentru orice* $V\in\mathcal{V}(a)$

2) *Dacă* $V\in\mathcal{V}(a)$ *şi* $U\supset V$*, atunci* $U\in\mathcal{V}(a)$.

3) *Dacă* $a_1\ne a_2$ *atunci* $\exists\ V_1\in\mathcal{V}\left(a_1\right)$ *şi* $\exists\ V_2\in\mathcal{V}\left(a_2\right)$ *astfel încât* $V_1\cap V_2=\varnothing$.

4) *Dacă* $V_i\in\mathcal{V}(a)$, $i=\overline{1,m}$, *atunci* $\bigcap\limits_{i=1}^{m}V_i\in\mathcal{V}(a)$.

5) *Pentru orice* $V \in \mathcal{V}(a)$, $\exists\ W \in \mathcal{V}(a)$ *astfel încât* $V \in \mathcal{V}(b)$ *pentru orice* $b \in W$.

Demonstrație

Proprietățile 1) şi 2) sunt evidente. Dacă $a_1 \neq a_2$ atunci $\|a_1 - a_2\| = r > 0$. Se observă imediat că $B\left(a_1; \frac{r}{3}\right) \cap B\left(a_2; \frac{r}{3}\right) = \Phi$, deci am demonstrat 3).

Fie $V_i \in \mathcal{V}(a)$ şi fie $r_i > 0$ astfel încât $V_i \supset B(a, r_i)$, $i = \overline{1,m}$. Dacă notăm cu $r = \min\{r_i; 1 \le i \le m\}$, atunci $\bigcap_{i=1}^{m} V_i \supset B(a; r)$, de unde rezultă că $\bigcap_{i=1}^{m} V_i \in \mathcal{V}(a)$.

În sfârşit, fie $V \in \mathcal{V}(a)$ şi $r > 0$ astfel încât $V \supset B(a, r)$. Dacă notăm cu $W = B\left(a, \frac{r}{2}\right)$, atunci pentru $\forall\ b \in W$ şi $\forall\ x \in B\left(b, \frac{r}{2}\right)$ avem $\|x - a\| \le \|x - b\| + \|b - a\| < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r$, de unde rezultă că $B\left(b, \frac{r}{2}\right) \subset V$, deci $V \in \mathcal{V}(b)$.

Observația 3.7.2. Un şir $\{x_k\}$ de elemente din $\mathbb{R}^n$ este convergent în $\mathbb{R}^n$ şi are limita $l \in \mathbb{R}^n$ dacă şi numai dacă $\forall\ V \in \mathcal{V}(l)$, $\exists$ un rang $k_V \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $x_k \in V$ pentru orice $k \ge k_V$. (Cu alte cuvinte, în afara oricărei vecinătăți V a lui l se află un număr finit de termeni ai şirului).

Într-adevăr, fie $V \in \mathcal{V}(l)$, şi fie $\exists\ \varepsilon > 0$ astfel încât $V \supset B(l, \varepsilon)$. Dacă $x_k \xrightarrow{\mathbb{R}^n} l$, atunci $\exists\ k_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ cu proprietatea că $\|x_k - l\| < \varepsilon$ pentru orice $k \ge k_\varepsilon$. Acest lucru revine la $x_k \in B(l, \varepsilon) \subset V$, $\forall\ k \ge k_\varepsilon$.

Reciproc, fie $\varepsilon > 0$ şi fie $V = B(l, \varepsilon)$. Dacă $\exists\ k_V = k_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $x_k \in V$ pentru orice $k \ge k_\varepsilon$, atunci $\|x_k - l\| < \varepsilon$ pentru orice $k \ge k_\varepsilon$, deci $x_k \xrightarrow{\mathbb{R}^n} l$.

Definiția 3.7.3. *Un punct a se numeşte punct interior pentru mulțimea* $A \subset \mathbb{R}^n$ *dacă există* $V \in \mathcal{V}(a)$ *astfel încât* $V \subset A$. *Mulțimea tuturor punctelor interioare ale mulțimii A se numeşte interiorul mulțimii A şi se notează cu* $\overset{\circ}{A}$. *Evident* $\overset{\circ}{A} \subset A$. *Mulțimea A se numeşte deschisă dacă* $A = \overset{\circ}{A}$.

Observația 3.7.3. Pentru orice $a \in \mathbb{R}^n$ şi orice $r > 0$ mulțimea $B(a, r)$ este decshisă. Într-adevăr, fie $b \in B(a, r)$ şi fie $0 < \varepsilon < r - \|b - a\|$.

Dacă $x \in B(a,\varepsilon)$ atunci $\|x-a\| \leq \|x-b\| + \|b-a\| < \varepsilon + \|b-a\| < r$. Rezultă că $x \in B(a,r)$, deci $B(a,\varepsilon) \subset B(a,r)$. Aşadar orice punct $b \in B(a,r)$ este punct interior al mulţimii $B(a,r)$, deci $B(a,r)$ este o mulţime deschisă.

Exemple

1. Dacă X = ϒ, atunci orice interval simetric $(a - r, a + r)$ este o mulţime deschisă. Fie $(\alpha,\beta) \subset$ ϒ un interval deschis oarecare. Dacă notăm cu $a = \dfrac{\alpha+\beta}{2}$ şi cu $r = \dfrac{\beta-\alpha}{2}$, atunci $(\alpha,\beta) = (a - r, a + r)$. Rezultă că orice interval deschis din ϒ este o mulţime deschisă.

2. Dacă $X = \square^{2}$, atunci interiorul oricărui cerc (pătrat) este o mulţime deschisă.

3. Dacă $X = \square^{3}$, atunci interiorul oricărei sfere (cub) este o mulţime deschisă.

Proprietăţile mulţimilor deschise sunt puse în evidenţă de următoarea propoziţie.

Propoziţia 3.7.2.

(*i*) *O reuniune oarecare de mulţimi deschise este o mulţime deschisă.*

(*ii*) *Orice intersecţie finită de mulţimi deschise este o mulţime deschisă.*

(*iii*) *Mulţimea* $\square^{n}$ *şi mulţimea vidă* $\varnothing$ *sunt mulţimi deschise.*

Demonstraţie

(i) Fie $\{D_i\}_{i\in I}$ o familie de mulţimi deschise şi fie $D = \bigcup\limits_{i\in I} D_i$. Dacă $a \in D$, atunci există $i_0 \in I$ astfel încât $a \in D_{i_0}$. Cum D_{i_0} este deschisă, rezultă că există $V \in \mathrm{V}(a)$ astfel încât $V \subset D_{i_0}$. Evident $V \subset D$, de unde rezultă că $x = a$ este un punct interior pentru D, deci D este deschisă.

(ii) Fie $D_1,\ldots,D_m$ mulţimi deschise şi $A = \bigcap\limits_{i=1}^{m} D_i$. Dacă $a \in A$, atunci $a \in D_i$ oricare ar fi $i \in I$. Cum D_i este deschisă rezultă că există $V_i \in \mathrm{V}(a)$ astfel încât $V \subset D_i$. Dacă notăm cu $V = \bigcap\limits_{i=1}^{m} V_i$, atunci $V \in \mathrm{V}(a)$ şi $V \subset A$. Rezultă că $x = a$ este punct interior pentru A, deci A este deschisă. Proprietatea (iii) este evidentă.

Propoziţia 3.7.2. ne permite să dăm exemple mai variate de mulţimi deschise. De exemplu în ϒ, orice reuniune de intervale deschise este o mulţime deschisă. În

$\mathbb{R}^2$, diverse reuniuni şi intersecţii de interioare de cercuri sau pătrate sunt exemple de mulţimi deschise etc.

Definiţia 3.7.4. *Un punct $a \in \mathbb{R}^n$ se numeşte punct aderent pentru mulţimea $A \subset \mathbb{R}^n$ dacă oricare ar fi $V \in \mathcal{V}(a)$ rezultă $V \cap A \neq \emptyset$. Mulţimea tuturor punctelor aderente ale mulţimii A se notează cu $\overline{A}$ şi se numeşte închiderea mulţimii A. Evident $A \subset \overline{A}$. Mulţimea A se numeşte închisă dacă $A = \overline{A}$.*

Teorema 3.7.1. *Condiţia necesară şi suficientă ca mulţimea $A \subset \mathbb{R}^n$ să fie închisă este ca mulţimea sa complementară $CA = \mathbb{R}^n \setminus A$ să fie deschisă.*

Demonstraţie

Necesitatea. Presupunem că mulţimea A este închisă şi demonstrăm că mulţimea CA este deschisă.

Dacă $b \in CA$, atunci $b \notin A = \overline{A}$. Prin urmare, b nu este punct aderent pentru A. Rezultă că există $V \in \mathcal{V}(b)$, astfel încât $V \cap A = \emptyset$, deci $V \subset CA$. Aşadar, b este punct interior pentru CA, deci CA este deschisă.

Suficienţa. Presupunem că mulţimea CA este deschisă şi demonstrăm că A este închisă. Aceasta revine la a arăta că $\overline{A} \subset A$, ceea ce este echivalent cu $CA \subset C\overline{A}$.

Fie deci $b \in CA$. Cum CA este deschisă, rezultă că există $V \in \mathcal{V}(b)$ astfel încât $V \subset CA$. Atunci $V \cap CA = \emptyset$, de unde rezultă că b nu este punct aderent pentru A, deci $b \in C\overline{A}$.

Observaţia 3.7.4. Bila închisă $\check{B}(a,r)$ este o mulţime închisă, $\forall\, a \in \mathbb{R}^n$ şi $\forall\, r > 0$.

Din Teorema 3.7.1. rezultă că este suficient să arătăm că mulţimea $C\check{B}(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^n;\ \|x - a\| > r\}$ este o mulţime deschisă.

Fie $b \in C\check{B}(a,r)$ şi fie $0 < \varepsilon < \|b - a\| - r$. Dacă $x \in B(b,\varepsilon)$, atunci $\|x - b\| < \varepsilon$. În continuare avem:

$$\|b - a\| \le \|b - x\| + \|x - a\| < \|b - a\| - r + \|x - a\|,$$

de unde rezultă că $\|x - a\| > r$, deci că $x \in \check{B}(a,r)$.

Aşadar, $B(b,\varepsilon) \subset \check{B}(a,r)$, deci b este punct interior pentru $\check{B}(a,r)$. Cum b a fost arbitrar rezultă că $\check{B}(a,r)$ este deschisă.

Exemple

1. Dacă X = Υ, atunci $\overset{\vee}{B}(a,r)$= $[a - r,\ a + r]$. Rezultă că orice interval simetric închis este o mulțime închisă. Cum orice interval închis $[\alpha,\beta]$ se poate reprezenta ca un interval închis simetric, rezultă că orice interval închis din Υ este o mulțime închisă.

2. Fie $X = \mathbb{R}^2$, $a \in \mathbb{R}^2$ şi $r > 0$. Din punct de vedere geometric, mulțimea $\overset{\vee}{B}_2(a,r) = \left\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2;\ (x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2 \le r^2\right\}$ reprezintă discul închis (cercul inclusiv circumferința) cu centrul în a şi de rază r, iar mulțimea $\overset{\vee}{B}_\infty(a,r) = \left\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2;\ |x_1-a_1|\le r,\ |x_2-a_2|\le r\right\}$ reprezintă pătratul închis (inclusiv laturile) cu centrul în a şi de latură $2r$.

3. Dacă $X = \mathbb{R}^3$, atunci $\overset{\vee}{B}_2(a,r)$ (sfera închisă cu centrul în a şi de rază r) este o mulțime închisă.

De asemenea, mulțimea $\overset{\vee}{B}_\infty(a,r)$, care reprezintă cubul închis (inclusiv fețele) cu centrul în a şi de muchie $2a$ este o mulțime închisă.

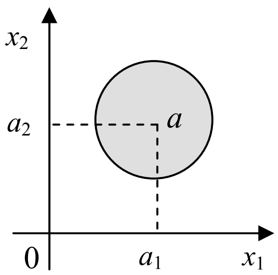


Fig. 4

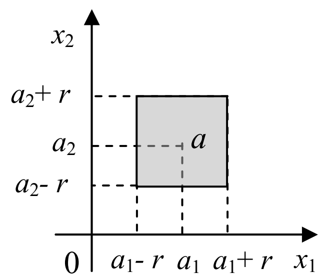


Fig. 5

Proprietățile mulțimilor închise sunt puse în evidență de următoarea propoziție.

Propoziția 3.7.3.
(i) *Orice reuniune finită de mulțimi închise este o mulțime închisă.*
(ii) *O intersecție oarecare de mulțimi închise este o mulțime închisă.*
(iii) *Mulțimile* $\mathbb{R}^n$ *şi* $\varnothing$ *sunt închise.*

Demonstrație
Demonstrația rezultă din Teorema 3.7.1, Propoziția 3.7.2 şi relațiile De Morgan. De exemplu.

(i) Fie $A_1, A_2,\ldots, A_m$ mulțimi închise şi fie $A = \bigcup_{i=1}^{m} A_i$.

Din Teorema 3.7.1. rezultă că este suficient să demonstrăm că mulțimea CA este deschisă. Conform relațiilor De Morgan, $CA = \bigcap_{i=1}^{m} CA_i$. Cum CA_i este deschisă pentru orice $i = \overline{1,m}$, din Propoziția 3.7.2 rezultă că $\bigcap_{i=1}^{m} CA_i = CA$ este deschisă.

Definiția 3.7.5. *Se numeşte frontiera mulțimii A şi se notează cu* $Fr\,A$*, mulțimea:*

$$Fr\,A = \overline{A} \cap \overline{CA}\,.$$

Lema 3.7.1. *Pentru orice* $A \subset \mathbb{R}^n$ *avem*:

$$C\overset{\circ}{A} = \overline{CA} \;\; \text{și} \;\; \overline{CA} = \overset{\circ}{B} \;\; \text{unde} \;\; B = CA.$$

Demonstrație

Dacă $b \in C\overset{\circ}{A}$, atunci $b \notin \overset{\circ}{A}$, deci oricare ar fi $V \in \mathcal{V}(b)$ avem $V \cap CA \neq \varnothing$. Rezultă că $b \in \overline{CA}$. Reciproc, dacă $b \in \overline{CA}$, atunci $V \cap CA \neq \varnothing$. Rezultă că $b \notin \overset{\circ}{A}$, deci $\overline{CA} \subset C\overset{\circ}{A}$. În mod asemănător se demonstrează cealaltă egalitate.

Propoziția 3.7.4. *Fie A o mulțime oarecare din* $\mathbb{R}^n$. *Atunci*

(i) $\overset{\circ}{A}$ *este o mulțime deschisă.*
(ii) $\overline{A}$ *este o mulțime închisă.*
(iii) $Fr\,A$ *este o mulțime închisă şi* $Fr\,A = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}$.

Demonstrație

(i) Fie $a \in \overset{\circ}{A}$. Atunci există $r > 0$ astfel încât $B(a.r) \subset A$.
Dacă notăm cu $V = B(a, r)$, atunci conform Observației 3.7.3. V este o mulțime deschisă. Aşadar, avem: $V = \overset{\circ}{V} \subset \overset{\circ}{A}$, de unde rezultă că a este punct interior pentru $\overset{\circ}{A}$, deci $\overset{\circ}{A}$ este o mulțime deschisă.

(ii) Din Lema 3.7.1. rezultă că $C\overline{A} = \overset{\circ}{B}$ unde $B = CA$. Aşadar, $C\overline{A}$ este deschisă, de unde rezultă că mulțimea $\overline{A}$ este închisă (Vezi Teorema 3.7.1.).

(iii) Din Lema 3.7.1. rezultă:

$$Fr\,A = \overline{A} \cap \overline{CA} = \overline{A} \cap C\overset{\circ}{A} = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}\,.$$

Faptul că $Fr\,A$ este închisă rezultă din (ii).

Teorema 3.7.2. *Fie* $A \subset \mathbb{R}^n$ *o mulţime oarecare. Atunci:*

(i) Un punct $b \in \mathbb{R}^n$ *aparţine închiderii* $\overline{A}$ *a mulţimii A, dacă şi numai dacă există un şir* $\{a_n\}$ *de puncte din A,* $a_n \to b$.

(ii) Mulţimea A este închisă dacă şi numai dacă limita oricărui şir convergent de elemente din A aparţine lui A.

Demonstraţie

(i) Dacă $b \in \overline{A}$, atunci $A \cap B(b,r) \neq \varnothing$, $\forall\ r > 0$. În particular, $B\left(b, \frac{1}{m}\right) \cap A \neq \varnothing$, $\forall\ m \in \mathbb{N}^*$. Fie $a_m \in B\left(b, \frac{1}{m}\right) \cap A$. Atunci $a_m \in A$ şi $a_m \to b$ deoarece $\|a_m - b\| < \frac{1}{m}$ şi $\frac{1}{m} \to 0$.

Reciproc, dacă $a_m \in A$, $\forall\ m \in \mathbb{N}^*$ şi $a_m \to b$, atunci $\forall\ r > 0\ \exists\ m_r \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\|a_m - b\| < r$, $\forall\ m \geq m_r$. Rezultă că $A \cap B(b,r) \neq 0$, $\forall\ r > 0$, adică $b \in \overline{A}$.

(i) Fie A o mulţime închisă şi fie $\{a_m\}$ un şir de elemente din A, $a_m \to b$. Din (i) rezultă că $b \in \overline{A}$. Cum A este închisă, rezultă că $b \in A$. Reciproc, dacă $b \in \overline{A}$, atunci din (i) rezultă că există un şir $\{a_m\}$ de elemente din A, $a_m \to b$. Conform ipotezei rezultă că $b \in A$, deci $\overline{A} \subset A$.

Definiţia 3.7.6. *Un punct* $b \in \mathbb{R}^n$ *se numeşte punct de acumulare pentru mulţimea* $A \subset \mathbb{R}^n$*, dacă oricare ar fi V vecinătate a lui b, există* $a \in A \cap V$, $a \neq b$. *Mulţimea punctelor de acumulare ale lui A se notează cu A'. (Incluziunea* $A' \subset \overline{A}$ *este evidentă).*

Teorema 3.7.3. *Fie* $A \subset \mathbb{R}^n$ *o mulţime oarecare. Atunci:*

(i) Un punct $b \in A'$ *dacă şi numai dacă există un şir* $\{a_k\}$ *de elemente din A,* $a_k \neq a_l$ *dacă* $k \neq l$*, astfel încât* $a_k \to b$.

(ii) A este închisă dacă şi numai dacă $A' \subset A$.

Demonstraţie

(i) Fie $b \in A'$. Atunci există $a_1 \in A \cap B(b,1)$, $a_1 \neq b$. Fie $r_1 = \|a_1 - b\|$ şi fie $a_2 \in A \cap B\left(b, \frac{r_1}{2}\right)$. Evident $a_2 \neq a_1$ şi $\|a_2 - b\| < \frac{r_1}{2} < \frac{1}{2}$. Fie $r_2 = \|a_2 - b\|$ şi fie $a_3 \in B\left(b, \frac{r_2}{2}\right) \cap A$, $a_3 \neq b$.

Evident $a_3 \neq a_2$, $a_3 \neq a_1$ şi $\| a_3 - a \| < \frac{r_2}{2} < \frac{1}{2^2}$. Prin inducţie completă se arată că există un şir $\{a_k\}$ de elemente din A, $a_k \neq a_l$ pentru $k \neq l$ şi $\| a_k - b \| < \frac{1}{2^{k-1}}$, deci $a_k \to b$.

(ii) Dacă A este închisă, atunci $\overline{A} \subset A$. Cum $A' \subset \overline{A}$ rezultă că $A' \subset A$. Reciproc, fie $b \in \overline{A}$. Din Teorema 3.7.2. rezultă că există un şir $\{a_k\}$ de puncte din A, $a_k \to b$. Dacă $\{a_k\}$ are o infinitate de termeni distincţi, din (i) rezultă că $b \in A'$. Cum $A' \subset A$, rezultă că $b \in A$. Dacă $\{a_k\}$ nu are o infinitate de termeni distincţi, atunci începând de la un anumit rang $a_k = b$, deci $b \in A$. Am dovedit incluziunea $\overline{A} \subset A$, dacă A este închisă.

Observaţia 3.7.5. Din Teorema 3.7.3. rezultă că dacă b este punct de acumulare pentru mulţimea A, atunci în orice vecinătate a sa se află o infinitate de elemente din A, distincte. Rezultă că mulţimile finite nu au puncte de acumulare, deci sunt închise în virtutea Teoremei 3.7.3. Mulţimile care nu au puncte de acumulare se mai numesc şi mulţimi discrete. Există şi mulţimi infinite discrete. De exemplu, mulţimea numerelor întregi $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ este discretă, deoarece, $\forall\ b \in \Upsilon$ şi $\forall\ V \in \mathcal{V}(b)$ mulţimea $V \cap \mathbb{Z}$ este finită.

Definiţia 3.7.7. *O mulţime $A \subset \mathbb{R}^n$ se numeşte mărginită dacă există $M > 0$ astfel încât $\|x\| \leq M$, oricare ar fi $x \in A$.*

Lema 3.7.2. (Cesàro). *Orice şir mărginit de elemente din $\mathbb{R}^n$ conţine un subşir convergent.*

Demonstraţie

Prezentăm demonstraţia pentru cazul particular $n = 2$.

Fie $z_k = (x_k, y_k)$, $k \in \mathbb{N}^*$ un şir de elemente din $\mathbb{R}^2$ mărginit. Rezultă că $\exists\ M > 0$ astfel încât $\| z_k \|_\infty \leq M$, $\forall\ k$. În particular, rezultă că şirurile de numere reale $\{x_k\}$ şi $\{y_k\}$ sunt mărginite. Din Lema Cesàro pentru şiruri de numere reale rezultă că există un subşir $\{x_{k_p}\}$ convergent. Fie $a = \lim\limits_{p \to \infty} x_{k_p}$. Aplicând din nou Lema Cesàro subşirului $\{y_{k_p}\}$ rezultă că există un subşir $\{y_{k_{p_l}}\}$ convergent în Υ la b. Din Teorema 3.1.1 rezultă că subşirul $z_{k_{p_l}} = \left(x_{k_{p_l}}, y_{k_{p_l}}\right)$, $l \in \mathbb{N}^*$ este convergent în $\mathbb{R}^2$ şi are limita $z = (a,b)$.

În teoria limitelor de funcţii este important de ştiut când o mulţime are puncte de acumulare. Teorema care urmează ne dă o condiţie suficientă ca o mulţime din $\mathbb{R}^n$ să aibă puncte de acumulare.

Teorema 3.7.4. (Weierstrass-Bolzano). *Orice mulţime mărginită şi infinită din $\mathbb{R}^n$ are cel puţin un punct de acumulare.*

Demonstraţie

Fie $A \subset \mathbb{R}^n$ o mulţime mărginită şi infinită. Mulţimea fiind mărginită, conţine un şir $\{x_k\}$ de elemente distincte. Deoarece A este mărginită, rezultă că $\{x_k\}$ este mărginit.

Din Lema 3.7.2. rezultă că există un subşir $\left\{x_{k_p}\right\}$, $x_{k_p} \to l \in \mathbb{R}^n$. Evident l este punct de acumulare pentru A.

Definiţia 3.7.8. *O mulţime $K \subset \mathbb{R}^n$ se numeşte compactă dacă este închisă şi mărginită.*

Din Propoziţia 3.7.3. rezultă că o reuniune finită de mulţimi compacte este o mulţime compactă, şi o intersecţie oarecare de mulţimi compacte este o mulţime compactă. Este de asemenea clar (din Observaţia 3.7.5), că orice mulţime finită este compactă.

3.8. Limite de funcţii

În cele ce urmează, prin funcţie vectorială înţelegem orice funcţie F definită pe o mulţime A din $\mathbb{R}^n$ cu valori în $\mathbb{R}^m$. Aşadar, pentru orice $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in A \subset \mathbb{R}^n$, imaginea $y = F(x) \in \mathbb{R}^m$, deci este de forma

$$F(x) = (y_1, y_2, \ldots, y_m),\ y_i \in \mathbb{R},\ i = \overline{1,m}.$$

Dacă notăm cu $f_i(x) = y_i$, $\forall\, x \in A$, $\forall\, i = \overline{1,m}$, atunci obţinem m funcţii scalare $f_i : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = \overline{1,m}$, pe care le numim componentele scalare ale funcţiei vectoriale F. Prin urmare avem:

$$F(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x)),\ \forall\, x \in A \quad \text{sau}$$

$$F = (f_1, f_2, \ldots, f_m) : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m.$$

Exemple

1. Funcţia $r(t) = (a\cos t,\ a\sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$ este o funcţie vectorială definită pe mulţimea $A = [0, 2\pi] \subset \mathbb{R}$ cu valori în $\mathbb{R}^2$.

2. Funcţia $r(u,v)=(a\sin u\cos v,\ a\sin u\sin v,\ a\cos u)$, $u\in[0,\pi]$ şi $v\in[0,2\pi]$ este o funcţie vectorială definită pe dreptunghiul $D=[0,\pi]\times[0,2\pi]\subset\mathbb{R}^2$ cu valori în $\mathbb{R}^3$.

Definiţia 3.8.1. *Fie* $F:A\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ *o funcţie vectorială,* $a=(a_1,\ldots,a_n)$ *un punct de acumulare pentru A şi* $L\in\mathbb{R}^m$. *Spunem că L este limita funcţiei vectoriale F în punctul a şi notăm cu* $L=\lim\limits_{x\to a}F(x)$, *dacă pentru orice vecinătate U a lui L, există o vecinătate V a lui a, astfel încât* $F(x)\in U$, *oricare ar fi* $x\in V\bigcap A$, $x\neq a$.

Teorema 3.8.1. *Următoarele afirmaţii sunt echivalente*:

(*i*) $L=\lim\limits_{x\to a}F(x)$.

(*ii*) *Pentru* $\forall\ \varepsilon>0$, $\exists\ \delta_\varepsilon>0$ *astfel încât* $\forall\ x\in A$, $x\neq a$ *cu proprietatea* $\|x-a\|<\delta_\varepsilon$ *rezultă* $\|F(x)-L\|<\varepsilon$ (*norma* $\|\ \|$ *este oricare din normele* $\|\ \|_\infty$ *sau* $\|\ \|_2$).

(*iii*) *Pentru orice şir* $\{a_k\}$ *de elemente din A,* $a_k\xrightarrow{\mathbb{R}^n}a$, $a_k\neq a$ *pentru* $\forall\ k\in\mathbb{N}^*$, *rezultă* $F(a_k)\xrightarrow{\mathbb{R}^m}L$.

Demonstraţie

(i) $\Rightarrow$(ii) Fie $\varepsilon>0$ şi fie $U=B(L,\varepsilon)$. Evident $U\in\mathcal{V}(L)$ şi conform (i) $\exists\ V\in\mathcal{V}(a)$ (depinzând în general de ε) astfel încât $F(x)\in U$, $\forall\ x\in V\bigcap A$, $x\neq a$.

Deoarece V este vecinătate pentru a rezultă că $\exists\ \delta_\varepsilon>0$ astfel încât $V\supset B(a,\delta_\varepsilon)$. Fie $x\in A$, $x\neq a$ cu $\|x-a\|<\delta_\varepsilon$. Atunci $x\in V\bigcap A$, $x\neq a$. Conform (i) $F(x)\in U$, deci $\|F(x)-L\|<\varepsilon$.

(ii) $\Rightarrow$(iii) Fie $\varepsilon>0$ arbitrar şi fie $\delta_\varepsilon>0$ cu proprietăţile din (ii). Dacă $\{x_k\}$ este un şir de elemente din A, $x_k\neq a$, $\forall\ k$ şi $x_k\to a$, atunci $\exists\ k_\varepsilon\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $\|x_k-a\|<\delta_\varepsilon$ pentru orice $k\geq k_\varepsilon$. Din (ii) rezultă că $\|F(x_k)-L\|<\varepsilon$, $\forall\ k\geq k_\varepsilon$, deci $F(x_k)\to L$.

(iii) $\Rightarrow$ (i). Presupunem prin absurd că (i) nu este adevărată, deci că $\exists\ U_0\in\mathcal{V}(L)$ astfel încât oricare ar fi $V\in\mathcal{V}(a)$, $\exists\ x_V\in V\bigcap A$, $x_V\neq a$ cu proprietatea că $F(x_V)\notin U_0$. În particular, pentru $V=B\left(a,\dfrac{1}{k}\right)$, rezultă că

$\exists \quad x_k \in A \cap B\left(a, \frac{1}{k}\right), \quad x_k \neq a$ astfel încât $F(x_k) \notin U_0, \quad \forall \quad k \in \mathbb{N}^*$. Cum $x_k \in B\left(a, \frac{1}{k}\right)$ rezultă că $\| x_k - a \| < \frac{1}{k}$, deci că $x_k \to a$. Din (iii) rezultă acum că $F(x_k) \to L$. Acest lucru contrazice faptul că $F(x_k) \notin U_0$, $\forall \ k \in \mathbb{N}^*$ şi cu aceasta demonstrația este terminată.

Observația 3.8.1. Fie $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, a un punct de acumulare pentru A şi $l \in \mathbb{R}$. Din Teorema 3.8.1. rezultă că $l = \lim\limits_{x \to a} f(x)$ dacă $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ \delta_\varepsilon > 0$ astfel încât $\forall\ x \in A$, $x \neq a$ cu proprietatea $|x - a| < \delta_\varepsilon$ rezultă că $|f(x) - l| < \varepsilon$ (deoarece pe $\mathbb{R}$, $\|x\|_2 = \|x\|_\infty = |x|$).

Am reobținut astfel definiția limitei unei funcții învățate în liceu.

Teorema 3.8.2. *Fie* $F = (f_1, f_2, \ldots, f_m) : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, *a un punct de acumulare pentru A şi* $L = (l_1, \ldots, l_m) \in \mathbb{R}^m$. *Atunci ,* $L = \lim\limits_{x \to a} F(x)$ *dacă şi numai dacă* $l_i = \lim\limits_{x \to a} f_i(x)$, *oricare ar fi* $i = \overline{1, m}$.

Demonstrație

Fie $\{x_k\}$ un şir de elemente din A, $x_k \neq a$ pentru orice k, $x_k \to a$. Din Teorema 3.8.1. rezultă că $F(x_k) = (f_1(x_k), \ldots, f_m(x_k)) \xrightarrow{\mathbb{R}^m} L = (l_1, \ldots, l_m)$, ceea ce este echivalent cu faptul că $f_i(x_k) \xrightarrow{\mathbb{R}} l_i$, $\forall\ i = \overline{1, m}$, deci că $l_i = \lim\limits_{x \to a} f_i(x)$, $i = \overline{1, m}$.

Reciproc, dacă $l_i = \lim\limits_{x \to a} f_i(x)$, $\forall\ i = \overline{1, m}$, atunci $f_i(x_k) \xrightarrow{\mathbb{R}} l_i$, $\forall\ i = \overline{1, m}$. Din Teorema 3.1.1 rezultă că

$$F(x_k) = (f_1(x_k), \ldots, f_m(x_k)) \xrightarrow{\mathbb{R}^m} L = (l_1, \ldots, l_m),$$

deci că $L = \lim\limits_{x \to a} F(x)$.

Observația 3.8.2. Din Teorema 3.8.2. rezultă că studiul limitei unei funcții vectoariale revine la studiul limitelor componentelor sale scalare. Din această cauză este suficient să studiem în continuare numai limite de funcții scalare, adică funcții de forma $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Fie $a = (a_1, \ldots, a_n)$ un punct de acumulare al mulțimii A şi fie $l \in \mathbb{R}$. Dacă folosim norma $\| \ \|_\infty$, atunci $l = \lim\limits_{x \to a} f(x)$ dacă $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ \delta_\varepsilon > 0$ astfel încât $\forall\ a \in A$, cu proprietatea $|x_1 - a_1| < \delta_\varepsilon, \ldots, |x_n - a_n| < \delta_\varepsilon$ rezultă că $\left| f(x_1, \ldots, x_n) - l \right| < \varepsilon$.

Să considerăm acum cazul şi mai simplu când $n = 2$.

Fie deci $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ şi $l \in \mathbb{R}$. Vom folosi notațiile (x, y) în loc de (x_1, x_2) şi (a, b) în loc de (a_1, a_2).

Din cele de mai sus rezultă că $l = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ y \to b}} f(x, y)$ dacă $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ \delta_\varepsilon > 0$ astfel încât, $\forall\ (x, y) \in A$ cu proprietatea $|x - a| < \delta_\varepsilon$, $|y - b| < \delta_\varepsilon$ rezultă $\left| f(x, y) - l \right| < \varepsilon$. Din Teorema 3.8.1. rezultă că această definiție este echivalentă cu următoarea: $l = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ y \to b}} f(x, y)$ dacă şi numai dacă pentru orice şir (x_n, y_n) de elemente din A, $(x_n, y_n) \neq (a, b)$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, $(x_n, y_n) \xrightarrow{\mathbb{R}^2} (a, b)$ rezultă că şirul $f(x_n, y_n) \xrightarrow{\mathbb{R}} l$.

Exemple

1. Fie $f(x, y) = \dfrac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Observăm că există $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ y \to b}} f(x, y) = 0$.

Într-adevăr, deoarece $\left| x^3 \right| \leq \left(x^2 + y^2 \right)^{3/2}$ şi $\left| y^3 \right| \leq \left(x^2 + y^2 \right)^{3/2}$ rezultă că

$$\left| f(x, y) \right| \leq \frac{2\left(x^2 + y^2 \right)^{3/2}}{x^2 + y^2} = 2\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Dacă $(x_n, y_n) \xrightarrow{\mathbb{R}^2} (0, 0)$ atunci $\sqrt{x_n^2 + y_n^2} \to 0$ şi deci $f(x_n, y_n) \to 0$. Am arătat deci că $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} = 0$.

2. Fie funcția $f(x, y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$, $\forall\ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Vom arăta că nu există $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} f(x, y)$.

Într-adevăr, considerăm șirurile $\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)$ respectiv $\left(\frac{2}{n},\frac{1}{n}\right)$. Ambele șiruri converg în $\mathbb{R}^2$ la (0,0). Pe de altă parte $f\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)\to 0$ și $f\left(\frac{2}{n},\frac{1}{n}\right)\to\frac{3}{5}$, de unde rezultă că nu există $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

Teorema 3.8.3. (Cauchy-Bolzano). *Fie* $f : A\subset\mathbb{R}^n\to\Upsilon$, *și* $a\in\mathbb{R}^n$ *un punct de acumulare pentru* A. *Condiția necesară și suficientă să existe* $l=\lim\limits_{x\to a}f(x)\in\mathbb{R}$ *este că pentru orice* $\varepsilon>0$ *să existe* $V\in\mathcal{V}(a)$ *astfel încât,* $\forall$ $x',x''\in V\cap A$, $x'\neq a$, $x''\neq a$ *să avem* $\left|f(x')-f(x'')\right|<\varepsilon$.

Demonstrație

Necesitatea. Fie $l=\lim\limits_{x\to a}f(x)\in\mathbb{R}$. Atunci, $\forall$ $\varepsilon>0$, $\exists$ $V\in\mathcal{V}(a)$ astfel încât $\forall$ $x\in V\cap A$, $x\neq a$ avem $\left|f(x)-l\right|<\frac{\varepsilon}{2}$ Dacă $x',x''\in V\cap A$, $x'\neq a$, $x''\neq a$, atunci $\left|f(x')-f(x'')\right|\le\left|f(x')-l\right|+\left|l-f(x'')\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$.

Suficiența. Fie $\varepsilon>0$ și $V\in\mathcal{V}(a)$ cu proprietățile din enunțul teoremei și fie $\{x_k\}$ un șir de elemente din A, $x_k\neq a$ pentru orice $k\in\mathbb{N}^*$, $x_k\to a$. Atunci există un rang $k_\varepsilon\in\mathbb{N}^*$ (acest rang depinde de V care la rândul său depinde de ε) astfel încât $x_k\in V$, $\forall$ $k\ge k_\varepsilon$. Rezultă că $\left|f(x_k)-f(x_l)\right|<\varepsilon$ pentru orice k și $l\ge k_\varepsilon$, deci că $\{f(x_k)\}$ este un șir fundamental în Υ. Din criteriul general de convergență al lui Cauchy rezultă că $\{f(x_k)\}$ este convergent. Din Teorema 3.8.1, punctul (iii), rezultă că există $\lim\limits_{x\to a}f(x)$.

Pentru o funcție $f : A\subset\mathbb{R}^n\to\Upsilon$ se pot considera pe lângă limita definită anterior, în care variabilele $x_1,x_2,\dots,x_n$ tind simultan la $a_1,a_2,\dots,a_n$ și limite iterate, în care variabilele $x_1,\dots,x_n$ tind pe rând la $a_1,\dots,a_n$.

Pentru a lămuri această problemă considerăm cazul unei funcții de două variabile. Fie dreptunghiul $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, |x-a|<h,\ |y-b|<k\right\}$ și $f : A\to\Upsilon$.

Presupunem că pentru orice $x\in(a-h,\,a+h)$ există $\lim\limits_{y\to b}f(x,y)$. Evident, această limită depinde de x și definește o funcție $\varphi(x)=\lim\limits_{y\to b}f(x,y)$,

$x \in (a-h,\, a+h)$. Dacă presupunem în plus că există $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x)$, atunci această limită se notează cu $\lim\limits_{x\to a}\lim\limits_{y\to b} f(x,y)$ şi se numeşte limita iterată după y şi x a funcţiei f în punctul (a,b). În mod analog se defineşte $\lim\limits_{y\to b}\lim\limits_{x\to a} f(x,y)$.

Limitele iterate nu sunt în general egale. De exemplu, dacă $f(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ atunci se constată imediat că $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y) = 1$ şi $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y) = -1$. Remarcăm faptul că $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$ nu există în acest caz. (Vezi Exemplul 2).

Pentru funcţia $f(x,y) = x\sin\dfrac{1}{y}$, $y \neq 0$, avem $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = 0$, deoarece $\left| x\sin\dfrac{1}{y} \right| \le |x|$. Observăm de asemenea că $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y) = 0$ în timp ce cealaltă limită iterată $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)$ nu există.

Legătura dintre limitele iterate şi limita în raport cu ansamblul variabilelor $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x,y)$ este pusă în evidenţă de următoarea propoziţie.

Propoziţia 3.8.1. *Dacă există* $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x,y) = l$ *şi dacă pentru orice* $x \in (a-h,\, a+h)$ *există* $\varphi(x) = \lim\limits_{y\to b} f(x,y)$, *atunci există* $\lim\limits_{x\to a}\lim\limits_{y\to b} f(x,y) = l$.

Demonstraţie

Pentru $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ \delta_\varepsilon > 0$ astfel încât $\forall\ (x,y) \in D$ cu proprietatea $|x-a| < \delta_\varepsilon$, $|y-b| < \delta_\varepsilon$ avem $|f(x,y) - l| < \varepsilon$. Trecând la limită după y obţinem: $|\varphi(x) - l| \le \varepsilon$ pentru orice $x \in (a-h,\, a+h)$ cu proprietatea $|x-a| < \delta_\varepsilon$. Rezultă că există $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = l$, deci că există $\lim\limits_{x\to a}\lim\limits_{y\to b} f(x,y) = l$.

Corolar. *Dacă există limitele iterate şi sunt diferite, atunci nu există* $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f\left(x,y\right)$.

3.9. Funcții continue

Fie $F:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Pentru orice submulțime $A\subset\mathbb{R}^n$ notăm cu $F\left(A\right)=$ $=\left\{F(x)\middle|\ x\in A\right\}$. Evident $F\left(A\right)\subset\mathbb{R}^m$ şi se numeşte imaginea directă a mulțimii A prin F. Pentru orice submulțime $B\subset\mathbb{R}^m$ notăm cu $F^{-1}\left(B\right)=\left\{x\in\mathbb{R}^n \middle|\ F(x)\in B\right\}$. Mulțimea $F^{-1}\left(B\right)$ se numeşte preimaginea mulțimii B prin F.

Definiția 3.9.1. *Fie* $F:A\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ *şi* $a\in A$. *Spunem că F este continuă în punctul a dacă* $\forall\ U\in\mathcal{V}\left[F(a)\right]$, $\exists\ V\in\mathcal{V}\ (a)$ *astfel încât* $F\left(V\bigcap A\right)\subset U$. *Dacă F este continuă în fiecare punct din A, atunci F este continuă pe A.*

Observația 3.9.1. Dacă $a\in A$ este punct de acumulare pentru A, atunci F este continuă în $x=a$ dacă şi numai dacă există $\lim\limits_{x\to a} F(x)=F(a)$. Dacă $a\in A$ nu este punct de acumulare pentru A (un astfel de punct se numeşte punct izolat), atunci există $V\in\mathcal{V}\ (a)$ astfel încât $V\bigcap A=\{a\}$ şi evident $F\left(V\bigcap A\right)\subset U$, $\forall\ U\in\mathcal{V}\left[F(a)\right]$. Rezultă că orice funcție este continuă într-un punct izolat din domeniul său de definiție.

Teorema 3.9.1. *Următoarele afirmații sunt echivalente:*

(i) F este continuă în $a\in A$

(ii) $\forall\ \varepsilon>0$, $\exists\ \delta_\varepsilon>0$ *astfel încât* $\forall\ x\in A$ *cu proprietatea* $\left\|x-a\right\|<\delta_\varepsilon$ *rezultă că* $\left\|F(x)-F(a)\right\|<\varepsilon$

(iii) Pentru orice şir $\left\{x_k\right\}$ *de elemente din A,* $x_k\to a$, *rezultă* $F\left(x_k\right)\to F(a)$.

Demonstrația rezultă din Teorema 3.8.1 şi Observația 3.9.1, cu mențiunea că dacă $a\in A$ este un punct izolat, atunci oricare din afirmațiile (i)-(iii) este evidentă.

Teorema 3.9.2. *O funcție vectorială* $F = (f_1, \ldots, f_n) : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *este continuă în punctul* $a \in A$ *dacă și numai dacă fiecare componentă a sa* $f_i : A \to \mathbb{R}$ *este continuă în* a.

Demonstrația rezultă din Teorema 3.8.2 şi Observația 3.9.1 .

Din Teorema 3.9.2. rezultă că este suficient să studiem continuitatea funcțiilor scalare.

Fie $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ şi $a = (a_1, \ldots, a_n) \in A$. Dacă folosim norma $\| \ \|_\infty$, atunci f este continuă în a dacă $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ \delta_\varepsilon > 0$ astfel încât, oricare ar fi $x = (x_1, \ldots, x_n) \in A$ cu proprietatea $|x_1 - a_1| < \delta_\varepsilon, \ldots, |x_n - a_n| < \delta_\varepsilon$ rezultă

$$\left| f(x_1, \ldots, x_n) - f(a_1, \ldots, a_n) \right| < \varepsilon .$$

În continuare vom considera cazul funcțiilor de 2 variabile şi vom folosi notația (x, y) în loc de (x_1, x_2) şi (a, b) în loc de (a_1, a_2).

Dacă $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ şi $(a, b) \in A$, atunci f este continuă în (a, b) dacă $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ \delta_\varepsilon > 0$ astfel încât $\forall\ (x, y) \in A$ cu $|x - a| < \delta_\varepsilon$, $|y - b| < \delta_\varepsilon$ rezultă $\left| f(x, y) - f(a, b) \right| < \varepsilon$. Această definiție este echivalentă cu următoarea: pentru orice şir $\{(x_n, y_n)\}$ de puncte din A, $(x_n, y_n) \xrightarrow{\mathbb{R}^2} (a, b)$ rezultă că $f(x_n, y_n) \xrightarrow{\mathbb{R}} f(a, b)$.

Exemple

1. Funcția $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy + 5$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ este continuă pe $\mathbb{R}^2$, deoarece $\forall\ (a, b) \in \mathbb{R}^2$ şi $\forall\ (x_n, y_n) \to (a, b)$ rezultă că $f(x_n, y_n) \to f(a, b)$.

2. Funcția $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} & \text{dacă } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{dacă } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

este continuă pe $\mathbb{R}^2$.

Într-adevăr, dacă $(a, b) \neq (0,0)$ afirmația rezultă din definiția cu şiruri. Continuitatea în origine rezultă din faptul că, aşa cum s-a arătat în subcap. 3.8, $\exists \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} = 0$.

3. Funcția $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{dacă } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{dacă } (x,y)=(0,0)\end{cases}$

nu este continuă în origine, deoarece, aşa cum s-a arătat în subcap. 3.8, această funcție nu are limită în acest punct.

Definiția 3.9.2. *Fie* $f:A\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $a=(a_1,\ldots,a_n)\in A$ *şi* $A_i=$ $=\{t\in\mathbb{R}\mid(a_1,\ldots,a_{i-1},t,a_{i+1},\ldots,a_n)\in A\}$, $i=\overline{1,n}$. *Spunem că f este continuă în raport cu variabila* x_i *în punctul a dacă funcția de o variabilă*:

$$t\to f(a_1,\ldots,a_{i-1},t,a_{i+1},\ldots,a_n):A_i\to\mathbb{R}$$

este continuă în punctul $t=a_i$.

Observația 3.9.2. Dacă $f:A\subset\mathbb{R}^n\to\Upsilon$ este continuă în $a\in A$, atunci f este continuă în a în raport cu orice variabilă x_i, $i=\overline{1,n}$.

Afirmația reciprocă nu este în general adevărată. Există funcții continue într-un punct în raport cu fiecare variabilă dar care nu sunt continue în acel punct.

Exemplu. $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{dacă } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{dacă } (x,y)=(0,0).\end{cases}$

Observăm că f nu este continuă în origine, în raport cu ansamblul variabilelor, deoarece nu are limită în origine.

Într-adevăr, şirurile $\left\{\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)\right\}$ şi $\left\{\left(\frac{2}{n},\frac{1}{n}\right)\right\}$ converg în $\mathbb{R}^2$ la (0,0) şi $\lim\limits_{n\to\infty}f\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}\neq\lim\limits_{n\to\infty}f\left(\frac{2}{n},\frac{1}{n}\right)=\frac{2}{5}$.

Pe de altă parte, $f(x,0)=0$, $\forall\ x\in\Upsilon$, de unde rezultă că funcția $x\to f(x,0):\Upsilon\to\Upsilon$ este continuă în $x=0$, deci f este continuă în (0,0) în raport cu x. Analog, f este continuă în (0,0) în raport cu y.

Teorema 3.9.3. *Fie* $F:A\subset\mathbb{R}^n\to B\subset\mathbb{R}^m$ *şi* $G:B\subset\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^p$. *Dacă F este continuă în a* $\in$ *A şi G este continuă în b = F(a)* $\in$ *B, atunci funcția compusă* $H=G\circ F:A\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^p$ *este continuă în punctul a.*

Demonstrație

Demonstrația rezultă din Teorema 3.9.1 punctul (iii). Într-adevăr, dacă $\{x_k\}$ este un şir oarecare de elemente din *A*, $x_k \to a$, atunci $F(x_k) \to F(a) = b$ şi $G[F(x_k)] \to G[F(a)]$. Aşadar, $H(x_k) \to H(a)$, deci *H* este continuă în *a*.

Teorema 3.9.4. *Dacă* $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \Upsilon$ *este continuă în punctul* $a \in A$ *şi* $f(a) > 0$ $[f(a) < 0]$, *atunci există o vecinătate* $V \in \mathcal{V}(a)$ *astfel încât* $f(x) > 0$ $[f(x) < 0]$ oricare ar fi $x \in V \cap A$.

Demonstrație

Presupunem $f(a) > 0$ şi notăm cu $\varepsilon = \frac{1}{2} f(a)$. Deoarece *f* este continuă în $x = a$ rezultă că există $\delta_\varepsilon > 0$ astfel încât $\forall\ x \in A$ cu $\|x - a\| < \delta_\varepsilon$ avem $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Dacă notăm cu $V = B(a, \delta_\varepsilon)$, atunci $V \in \mathcal{V}(a)$ şi pentru orice $x \in V \cap A$ avem:

$$\frac{1}{2} f(a) = f(a) - \varepsilon < f(x) < f(a) + \varepsilon = \frac{3}{2} f(a), \text{ deci } f(x) > 0.$$

Teorema 3.9.5. *Fie f, g* : $A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *şi* $\alpha, \beta \in \Upsilon$. *Dacă f şi g sunt continue în* $a \in A$, *atunci funcțiile* $\alpha f + \beta g$ *şi fg sunt continue în a. Dacă* $g(a) \neq 0$, *atunci funcția* $\frac{f}{g}$ *este continuă în a.*

Demonstrație

Fie $\{x_k\}$ un şir de elemente din *A*, $x_k \to a$. Din ipoteză rezultă că $f(x_k) \to f(a)$ şi $g(x_k) \to g(a)$. Ținând seama de proprietățile şirurilor convergente de numere reale rezultă că:

$$(\alpha f + \beta g)(x_k) = \alpha f(x_k) + \beta g(x_k) \to \alpha f(a) + \beta g(a) = (\alpha f + \beta g)(a)$$

$$(fg)(x_k) = f(x_k) g(x_k) \to f(a) g(a) = (fg)(a),$$

de unde rezultă că $\alpha f = \beta g$ şi *fg* sunt continue în *a* .

Dacă $g(a) \neq 0$, atunci din Teorema 3.9.4, rezultă că există $V \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât $g(x) \neq 0$, $\forall\ x \in V \cap A$. Renunțând, eventual la un număr finit de termeni ai şirului $\{x_k\}$ şi renotând termenii acestui şir, putem presupune că $x_k \in V \cap A$, $\forall\ k \in \mathbb{N}^*$, deci că $g(x_k) \neq 0$, $\forall\, k \in \mathbb{N}^*$. Atunci $\left(\frac{f}{g}\right)(x_k) = \frac{f(x_k)}{g(x_k)} \to \frac{f(a)}{g(a)} = \left(\frac{f}{g}\right)(a)$, de unde rezultă că $\frac{f}{g}$ este continuă în punctul *a*.

Teorema 3.9.6. *Următoarele afirmații sunt echivalente:*

(i) $F:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *este continuă pe* $\mathbb{R}^n$

(ii) $F^{-1}(D)$ *este deschisă, oricare ar fi* $D \subset \mathbb{R}^m$ *deschisă.*

(iii) $F^{-1}(B)$ *este închisă, oricare ar fi* $B \subset \mathbb{R}^m$ *închisă.*

Demonstrație

(i) $\Rightarrow$ (ii). Fie $D \subset \mathbb{R}^m$ deschisă și fie $a \in F^{-1}(D)$ oarecare. Atunci $b = F(a) \in D$ și deoarece D este deschisă, există $U \in \mathcal{V}(b)$ astfel încât $U \subset D$. Cum F este continuă în a, rezultă că $\exists\ V \in \mathcal{V}(a)$ cu proprietatea că $F(V) \subset U \subset D$, deci $V \subset F^{-1}(U) \subset F^{-1}(D)$. Așadar, a este punct interior pentru $F^{-1}(D)$, deci $F^{-1}(D)$ este deschisă.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Fie $a \in \mathbb{R}^n$ oarecare și fie $b = F(a)$.

Dacă $U \in \mathcal{V}(b)$, atunci există $r > 0$ astfel încât $U \supset B(b,r)$. Cum $B(b,r)$ este deschisă, din (ii) rezultă că $V = F^{-1}(B(b,r))$ este deschisă. Evident $V \in \mathcal{V}(a)$ și $F(V) \subset U$, deci F este continuă în a.

Echivalența (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) rezultă din Teorema 3.7.1. și din observația imediată $CF^{-1}(B) = F^{-1}(CB)$, oricare ar fi $B \subset \mathbb{R}^m$.

3.10. Proprietățile funcțiilor continue pe mulțimi compacte și conexe

Reamintim că prin mulțime compactă în $\mathbb{R}^n$ se înțelege o mulțime închisă și mărginită.

Teorema 3.10.1. *Fie* $F:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *o funcție continuă. Dacă mulțimea* $K \subset \mathbb{R}^n$ *este compactă, atunci mulțimea* $F(K)$ *– imaginea sa directă prin F, este de asemenea compactă.*

Demonstrație

Vom arăta că $F(K) = \{F(x); x \in K\}$ este închisă și mărginită. Presupunem pentru început că $F(K)$ nu este mărginită. Atunci $\forall\ M > 0$, $\exists\ x_M \in K$ astfel încât $\|F(x_M)\| < M$.

În particular, pentru $M = \frac{1}{p}$, $p \in \mathbb{N}^*$ există $x_p \in K$ astfel încât

$$\left\| F\left(x_p\right) \right\| > p. \tag{3.31}$$

Deoarece mulțimea K este mărginită, rezultă că şirul $\left\{x_p\right\}$ este mărginit, deci conține un subşir $\left\{x_{p_l}\right\}$ convergent (conform lemei Cesàro). Fie $a = \lim\limits_{l \to \infty} x_{p_l}$. Cum K este închisă, rezultă că $a \in K$ (vezi Teorema 3.7.2).

În sfârşit, ținând seama de faptul că F este continuă, rezultă că $F(a) = \lim\limits_{l\to\infty} F\left(x_{p_l}\right)$. Pe de altă parte, din (3.31) avem $\left\|F\left(x_{p_l}\right)\right\| > p_l$, de unde rezultă că $\lim\limits_{p\to\infty}\left\|F\left(x_{p_l}\right)\right\| = \|F(a)\| = +\infty$. Am ajuns astfel la o contradicție, deoarece $\|F(a)\|$ este finită.

Vom arăta acum că $F(K)$ este închisă. Fie $b \in \overline{F(K)}$ oarecare. Din Teorema 3.7.2 rezultă că există un şir $\{y_p\}$ de elemente din $F(K)$ astfel încât $y_p \to b$.

Fie $x_p \in K$ cu proprietatea că $y_p = F\left(x_p\right)$. Aşa cum am arătat în prima parte a demonstrației există un subşir $x_{p_l} \to a$, $a \in K$ şi $y_{p_l} = F\left(x_{p_l}\right) \to F(a)$. Pe de altă parte $y_{p_l} \to b$, de unde rezultă că $b = F(a) \in F(K)$.

Am demonstrat că $\overline{F(K)} \subset F(K)$, deci că $F(K)$ este închisă.

Definiția 3.10.1. *Fie f* : $A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *mărginită. Spunem că f îşi atinge marginile pe mulțimea A dacă* $\exists\ x_M \in A$ *şi* $x_m \in A$ *astfel încât*

$$f\left(x_M\right) = M = \sup f(A) \text{ şi } f\left(x_m\right) = m = \inf f(A).$$

Teorema 3.10.2. *Fie f* : $K \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *o funcție continuă. Dacă mulțimea K este compactă atunci f este mărgintă pe K şi îşi atinge marginile pe K.*

Demonstrație

Faptul că f este mărginită pe K rezultă din Teorema 3.10.1. Fie $M = \sup f(K)$ şi $m = \inf f(K)$. Observăm că $M, m \in \overline{f(K)}$. Într-adevăr, dacă V este o vecinătate pentru M, atunci $\exists\ \varepsilon > 0$ astfel încât $V \supset (M-\varepsilon, M+\varepsilon)$. Din definiția marginii superioare, rezultă că există $x_\varepsilon \in K$ astfel încât $M - \varepsilon < f\left(x_\varepsilon\right)$. Aşadar, $V \cap f(K) \neq \emptyset$. Cum V a fost arbitrar, rezultă că M este punct aderent pentru $f(K)$. Analog se arată că $m \in \overline{f(K)}$. Pe de altă parte $f(K)$ este închisă, deci $M, m \in f(K)$. Aşadar, există $x_M \in K$ şi $x_m \in K$ astfel încât $M = f\left(x_M\right)$ şi $m = f\left(x_m\right)$.

Definiția 3.10.2. *O funcție* $F : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *se numeşte uniform continuă pe A, dacă* $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ \delta_\varepsilon > 0$ *astfel încât* $\forall\ x', x'' \in A$ *cu proprietatea* $\|x' - x''\| < \delta_\varepsilon$ *rezultă* $\left\|F(x') - F(x'')\right\| < \varepsilon$.

Reamintim că F este continuă pe A dacă este continuă în fiecare punct din A, deci dacă $\forall\ x \in A$ şi $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ \delta_{x,\varepsilon} > 0$ astfel încât $\forall\ x' \in A$ cu proprietatea $\|x' - x\| < \delta_{x,\varepsilon}$, rezultă că $\|F(x') - F(x)\| < \varepsilon$.

Prin urmare, deosebirea între continuitatea uniformă şi continuitatea pe A, constă în faptul că în cazul continuităţii uniforme, pentru orice $\varepsilon > 0$ există un număr $\delta_\varepsilon > 0$, acelaşi pentru toate punctele $x \in A$, astfel încât $\|F(x') - F(x'')\| < \varepsilon$ pentru orice $x', x'' \in A$ care satisfac condiţia $\|x' - x''\| < \delta_\varepsilon$. Evident, orice funcţie uniform continuă pe A este continuă pe A. Afirmaţia reciprocă nu este în general adevărată.

Exemplu. Funcţia $f(x) = x^2$, $x \in \Upsilon$ este continuă pe Υ, dar nu este uniform continuă pe Υ.

Pentru a arăta că f nu este uniform continuă pe Υ, va trebui să arătăm că $\exists\ \varepsilon_0 > 0$ astfel încât $\forall\ \delta > 0$, $\exists\ x'_\delta, x''_\delta \in \Upsilon$ cu proprietăţile:

$$|x'_\delta - x''_\delta| < \delta \text{ şi } |f(x'_\delta) - f(x''_\delta)| \geq \varepsilon_0 .$$

Fie $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{2}$ şi $\delta > 0$ oarecare. Observăm că dacă $x' = \sqrt{n+1}$ şi $x'' = \sqrt{n}$, atunci $|f(x') - f(x'')| = 1$, $\forall\ n \in \square^*$. Pe de altă parte $x' - x'' = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = $ $= \dfrac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \to 0$. Rezultă că $\exists$ un rang $n_\delta \in \square^*$ astfel încât $\dfrac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \delta$, $\forall\ n \geq n_\delta$. Dacă alegem $x'_\delta = \sqrt{n_\delta + 1}$ şi $x''_\delta = \sqrt{n_\delta}$, atunci $|x'_\delta - x''_\delta| < \delta$ şi $|f(x'_\delta) - f(x''_\delta)| = 1 > \varepsilon_0 = \dfrac{1}{2}$.

Aşadar f nu este uniform continuă pe Υ.

Propoziţia 3.10.1. *Dacă $f : I \subset \Upsilon \to \Upsilon$ este derivabilă şi are derivata mărginită pe intervalul I, atunci f este uniform continuă pe I.*

Demonstraţie

Fie $M > 0$ astfel încât $|f'(x)| \leq M$, $\forall\ x \in I$. Din Teorema creşterilor finite a lui Lagrange, rezultă că oricare ar fi $x, y \in I$, există ξ între x şi y, astfel încât $f(x) - f(y) = f'(\xi)(x - y)$. Aşadar, avem:

$$|f(x) - f(y)| = |f'(\xi)||x - y| \leq M|x - y|, \forall\ x, y \in I .$$

Fie $\varepsilon > 0$ şi fie $\delta_\varepsilon = \dfrac{\varepsilon}{M}$. Dacă $|x - y| < \delta_\varepsilon$ atunci $|f(x) - f(y)| <$ $< M \cdot \dfrac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$, deci f este uniform continuă pe I.

Exemplu

Funcția $f(x) = 2x + \sin^2 x$, $x \in \mathbb{R}$ este uniform continuă pe $\mathbb{R}$. Într-adevăr, $|f'(x)| = |2 + \sin 2x| \le 3$, $\forall \ x \in \mathbb{R}$ Din Propoziția 3.10.1 rezultă că *f* este uniform continuă pe $\mathbb{R}$.

Teorema următoare ne arată că pe mulțimi compacte noțiunile de continuitate şi continuitate uniformă sunt echivalente.

Teorema 3.10.3. *Fie* $F : K \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *continuă. Dacă mulțimea K este compactă, atunci F este uniform continuă pe K.*

Demonstrație

Presupunem prin absurd că *F* nu este uniform continuă pe *K*. Atunci $\exists\ \varepsilon_0 > 0$ astfel încât $\forall\ \delta > 0$, $\exists\ x'_\delta, x''_\delta \in K$ cu proprietățile $\|x'_\delta - x''_\delta\| < \delta$ şi $\|F(x'_\delta) - F(x''_\delta)\| \ge \varepsilon_0$.

În particular, pentru $\delta = \dfrac{1}{p}$, $p \in \mathbb{N}^*$ rezultă că există $x'_p, x''_p \in K$ cu proprietățile:

$$\|x'_p - x''_p\| < \frac{1}{p} \tag{3.32}$$

$$\left\|F\left(x'_p\right) - F\left(x''_p\right)\right\| \ge \varepsilon_0 . \tag{3.33}$$

Deoarece *K* este mărginită, şirul $\{x'_p\}$ este mărginit, deci există un subşir $x'_{p_l} \to a$. Cum *K* este închisă rezultă că $a \in K$ (Teorema 3.7.2). Pe de altă parte, din (3.32) rezultă că $x''_{p_l} \to a$.

Ținând seama că *F* este continuă avem:

$$F\left(x'_{p_l}\right) \to F(a) \text{ şi } F\left(x''_{p_l}\right) \to F(a).$$

Aşadar, $F\left(x'_{p_l}\right) - F\left(x''_{p_l}\right) \to F(a) - F(a) = 0$.

Am ajuns astfel la o contradicție, deoarece conform (3.33) $\left\|F\left(x'_{p_l}\right) - F\left(x''_{p_l}\right)\right\| \ge \varepsilon_0$, $\forall\ l \in \mathbb{N}^*$.

Definiția 3.10.3. *O mulțime* $A \subset \mathbb{R}^n$ *se numeşte* ***conexă*** *dacă nu există două mulțimi deschise* D_1 *şi* D_2 *cu proprietățile*:

$$A \subset D_1 \cup D_2,\ D_1 \cap D_2 \cap A = \varnothing,\ D_1 \cap A \ne \varnothing,\ D_2 \cap A \ne \varnothing .$$

Teorema 3.10.4. *O submulțime nevidă* $A \subset \mathbb{R}$ *este conexă dacă şi numai dacă este un interval* (*adică* $\forall\ x, y \in A$ *şi* $\forall\ x < z < y$ *rezultă* $z \in A$).

Demonstrație

Necesitatea. Fie $A \subset \mathbb{R}$ o mulțime conexă. Presupunem prin absurd că A nu este interval. Atunci $\exists\ a, b \in A$ şi $a < c < b$ astfel încât $c \notin A$.

Fie $D_1 = (-\infty, c)$ şi $D_2 = (c, \infty)$. Evident D_1 şi D_2 sunt mulțimi deschise în $\mathbb{R}$. Cum $a \in A \cap D_1$ şi $b \in A \cap D_2$, rezultă $A \cap D_1 \neq \varnothing$ şi $A \cap D_2 \neq \varnothing$. Pe de altă parte $D_1 \cap D_2 = \varnothing$, de unde rezultă $D_1 \cap D_2 \cap A = \varnothing$. În sfârşit $\forall\ x \in A$ avem $x \neq c$, deci sau $x < c$ sau $x > c$, de unde rezultă $A \subset D_1 \cup D_2$. Aşadar, A nu e conexă, ceea ce contrazice ipoteza făcută.

Suficiență. Fie $A \subset \mathbb{R}$ un interval. Presupunem prin absurd că A nu este o mulțime conexă, deci există două mulțimi deschise D_1 şi D_2 cu proprietățile din Definiția 3.10.3.

Fie $a_1 \in A \cap D_1$ şi $a_2 \in A \cap D_2$. Cum $A \cap D_1 \cap D_2 = \varnothing$, rezultă $a_1 \neq a_2$, deci putem presupune $a_1 < a_2$ şi deoarece A este interval, avem $[a_1, a_2] \subset A$.

Fie $E = A \cap D_1 \cap (-\infty, a_2)$ şi fie $c = \sup E$. Evident $a_1 \leq c \leq a_2$, deci $c \in A$. Pe de altă parte, observăm că $c < a_2$. Într-adevăr, dacă $c = a_2$, atunci $c \in D_2$ şi cum D_2 este deschisă, există $\varepsilon > 0$ astfel încât $(c - \varepsilon, c + \varepsilon) \subset D_2$. Cum $c = \sup E$, rezultă că $\exists\ x_\varepsilon \in E$ astfel încât $c - \varepsilon < x_\varepsilon \leq c$. Atunci $x \in E \cap D_2$, deci $A \cap D_1 \cap D_2 \neq \varnothing$, ceea ce nu este posibil. Aşadar, $c < a_2$. În continuare vom arăta că $c \notin D_1 \cup D_2$, de unde va rezulta contradicția $A \not\subset D_1 \cup D_2$. Într-adevăr, dacă $c \in D_1$, atunci $\exists\ r > 0$ astfel încât $(c - r, c + r) \subset D_1$. Fie $b \in (c, c + r) \cap (-\infty, a_2)$. Cum $a_1 \leq c < b < a_2$, rezultă $b \in A$, deci $b \in A \cap D_1 \cap (-\infty, a_2) = E$. Deoarece $c = \sup E$ avem $b \leq c$, ceea ce contrazice alegerea lui $b \in (c, c + r)$. Analog se arată că $b \notin D_2$.

Teorema 3.10.5. *Fie $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ continuă. Dacă $A \subset \mathbb{R}^n$ este conexă, atunci $F(A) \subset \mathbb{R}^m$ este conexă.*

Demonstrație

Dacă $f(A)$ nu este conexă, atunci $\exists$ două mulțimi deschise D_1, D_2 în $\mathbb{R}^m$ astfel încât

$$F(A) \subset D_1 \cup D_2;\ F(A) \cap D_1 \cap D_2 = \varnothing;\ F(A) \cap D_1 \neq \varnothing;\ F(A) \cap D_2 \neq \varnothing.$$

Deoarece F este continuă, din Teorema 3.9.6 rezultă că mulțimile $F^{-1}(D_1)$ şi $F^{-1}(D_2)$ sunt deschise în $\mathbb{R}^n$. Pe de altă parte avem:

$$A \subset F^{-1}(D_1) \cup F^{-1}(D_2);\ A \cap F^{-1}(D_1) \cap F^{-1}(D_2) = \varnothing;$$

$$A \cap F^{-1}(D_1) \neq \varnothing \text{ şi } A \cap F^{-1}(D_2) \neq \varnothing.$$

Rezultă că *A* nu este conexă, ceea ce contrazice ipoteza.

Definiţia 3.10.4. *Fie* $I \subset \mathbb{R}$ *un interval. Se spune că o funcţie* $f : I \to \mathbb{R}$ *are proprietatea Darboux pe I dacă imaginea* $f(J)$ *a oricărui interval* $J \subset I$ *este tot un interval.*

Corolarul 3.10.1. *Dacă* $I \subset \mathbb{R}$ *este un interval şi* $f : I \to \mathbb{R}$ *este continuă pe I, atunci f are proprietatea Darboux pe I.*

Demonstraţie

Dacă $J \subset I$ este un interval, atunci din Teorema 3.10.4 rezultă că *J* este o mulţime conexă, iar din Teorema 3.10.5 că $f(J)$ este o mulţime conexă în Υ. Aplicând din nou Teorema 3.10.4 rezultă $f(J)$ interval, deci *f* are proprietatea Darboux pe *I*.

Corolarul 3.10.2. *Dacă* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *este continuă şi* $f(a) f(b) < 0$, *atunci* $\exists\ a < c < b$ *astfel încât* $f(c) = 0$.

Demonstraţie

Din Corolarul 3.10.1 rezultă că mulţimea $J = f([a,b])$ este un interval în Υ. deoarece prin ipoteză funcţia *f* ia valori de semne contrare în *a* şi *b*, putem presupune $f(a) < 0 < f(b)$. Cum *J* este interval rezultă 0 $\in$ *J*, deci $\exists\ c \in (a,b)$ astfel încât $f(c) = 0$.

Corolarul 3.10.2 este util la rezolvarea ecuaţiilor. Să presupunem că ecuaţia $f(x) = 0$ admite o singură rădăcină în intervalul (a,b). Cea mai simplă metodă pentru aproximarea acestei rădăcini este metoda înjumătăţirii (sau a bipartiţiei), care constă în următoarele: împărţim segmentul $[a,b]$ în două părţi egale prin punctul $c = \dfrac{a+b}{2}$. Dacă $f(c) = 0$, atunci $x = c$ este rădăcina căutată. Dacă $f(c) \neq 0$, alegem acel interval $[a,c]$ sau $[c,b]$ care are proprietatea că funcţia ia valori de semne contrare în capete. Ştim că rădăcina se află în acest interval.

Procedăm cu acest interval aşa cum am procedat cu intervalul iniţial $[a,b]$. Algoritmul se încheie, fie când lungimea intervalului ajunge să fie mai mică decât eroarea dată (atunci putem lua rădăcina aproximativă egală cu mijlocul intervalului), fie când rădăcina exactă coincide cu mijlocul unui subinterval.

4. Calculul diferențial al funcțiilor de mai multe variabile

4.1. Derivate parțiale. Diferențiabilitate

Definiția 4.1.1. *Fie* $f : A \to \mathbb{R}$, *unde A este o mulțime deschisă din* $\mathbb{R}^2$. *Spunem că f este derivabilă parțial în raport cu x în punctul* $(a,b) \in A$, *dacă există şi e finită următoarea limită*:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h,b) - f(a,b)}{h}.$$

Această limită se numeşte derivata parțială a funcției f în raport cu x în punctul (a,b) şi se notează cu $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$ sau cu $f'_x(a,b)$. Dacă există $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$ în oricare punct $(a,b) \in A$, atunci funcția $(a,b) \to \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) : A \to \Upsilon$ o notăm cu $\frac{\partial f}{\partial x}$.

În mod analog se defineşte derivata parțială a funcției f în raport cu y în punctul (a,b) şi anume:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = f'_y(a,b) = \lim_{k \to 0} \frac{f(a,b+k) - f(a,b)}{k}.$$

Observăm că derivata parțială a lui f în raport cu x în punctul (a,b), este de fapt derivata obişnuită în punctul $t = a$, a funcției de o variabilă $t \to f(t,b)$. Rezultă că $\frac{\partial f}{\partial x}$ (respectiv $\frac{\partial f}{\partial y}$) se calculează derivând funcția f în raport cu x şi considerând variabila y constantă (respectiv derivând în raport cu y şi considerând variabila x constantă).

Exemplu. Fie $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x > 0, y > 0\}$ şi fie $f : A \to \mathbb{R}$, definită astfel: $f(x,y) = x^3 y^2 + 2x \ln y + x^y$. Atunci,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=3x^2y+2\ln y+yx^{y-1} \quad \text{şi} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=2x^3y+2\cdot\frac{x}{y}+x^y\ln x .$$

Pentru funcții de n variabile avem următoarea definiție.

Definiția 4.1.2. *Fie $A\subset\mathbb{R}^n$ o mulțime deschisă a $f:A\to\mathbb{R}$. Spunem că f este derivabilă (parțial) în raport cu variabila x_i în punctul $a=(a_1,\ldots,a_n)\in A$, dacă există şi e finită următoarea limită:*

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a_1,\ldots,a_{i-1},a_i+h,a_{i+1},\ldots,a_n)-f(a_1,\ldots,a_{i-1},a_i,a_{i+1},\ldots,a_n)}{h}.$$

Această limită se numeşte derivata parțială a funcției f în punctul $a\in A$ şi se notează cu $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ sau cu $f'_{x_i}(a)$.

În continuare vom prezenta noțiunea de funcție derivabilă cunoscută din liceu sub o formă echivalentă care va permite generalizarea acestor noțiuni pentru funcții vectoriale.

Fie $I\subset\mathbb{R}$ un interval deschis, $a\in I$ şi $f:I\to\mathbb{R}$. Reamintim că f este derivabilă în punctul a deci există şi e finită

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a).$$

Propoziția 4.1.1. *Fie $f:I\to\mathbb{R}$ şi $a\in I$ un punct interior al intervalului I. Următoarele afirmații sunt echivalente:*

(*i*) *f este derivabilă (diferențiabilă) în punctul a*

(*ii*) *Există o aplicație liniară $T=T_a:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ astfel încât*

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)-T(h)}{h}=0.$$

Demonstrație

Necesitatea. Prin ipoteză f este derivabilă în a, deci există $f'(a)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ şi e finită.

Dacă notăm cu $T(h)=f'(a)h$, pentru orice $h\in I$, atunci T este o aplicație liniară (evident continuă) pe Υ. Mai departe avem:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)-T(h)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}-f'(a)=0.$$

Suficiența. Prin ipoteză există $T:\Upsilon\to\Upsilon$ liniară astfel încât

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - T(h)}{h} = 0. \tag{4.1}$$

Pe de altă parte se ştie că $T : \Upsilon \to \Upsilon$ este liniară dacă şi numai dacă există $\lambda \in \Upsilon$ astfel încât $T(h) = \lambda h$, $\forall\ h \in \mathbb{R}$. Ţinând seama de această observaţie în (4.1) obţinem $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lambda$. Aşadar, f este derivabilă în a şi $f'(a) = \lambda$.

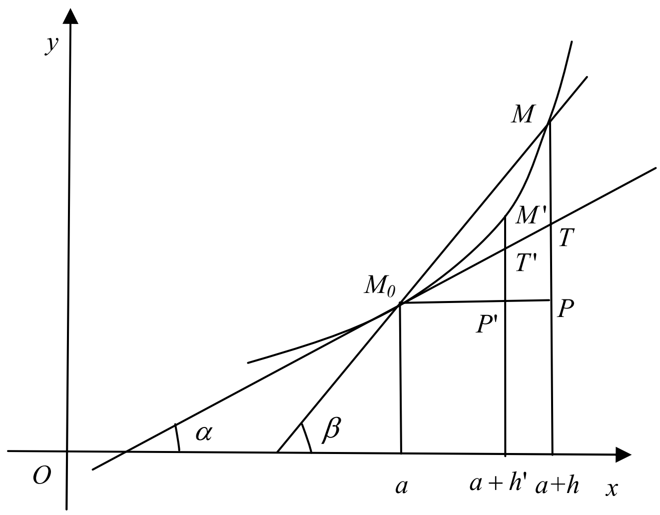
Din demonstraţie rezultă că dacă f este derivabilă în $x = a$, atunci există o singură aplicaţie liniară $T : \Upsilon \to \Upsilon$ pentru care are loc (4.1) şi anume:

$$T(h) = f'(a)h, \quad h \in \mathbb{R}.$$

Această aplicaţie se numeşte diferenţiala lui f în punctul a şi se notează cu $\mathrm{d}f(a)$.

Definiţia 1.3. *Fie* $f : I \to \mathbb{R}$ *şi* $a \in I$ *un punct interior. Se numeşte diferenţiala lui f în punctul a, următoarea aplicaţie liniară pe* Υ:

$$\mathrm{d}f(a)(h) = f'(a)h, \text{ oricare ar fi } h \in \mathbb{R}.$$



Fie C graficul funcţiei f şi fie M_0 punctul de pe grafic de abscisă a. De la interpretarea geometrică a derivatei ştim că $f'(a)$ reprezintă panta tangentei în M_0 la grafic ($f'(a) = \mathrm{tg}\alpha$). Pe de altă parte, în triunghiul M_0PT avem

$$f'(a) = \mathrm{tg}\alpha = \frac{PT}{M_0P} = \frac{PT}{h},$$

de unde rezultă că

$$PT = f'(a)h = \mathrm{d}f(a)(h).$$

Aşadar, diferențiala lui f în punctul a este aplicația liniară $\mathrm{d}f(a):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ a cărei valoare în punctul h este egală cu lungimea segmentului PT, unde T este punctul de abscisă $a + h$ de pe tangenta în M_0 la graficul funcției f.

Pe de altă parte, lungimea segmentului PM este $f(a+h)-f(a)$ şi reprezintă variația funcției f când se trece de la punctul de abscisă a la punctul de abscisă $a + h$. Fie h' o valoare mai mică pentru h şi fie M', T' şi P' punctele corespunzătoare abscisei $a + h'$. Avem $f(a+h')-f(a)=P'M'=P'T'+T'M'$. Din figură se vede că lungimea segmentului $M'T'$ este mică în raport cu lungimea segmentului $P'T'$, deci $M'P'\approx P'T'=\mathrm{d}f(a)(h)$.

Aşadar, pentru valori mici ale lui h, avem:

$$f(a+h)-f(a)\cong \mathrm{d}f(a)(h)=f'(a)h.$$

Exemplu. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2$.

$$\mathrm{d}f(2)(h)=f'(2)h=4h,\quad h\in\mathbb{R}.$$

Pentru $h = 0{,}001$ avem $\mathrm{d}f(2)(0{,}001)=0{,}004$.

Pe de altă parte $f(2{,}001)-f(2)=0{,}004001\cong \mathrm{d}f(2)(0{,}001)$.

În continuare, pentru orice funcție $f: I\to\mathbb{R}$, derivabilă în punctul interior $a\in I$, notăm cu:

$$\omega(h)=\omega_a(h)=\begin{cases}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}-f'(a), & h\neq 0,\quad a+h\in I\\ 0 & ,\quad h=0.\end{cases}$$

Evident $\lim\limits_{h\to 0}\omega(h)=\omega(0)=0$, deci ω este continuă în 0. Pe de altă parte avem:

$$f(a+h)-f(a)=f'(a)h+\omega(h)h,\ \forall\ h\in\mathbb{R}$$

sau

$$f(a+h)-f(a)=df(a)(h)+\varphi(h)$$

unde am notat cu $\varphi(h)=\omega(h)h,\ \forall\ h\in\mathbb{R}$. Observăm că $\lim\limits_{h\to 0}\varphi(h)=0$ şi $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\varphi(h)}{h}=0$, deci funcția φ este „de două ori mică“ în 0. O asemenea funcție se numeşte şi infinit mic şi se notează cu $o(h)$. Din punct de vedere geometric $\varphi(h)$ este lungimea segmentului TM. Acum înțelegem mai bine de ce pentru valori mici ale lui h putem aproxima variația funcției $f(a+h)-f(a)$ cu $\mathrm{d}f(a)(h)$, deoarece pentru astfel de valori, termenul $\varphi(h)$ este foarte mic în raport cu termenul $\mathrm{d}f(a)(h)$.

Aşadar, are loc următoarea propoziție:

Propoziția 4.1.2. *Fie* $f: I \to \mathbb{R}$, $a \in I$ *un punct interior și fie* $J = \{h \in \mathbb{R}\, ; a + h \in I\}$. *Următoarele afirmații sunt echivalente*:

(1) *f este derivabilă în punctul a.*

(2) *Există o aplicație liniară* $T = T_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *și o funcție* $\varphi = \varphi_a : J \to \mathbb{R}$ *continuă în* 0, *cu proprietățile:* $\lim\limits_{h \to 0} \varphi(h) = 0$ *și* $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\varphi(h)}{h} = 0$, *astfel încât*

$$f(a+h) - f(a) = T(h) + \varphi(h), \ \forall \ h \in \mathbb{R} \tag{4.2}$$

(Precizăm că $T(h) = \mathrm{d}f(a)(h) = f'(a)h$ și $\varphi(h) = \omega(h)h$).

În vederea generalizării noțiunii de funcție diferențiabilă pentru funcții de mai multe variabile reamintim următorul rezultat din algebra liniară.

Propoziția 4.1.3.

(i) *O aplicație* $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *este liniară dacă și numai dacă există* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ *astfel încât*

$$T(h) = \lambda_1 h_1 + \lambda_2 h_2 + \ldots + \lambda_n h_n, \ \forall \ h = (h_1, \ldots, h_n) \in \mathbb{R}^n.$$

(ii) *O aplicație* $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *este liniară dacă și numai dacă există o matrice* $A = (\lambda_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ *astfel încât*

$$T(h) = (\lambda_{11} h_1 + \ldots + \lambda_{1n} h_n, \ldots, \lambda_{m1} h_1 + \ldots + \lambda_{mn} h_n), \ \forall \ h = (h_1, \ldots, h_n) \in \mathbb{R}^n.$$

(Matricea A_T este matricea asociată aplicației liniare T în raport cu bazele canonice din $\mathbb{R}^n$, respectiv $\mathbb{R}^m$).

Propoziția 4.1.4. *Orice aplicație liniară* $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *este continuă pe* $\mathbb{R}^n$ *și* $\|T(x)\|_2 \le \|A_T\| \, \|x\|_2$, $\forall \ x \in \mathbb{R}^n$.

Demonstrație

Fie $A_T = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \cdots & \lambda_{1n} \\ \hline \lambda_{m1} & \cdots & \lambda_{mn} \end{pmatrix}$. Din inegalitatea Cauchy-Buniakovski rezultă

$$\|T(x)\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_{i1} x_1 + \ldots + \lambda_{in} x_n)^2 \le \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij}^2 \right) \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2 \right) = \|x\|_2^2 \, \|A_T\|^2,$$

deci $$\|T(x)\|_2 \le \|A_T\| \cdot \|x\|_2.$$

Fie $a \in \mathbb{R}^n$ şi fie $\{x_k\} \subset \mathbb{R}^n$, $x_k \to a$, $x_k \neq a$, $\forall \ \ x \in \mathbb{N}^*$. Deoarece T este liniară avem:

$$\left\|T\left(x_k\right) - T(a)\right\|_2 = \left\|T\left(x_k - a\right)\right\|_2 \leq \left\|A_T\right\| \left\|x_k - a\right\|_2 \to 0 .$$

Rezultă că $T\left(x_k\right) \to T(a)$, deci T este continuă în punctul a.

Definiţia 4.1.4. *Fie $A \subset \mathbb{R}^n$ o mulţime deschisă şi $a \in A$. Spunem că funcţia $f : A \to \mathbb{R}$ este diferenţiabilă (derivabilă) în punctul a, dacă există o aplicaţie liniară $T = T_a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ astfel încât*

$$\lim_{h \to 0} \frac{\left|f\left(a+h\right) - f(a) - T\left(h\right)\right|}{\|h\|} = 0 . \tag{4.3}$$

Teorema 4.1.1. *Fie $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ şi $a \in A$ un punct interior. Dacă f este diferenţiabilă în punctul a, atunci există $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$, $\forall \ \ i = \overline{1,n}$. Mai mult, aplicaţia liniară $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ este unică şi este definită astfel:*

$$T\left(h\right) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) h_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) h_n , \ \forall \ \ h = \left(h_1, \ldots, h_n\right) \in \mathbb{R}^n .$$

În continuare vom numi această aplicaţie **diferenţiala de ordinul întâi a funcţiei *f* în punctul *a*** şi o notăm cu $\mathrm{d}f(a)$. Aşadar $\mathrm{d}f(a) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ este aplicaţia liniară definită astfel:

$$\mathrm{d}f(a)\left(h_1, \ldots, h_n\right) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) h_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) h_n , \ \forall \ \ \left(h_1, \ldots, h_n\right) \in \mathbb{R}^n .$$

Demonstraţie

Prin ipoteză, există $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ liniară astfel încât are loc (4.3).

Pe de altă parte, conform Propoziţiei 4.1.3, există $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$T\left(h\right) = \lambda_1 h_1 + \ldots + \lambda_n h_n , \ \ \forall \ \ h = \left(h_1, \ldots, h_n\right) \in \mathbb{R}^n .$$

Pentru $h = \left(0, \ldots, h_i, \ldots 0\right)$ din (4.3) rezultă

$$\lim_{h_i \to 0} \frac{\left|f\left(a_1, \ldots, a_i + h_i, \ldots, a_n\right) - f\left(a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_n\right) - \lambda_i h_i\right|}{\left\|h_i\right\|} = 0$$

şi mai departe

$$\lim_{h_i \to 0} \left| \frac{f\left(a_1, \ldots, a_i + h_i, \ldots, a_n\right) - f\left(a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_n\right)}{h_i} - \lambda_i \right| = 0 ,$$

relaţie echivalentă cu faptul că există

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)=\lambda_i\,,\ \forall\ i=\overline{1,n}\,.$$

Aşadar, T este unic determinată şi

$$T(h_1,\ldots,h_n)=\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)h_1+\ldots+\frac{\partial f}{\partial x_n}(a)h_n\,,\ \forall\ (h_1,\ldots,h_n)\in\mathbb{R}^n\,.$$

Teorema 4.1.2. *Fie* $f:A\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ *şi* $a\in A$ *un punct interior. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) *f este diferenţiabilă în punctul a.*

(ii) *Există o aplicaţie liniară* $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ *, o vecinătate V a originii şi o funcţie* $\varphi=\varphi_a:V\to\mathbb{R}$ *cu proprietăţile:* $\lim\limits_{h\to 0}\varphi(h)=\varphi(0)=0$, $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{|\varphi(h)|}{\|h\|}=0$, *astfel încât*

$$f(a+h)-f(a)=T(h)+\varphi(h)\,,\ \forall\ \ h\in V\,. \tag{4.4}$$

Demonstraţie

(i) $\Rightarrow$ (ii). Notăm cu $V=\left\{h\in\mathbb{R}^n;\ a+h\in A\right\}$ şi definim $\omega:V\to\mathbb{R}$ astfel:

$$\omega(h)=\begin{cases}\dfrac{f(a+h)-f(a)-T(h)}{\|h\|}, & h\in V,\quad h\neq 0\\ 0 & ,\quad h=0.\end{cases}$$

Evident, avem:

$$f(a+h)-f(a)=T(h)+\omega(h)\|h\|,\ \forall\ \ h\in V\,.$$

Dacă notăm cu $\varphi(h)=\omega(h)\|h\|$, $h\in V$, atunci

$$\lim_{h\to 0}\varphi(h)=\varphi(0)=0 \ \text{ şi } \ \lim_{h\to 0}\frac{|\varphi(h)|}{\|h\|}=0 \ \text{ şi } \ f(a+h)-f(a)=T(h)+\varphi(h)\,.$$

Implicaţia (ii) $\Rightarrow$ (i) este evidentă.

Din Teorema 4.1.1 şi 4.1.2 rezultă.

Observaţia 4.1.1. f este diferenţiabilă în punctul $a\in\overset{\circ}{A}$, dacă există $V\in\mathcal{V}(0)$ şi o funcţie $\varphi:V\to\mathbb{R}$ care este un infinit mic ($\varphi=o(h)$) astfel încât

$$f(a+h)-f(a)=\mathrm{d}f(a)(h)+\varphi(h),\ \ h\in V\,.$$

Corolarul 4.1.1. *Dacă f este diferenţiabilă în punctul* $a\in A$, *atunci f este continuă în acest punct.*

Într-adevăr, dacă trecem la limită în (4.4) obţinem

$$\lim_{h\to 0} f(a+h)-f(a)=\lim_{h\to 0} T(h)+\lim_{h\to 0}\varphi(h)=0.$$

Aşadar, există $\lim\limits_{h\to 0} f(a+h)=f(a)$, deci *f* este continuă în punctul *a*.

Acum suntem în măsură să arătăm că afirmația reciprocă din Teorema 4.1.1 nu este în general adevărată.

Existența derivatelor parțiale într-un punct nu atrage după sine diferențiabilitatea funcției în acel punct.

Exemplu. Fie funcția

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{dacă } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{dacă } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

Deoarece, $f(x,0)=f(0,y)=0$, rezultă că există $f'_x(0,0)=f'_y(0,0)=0$. Pe de altă parte, *f* nu este diferențiabilă în (0,0) deoarece nu este continuă în acest punct (Vezi Corolarul 4.1.1).

În continuare vom prezenta condiții suficiente ca o funcție să fie diferențiabilă. Pentru început dăm următoarea definiție.

Definiția 4.1.4. *O funcție* $f: A\subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, *unde A este o mulțime deschisă, este de clasă* C^1 *pe A şi notăm* $f\in C^1(A)$, *dacă există* $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ *şi sunt continue pe A,* $\forall\ i=\overline{1,n}$.

Teorema 4.1.3. *Fie* $A\subset\mathbb{R}^n$ *o mulțime deschisă şi* $f: A\to\mathbb{R}$. *Dacă* $f\in C^1(A)$, *atunci f este diferențiabilă pe A.*

Demonstrație

Pentru simplificarea scrierii dăm demonstrația în cazul particular *n* = 2. Fie $a=(a_1,a_2)\in A$ şi fie $r>0$ astfel încât $B(a,r)\subset A$. Pentru orice $h=(h_1,h_2)\in\mathbb{R}^2$ pentru care $a+h\in A$ avem

$$f(a_1+h_1,a_2+h_2)-f(a_1,a_2)=f(a_1+h_1,a_2+h_2)-f(a_1,a_2+h_2)+$$
$$+f(a_1,a_2+h_2)-f(a_1,a_2).$$

Din Teorema Lagrange rezultă că există $0<\theta_i<1$, $i=1,2$ astfel încât:

$$f(a_1+h_1,a_2+h_2)-f(a_1,a_2)=$$
$$=\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1+\theta_1 h_1,a_2+h_2)h_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1,a_2+\theta_2 h_2)h_2. \tag{4.5}$$

Dacă notăm cu

$$\omega_1(h_1,h_2)=\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1+\theta_1 h_1, a_2+h_2)-\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1,a_2)$$

şi

$$\omega_2(h_1,h_2)=\frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2+\theta_2 h_2)-\frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1,a_2),$$

atunci din (4.5) rezultă

$$f(a+h)-f(a)=\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)h_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}(a)h_2+\omega_1(h)h_1+\omega_2(h)h_2 .$$

În sfârşit, dacă notăm cu $\varphi(h)=\omega_1(h)h_1+\omega_2(h)h_2$, atunci

$$f(a+h)-f(a)=df(a)(h)+\varphi(h). \tag{4.6}$$

Dacă vom arăta că φ este un infinit mic va rezulta că f este diferenţiabilă în punctul a.

Deoarece $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ sunt continue rezultă că $\lim\limits_{h\to 0}\omega_i(h)=0$, $i=1,2$.

Pe de altă parte avem:

$$\frac{|\varphi(h)|}{\|h\|}=|\omega_1(h)|\frac{|h_1|}{\|h\|}+|\omega_2(h)|\frac{|h_2|}{\|h\|}\le|\omega_1(h)|+|\omega_2(h)|,$$

de unde rezultă că $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\varphi(h)}{\|h\|}=0$ şi cu aceasta teorema este demonstrată.

Observaţia 4.1.2. Din Teorema 4.1.3 rezultă că funcţiile elementare sunt diferenţiabile pe orice submulţime deschisă din domeniul lor de definiţie.

4.2. Diferenţiabilitatea funcţiilor vectoriale. Matrice iacobiene

Definiţia 4.2.1. *Fie* $F=(f_1,\cdots,f_m):A\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ *o funcţie vectorială şi fie* $a\in A$ *un punct interior.*

Spunem că F este diferenţiabilă în punctul a dacă există o aplicaţie liniară $T=T_a:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ *astfel încât*

$$\lim_{h\to 0}\frac{\|F(a+h)-F(a)-T(a)\|}{\|h\|}=0 .$$

($\|\ \|$ este oricare din normele $\|\ \|_\infty$ sau $\|\ \|_2$).

Teorema 4.2.1. *Funcția vectorială* $F=(f_1,\cdots,f_m):A\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ *este diferențiabilă în punctul interior* $a\in A$ *dacă și numai dacă fiecare componentă scalară a sa* $f_j:A\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $j=\overline{1,m}$ *este diferențiabilă în punctul a.*

Demonstrație

Dacă F este diferențiabilă în punctul a, atunci există o aplicație liniară $T=T_a:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ astfel încât

$$\lim_{h\to 0}\frac{\left\|F(a+h)-F(a)-T(h)\right\|_\infty}{\|h\|_\infty}=0\,. \tag{4.7}$$

Pe de altă parte, din Propoziția 4.1.3 rezultă că există o matrice $A=\left(\lambda_{ij}\right)\in\mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ astfel încât

$$T(h)=\left(\lambda_{11}h_1+\ldots+\lambda_{1n}h_n,\ldots,\lambda_{m1}h_1+\ldots+\lambda_{mn}h_n\right),$$

oricare ar fi $h=(h_1,\ldots,h_n)\in\mathbb{R}^n$.

Dacă notăm cu $t_j(h)=a_{j1}h_1+\ldots+a_{jn}h_n$, $\forall\ \ h=(h_1,\ldots,h_n)\in\mathbb{R}^n$, atunci $t_j:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ este liniară și $T=(t_1,t_2,\ldots,t_m)$.

Deoarece $\left|f_j(a+h)-f_j(a)-t_j(h)\right|\le\left\|F(a+h)-F(a)-T(h)\right\|_\infty$, din (4.7) rezultă că

$$\lim_{h\to 0}\frac{\left|f_j(a+h)-f_j(a)-t_j(h)\right|}{\|h\|}=0,\ \forall\ \ j=\overline{1,m}\,. \tag{4.8}$$

Am arătat deci că f_j este diferențiabilă în punctul a, oricare ar fi $j=\overline{1,m}$.

Reciproc, dacă fiecare componentă scalară f_j a funcției vectoriale F este diferențiabilă în punctul a, atunci relația (4.8) este adevărată pentru orice $j=\overline{1,m}$.

Cum $\left\|F(a+h)-F(a)-T(h)\right\|_\infty=\max\limits_{1\le j\le m}\left|f_j(a+h)-f_j(a)-t_j(h)\right|$, rezultă că $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\left\|F(a+h)-F(a)-T(h)\right\|_\infty}{\|h\|}=0$, deci că F este diferențiabilă în punctul a.

Observația 4.2.1. Din Teorema 4.1.1 rezultă că t_j este diferențiala funcției f_j în punctul a, deci că:

$$t_j(h)=\mathrm{d}f_j(a)(h)=\frac{\partial f_j}{\partial x_1}(a)h_1+\ldots+\frac{\partial f_j}{\partial x_n}(a)h_n,\ \forall\ \ h=(h_1,\ldots,h_n)\in\mathbb{R}^n,\ j=\overline{1,m}\,.$$

Aşadar, dacă $F=\left(f_1,\ldots,f_n\right)$ este diferenţiabilă în punctul a, atunci aplicaţia liniară T este unic determinată şi anume:

$$T\left(h\right)=\left(\mathrm{d}f_1(a)\left(h\right),\ldots,\mathrm{d}f_m(a)\left(h\right)\right),\ \forall\ \ h\in\mathbb{R}^n.$$

Vom numi această aplicaţie liniară **diferenţiala de ordinul întâi a funcţiei *F* în punctul *a*** şi o vom nota cu $\mathrm{d}F(a)$. Rezultă că $\mathrm{d}F(a):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ este următoarea aplicaţie liniară:

$$\mathrm{d}F(a)\left(h\right)=\left(\mathrm{d}f_1(a)\left(h\right),\ldots,\mathrm{d}f_m(a)\left(h\right)\right)=$$

$$=\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a)h_1+\ldots+\frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a)h_n,\ldots,\frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a)h_1+\ldots+\frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a)h_n\right),\ \forall\ \ h\in\mathbb{R}^n.$$

Definiţia 4.2.2. *Matricea asociată aplicaţiei liniare* $\mathrm{d}F(a):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ *în raport cu bazele canonice din* $\mathbb{R}^n$ *şi* $\mathbb{R}^m$ *se notează cu:*

$$J_F(a)=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \ldots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(a)\\ \multicolumn{3}{c}{-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-}\\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \ldots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n}(a)\end{pmatrix}$$

şi se numeşte **matrice iacobiană ataşată funcţiei vectoriale *F* în punctul *a*.**

Observăm că avem

$$\mathrm{d}F(a)\left(h\right)=\left(J_F(a)h^{tr}\right)^{tr},$$

unde cu B^{tr} am notat transpusa unei matrice oarecare B.

Observaţia 4.2.2. Din Teorema 4.2.1 rezultă că studiul diferenţiabilităţii unei funcţii vectoriale revine la studiul diferenţiabilităţii componentelor sale scalare. Este suficient deci să studiem funcţii de forma $f:A\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$.

4.3. Diferenţiabilitatea funcţiilor compuse

Teorema 3.1. *Fie* $A\subset\mathbb{R}^n$ *şi* $B\subset\mathbb{R}^m$ *două mulţimi deschise. Dacă* $F:A\to B$ *este diferenţiabilă în punctul* $a\in A$ *şi* $G:B\to\mathbb{R}^P$ *este diferenţiabilă în punctul* $b=F(a)\in B$, *atunci funcţia compusă* $H=G\circ F:A\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^P$ *este diferenţiabilă în punctul* $a\in A$ *şi* $dH(a)=\mathrm{d}G\left(b\right)\circ\mathrm{d}F(a)$. *Mai mult, avem:* $J_H(a)=J_G\left(b\right)\cdot J_F(a)$.

Demonstraţie

Din ipoteze rezultă că:

$$F(a+h)-F(a)=\mathrm{d}F(a)(h)+\varphi(h)\text{, unde }\lim_{h\to 0}\frac{\|\varphi(h)\|}{\|h\|}=0 \qquad (4.9)$$

şi

$$G(b+k)-G(b)=\mathrm{d}G(b)(k)+\psi(k)\text{, unde }\lim_{k\to 0}\frac{\|\psi(k)\|}{\|k\|}=0. \qquad (4.10)$$

Din (4.9) rezultă că:

$$H(a+h)-H(a)=G[F(a+h)]-G[F(a)]=$$
$$=G[F(a)+\mathrm{d}F(a)(h)+\varphi(h)]-G(b).$$

Dacă notăm cu $k(h)=\mathrm{d}F(a)(h)+\varphi(h)$, atunci din (4.10) rezultă:

$$H(a+h)-H(a)=G(b+k(h))-G(b)=\mathrm{d}G(b)[k(h)]+\psi[k(h)].$$

Cum $dG(b)$ este liniară, mai departe avem:

$$H(a+h)-H(a)=\mathrm{d}G(b)[\mathrm{d}F(a)(h)]+\mathrm{d}G(b)[\varphi(h)]+\psi[k(h)]=$$
$$=[\mathrm{d}G(b)\circ\mathrm{d}F(a)](h)+\chi(h)$$

unde am notat cu

$$\chi(h)=\mathrm{d}G(b)[\varphi(h)]+\psi[k(h)].$$

Ținând seama că $\mathrm{d}G(b)\circ\mathrm{d}F(a):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^P$ este liniară (fiind o compunere de aplicații liniare) rezultă că este suficient să arătăm că χ este un infinit mic, adică $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\|\chi(h)\|}{\|h\|}=0$.

Reamintim că dacă A este matricea asociată aplicației liniare $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$, atunci

$$\|T(x)\|\le\|A\|\,\|x\|,\ \forall\ x\in\mathbb{R}^n.$$

Ținând seama că $J_G(b)$ este matricea asociată aplicației liniare $\mathrm{d}G(b):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$, iar $J_F(a)$ este matricea asociată aplicației liniare $\mathrm{d}F(a):\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^p$, rezultă

$$\frac{\|\chi(h)\|}{\|h\|}\le\|J_G(b)\|\frac{\|\varphi(h)\|}{\|h\|}+\frac{\|\psi[k(h)]\|}{\|k(h)\|}\cdot\frac{\|k(h)\|}{\|h\|}\le$$
$$\le\|J_G(b)\|\frac{\|\varphi(h)\|}{\|h\|}+\frac{\|\psi[k(h)]\|}{\|k(h)\|}\cdot\left(\|J_F(a)\|+\frac{\|\varphi(h)\|}{\|h\|}\right).$$

Cum $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\|\varphi(h)\|}{\|h\|}=0$, $\lim\limits_{h\to 0}k(h)=0$ şi $\lim\limits_{k\to 0}\frac{\|\psi(k)\|}{\|k\|}=0$ rezultă că $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\|\chi(h)\|}{\|h\|}=0$.

Aşadar, am demonstrat că

$$H(a+h)-H(a)=\left[\mathrm{d}G(b)\circ \mathrm{d}F(a)\right](h)+\chi(h)$$

şi χ este un infinit mic (un $o(h)$ pentru $h\to 0$).

Rezultă că H este diferenţiabilă în punctul a şi $\mathrm{d}H(a)=\mathrm{d}G(b)\circ \mathrm{d}F(a)$.

Cum la operaţia de compunere a aplicaţiilor liniare corespunde operaţia de înmulţire a matricelor lor asociate rezultă că $J_H(a)=J_G(b)\cdot J_F(a)$.

Corolarul 4.3.1. *Fie* $A,B\subset\mathbb{R}^2$ *două mulţimi deschise,* $F=(u,v):A\to B$ *o funcţie vectorială de clasă* C^1 *pe A şi* $f:B\to\mathbb{R}$ *o funcţie scalară de clasă* C^1 *pe B. Atunci, funcţia compusă* $h:A\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$*, definită prin*

$$h(x,y)=(f\circ F)(x,y)=f\left[u(x,y),v(x,y)\right],\ (x,y)\in A,$$

este de clasă C^1 *pe A şi au loc formulele*:

$$\begin{aligned}\frac{\partial h}{\partial x}&=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\\ \frac{\partial h}{\partial y}&=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\end{aligned}\tag{4.11}$$

Demonstraţie

Prin ipoteză u, v şi f sunt de clasă C^1 pe mulţimile lor de definiţie, deci sunt diferenţiabile (conform Teoremei 4.1.3). Din Teorema 4.2.1 rezultă că F este diferenţiabilă pe A, iar din Teorema 4.3.1 rezultă că funcţia compusă $h=f\circ F$ este diferenţiabilă pe A.

Fie $(a,b)\in A$ oarecare. Notăm cu $c=u(a,b)$ şi cu $d=v(a,b)$. Evident punctul $(c,d)\in B$.

Din Teorema 4.3.1 rezultă că $J_h(a,b)=J_f(c,d)\cdot J_F(a,b)$, adică

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial h}{\partial x}(a,b) & \frac{\partial h}{\partial y}(a,b)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial u}(c,d) & \frac{\partial f}{\partial v}(c,d)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial x}(a,b) & \frac{\partial u}{\partial y}(a,b)\\ \frac{\partial v}{\partial x}(a,b) & \frac{\partial v}{\partial y}(a,b)\end{pmatrix}.$$

Efectuând calculele obţinem:

$$\begin{aligned}\frac{\partial h}{\partial x}(a,b)&=\frac{\partial f}{\partial u}(c,d)\frac{\partial u}{\partial x}(a,b)+\frac{\partial f}{\partial v}(c,d)\frac{\partial v}{\partial x}(a,b)\\ \frac{\partial h}{\partial y}(a,b)&=\frac{\partial f}{\partial u}(c,d)\frac{\partial u}{\partial y}(a,b)+\frac{\partial f}{\partial v}(c,d)\frac{\partial v}{\partial y}(a,b).\end{aligned}$$

Exemplu. Fie $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ o funcție de clasă C^1 şi fie $h(x,y)=$ $=f\left(x^2+2y,\dfrac{x}{y}\right)$, $y\neq 0$. Dacă notăm cu $u(x,y)=x^2+2y$ şi cu $v(x,y)=\dfrac{x}{y}$, atunci

$$\frac{\partial h}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot 2x+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{1}{y}$$

$$\frac{\partial h}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot 2+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right).$$

Observația 4.3.1. Formulele (4.11) generalizează cunoscuta formulă de derivare a funcțiilor compuse de o variabilă.

Dacă $h(x)=f\left[u(x)\right]$, atunci $h'(x)=f'\left[u(x)\right]\cdot u'(x)$.

Observația 4.3.2. Formulele (4.11) admit următoarea generalizare evidentă.

Dacă $h(x_1,\ldots,x_n)=f\left[u_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,u_m(x_1,\ldots,x_n)\right]$, atunci

$$\begin{cases}\dfrac{\partial h}{\partial x_1}=\dfrac{\partial f}{\partial u_1}\cdot\dfrac{\partial u_1}{\partial x_1}+\ldots+\dfrac{\partial f}{\partial u_m}\cdot\dfrac{\partial u_m}{\partial x_1}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \dfrac{\partial h}{\partial x_n}=\dfrac{\partial f}{\partial u_1}\cdot\dfrac{\partial u_1}{\partial x_n}+\ldots+\dfrac{\partial f}{\partial u_m}\cdot\dfrac{\partial u_m}{\partial x_n}\end{cases}\tag{4.12}$$

Definiția 4.3.1. *Fie* $K\subset\mathbb{R}^n$ *o mulțime cu proprietatea că* $\forall\ x\in K$ *şi* $\forall\ t\in\mathbb{R}$, $t\neq 0$ *rezultă că* $tx\in K$. *O funcție* $f:K\to\mathbb{R}$ *se numeşte omogenă de gradul p dacă*

$$f(tx_1,\ldots,tx_n)=t^p f(x_1,\ldots,x_n),\ \forall\ \ x=(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n.$$

Exemple.

1. Funcția $f(x,y)=3x^2-y^2$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, este omogenă de gradul 2 pe $\mathbb{R}^2$.

2. Funcția $f(x,y,z)=\dfrac{x^2+2xz-y^2}{x^2+y^2+z^2}$, $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\setminus\{0,0,0\}$ este omogenă de gradul 0.

Teorema 4.3.2. (Euler). *Fie* $K\subset\mathbb{R}^n$ *o mulțime deschisă cu proprietatea că* $tx\in K$ *pentru orice* $x\in K$ *şi orice* $t\in\mathbb{R}^*$ *şi fie* $f: K\to\mathbb{R}$ *o funcție diferențiabilă pe K şi omogenă de gradul p. Atunci avem*:

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) + \ldots + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) = pf(x)\,,\ \forall \quad x = (x_1, \ldots, x_n) \in K\,.$$

Demonstraţie

Prin ipoteză avem

$$f(tx_1, \ldots, tx_n) = t^p f(x_1, \ldots, x_n)\,,\ t \in \mathbb{R}^* \text{ şi } x \in K. \tag{4.3}$$

Observăm că membrul stâng poate fi privit ca o funcţie compusă, dacă notăm cu $u_1(t) = tx_1, \ldots, u_n(t) = tx_n$ şi $h(t) = f\left[u_1(t), \ldots, u_n(t)\right]$.

Ţinând seama de regulile de derivare (4.12) rezultă

$$h'(t) = \frac{\partial f}{\partial u_1}(tx) \cdot u_1'(t) + \ldots + \frac{\partial f}{\partial u_n}(tx) \cdot u_n'(t) = pt^{p-1} f(x)$$

şi mai departe

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial u_1}(tx) + \ldots + x_n \frac{\partial f}{\partial u_n}(tx) = pt^{p-1} f(x)\,.$$

În particular, pentru $t = 1$ rezultă

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) + \ldots + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) = pf(x)\,,\ \forall \quad x \in K\,.$$

Exemplu. Fie $K = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x \neq 0,\ y \neq 0\right\}$ şi fie

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}\ \operatorname{arctg} \frac{y}{x}\,,\quad (x, y) \in K\,.$$

Se observă că funcţia f este omogenă de gradul 1, deci trebuie să satisfacă relaţia

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = f\,.$$

Într-adevăr,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - \frac{y}{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{x^2 + y^2}$$

şi

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \frac{x}{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{x^2 + y^2}\,.$$

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = \sqrt{x^2 + y^2}\ \operatorname{arctg} \frac{y}{x}\,.$$

4.4. Diferențiala de ordinul întâi și invarianța formei sale

Fie $A \subset \mathbb{R}^n$ o mulțime deschisă și $f : A \to \mathbb{R}$ o funcție diferențiabilă pe A. Diferențiala de ordinul întâi a funcției f în punctul $a \in A$ este funcția liniară $df(a) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definită astfel:

$$\mathrm{d}f(a)(h) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)h_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)h_n, \ \forall \ h = (h_1, \ldots, h_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Considerăm funcțiile proiecție $p_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = \overline{i, n}$, definită astfel:

$$p_i(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) = x_i, \ \forall \ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Deoarece

$$\frac{\partial p_i}{\partial x_j} = \begin{cases} 1 & \text{dacă} \quad j = i \\ 0 & \text{dacă} \quad j \neq i. \end{cases}$$

rezultă că $\mathrm{d}p_i(a)(h) = h_i$, $\forall \ i = \overline{i, n}$.

Așadar, diferențialele de ordinul întâi ale funcției p_i nu depind de punctul a. Prin urmare avem

$$\mathrm{d}p_i(h) = \mathrm{d}x_i(h) = h_i, \ i = \overline{i, n}.$$

Cu aceste precizări, diferențiala de ordinul întâi a funcției f în punctul a se scrie

$$\mathrm{d}f(a)(h) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\mathrm{d}x_1(h) + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\mathrm{d}x_n(h). \tag{4.14}$$

Dacă scriem relația (1) ca o egalitate de funcții obținem

$$\mathrm{d}f(a) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\mathrm{d}x_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\mathrm{d}x_n,$$

unde prin $\mathrm{d}\,x_i$ înțelegem diferențiala de ordinul întâi a funcției p_i.

Exemplu. Fie $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \ln \frac{y}{x}$, $x > 0$, $y > 0$.

Avem:

$$\mathrm{d}f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\mathrm{d}y.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \ln \frac{y}{x} - \frac{1}{x}\sqrt{x^2 + y^2}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\ln\frac{y}{x}+\frac{1}{y}\sqrt{x^2+y^2}\ .$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)=-\sqrt{2}\quad \text{şi}\quad \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)=\sqrt{2}\ .$$

$$\mathrm{d}f(1,1)=-\sqrt{2}\,\mathrm{d}x+\sqrt{2}\,\mathrm{d}y\ .$$

Fie $A,B\subset\mathbb{R}^n$ mulţimi deschise, $F=(u_1,\dots,u_n):A\to B$ o funcţie vectorială diferenţiabilă pe A şi $f:B\to\mathbb{R}$ o funcţie scalară diferenţiabilă pe B. Considerăm funcţia compusă $h=f\circ F:A\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, definită astfel

$$h(x_1,\dots,x_n)=f\left[u_1(x_1,\dots,x_n),\dots,u_n(x_1,\dots,x_n)\right],\ x=(x_1,\dots,x_n)\in A\ .$$

Deoarece $f=f(u_1,\dots,u_n)$, $(u_1,\dots,u_n)\in B$ rezultă

$$\mathrm{d}f=\frac{\partial f}{\partial u_1}\mathrm{d}u_1+\dots+\frac{\partial f}{\partial u_n}\mathrm{d}u_n \tag{4.15}$$

Pe de altă parte avem

$$\mathrm{d}h=\frac{\partial h}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1+\dots+\frac{\partial h}{\partial x_n}\mathrm{d}x_n\ .$$

Ţinând cont de formulele de derivare ale funcţiilor compuse avem:

$$\mathrm{d}h=\left(\frac{\partial f}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\dots+\frac{\partial f}{\partial u_n}\frac{\partial u_n}{\partial x_1}\right)\mathrm{d}x_1+\dots+\left(\frac{\partial f}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_n}+\dots+\frac{\partial f}{\partial u_n}\frac{\partial u_n}{\partial x_n}\right)\mathrm{d}x_n=$$

$$=\frac{\partial f}{\partial u_1}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1+\dots+\frac{\partial u_n}{\partial x_n}\mathrm{d}x_n\right)+\dots+\frac{\partial f}{\partial u_n}\left(\frac{\partial u_n}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1+\dots+\frac{\partial u_n}{\partial x_n}\mathrm{d}x_n\right)=$$

$$=\frac{\partial f}{\partial u_1}\mathrm{d}u_1+\dots+\frac{\partial f}{\partial u_n}\mathrm{d}u_n\ .$$

Aşadar, avem:

$$\mathrm{d}h=\frac{\partial f}{\partial u_1}\mathrm{d}u_1+\dots+\frac{\partial f}{\partial u_n}\mathrm{d}u_n\ . \tag{4.16}$$

Formula (4.15) reprezintă expresia diferenţialei de ordinul întâi a funcţiei f privită ca funcţie ce depinde de variabilele $u_1,\dots,u_n$. Formula (4.16) reprezintă expresia diferenţialei de ordinul întâi a funcţiei f privită ca funcţia ce depinde de variabilele dependente $u_i=u_i(x_1,\dots,x_n)$, $i=\overline{i,n}$.

Această egalitate formală $\mathrm{d}h=\mathrm{d}f$ poartă numele de proprietatea de invarianţă a diferenţialei de ordinul întâi la o schimbare de variabile independente.

4.5. Derivate parțiale de ordin superior. Diferențiale de ordin superior

Definiția 4.5.1. *Fie* $A\subset \mathbb{R}^n$ *o mulțime deschisă și fie* $f:A\to\mathbb{R}$. *Presupunem că există* $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}:A\to\mathbb{R}$. *Evident aceasta este de asemenea o funcție de n variabile. Dacă există* $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\right)$, *aceasta se notează cu* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ *sau* $f''_{x_j x_i}$ *și se numește derivata parțială de ordinul doi a funcției f în raport cu variabilele* x_i *și* x_j. *Dacă* $i=j$ *se folosește notația* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$ *în loc de* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_i}$.

O funcție de *n* variabile poate avea n^2 derivate parțiale de ordinul doi.

În cazul *n* = 2, al funcțiilor de două variabile, pot exista 4 (patru) derivate parțiale de ordinul 2 și anume:

$$f''_{x^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2},\ f''_{xy}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y},\ f''_{yx}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\ \text{și}\ f''_{y^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Următorul exemplu ne arată că derivatele mixte în general nu sunt egale. (Prin derivată mixtă înțelegem o derivată de forma $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_y}$ cu $i\neq j$).

Exemplu.

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{dacă} \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{dacă} \quad (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

După calcule ușor de urmărit obținem:

$$f'_x(x,y)=\begin{cases} y\left[\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}+\dfrac{4x^2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}\right] & \text{dacă} \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{dacă} \quad (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

$f'_x(0,y)=-y$, $f''_{yx}(0,0)=-1$.

$$f'_y(x,y)=\begin{cases} x\left[\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}-\dfrac{4x^2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}\right] & \text{dacă} \quad (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{dacă} \quad (x,y)=(0,0). \end{cases}$$

$f'_y(x,0)=x$, $f''_{xy}(0,0)=1$.

Aşadar, în acest caz avem $f''_{xy}(0,0)\neq f''_{yx}(0,0)$.

O condiţie suficientă pentru ca derivatele mixte de ordinul doi să fie egale este dată de următoarea teoremă, cunoscută sub numele de criteriul lui Schwarz.

Teorema 4.5.1. *Fie $A\subset\mathbb{R}^n$ o mulţime deschisă, $f:A\to\mathbb{R}$ şi $(a,b)\in A$. Dacă există f''_{xy} şi f''_{yx} pe o vecinătate V a punctului (a,b), $V\subset A$ şi sunt continue în punctul (a,b), atunci $f''_{xy}(a,b)=f''_{yx}(a,b)$.*

Demonstraţie

Fie $V=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\,(x-a)^2+(y-b)^2<r^2\right\}\subset A$ şi fie

$$R(x,y)=f(x,y)-f(x,b)-f(a,y)+f(a,b),\ \ (x,y)\in V.$$

Fie $(x,y)\in V$ fixat şi fie I (respectiv J) intervalul închis de capete a şi x (respectiv b şi y).

Dacă notăm cu $g(t)=f(t,y)-f(t,b)$, $t\in I$, atunci $R(x,y)=g(x)-g(a)$. Din Teorema Lagrange rezultă că există ξ între a şi x astfel încât

$$R(x,y)=g'(\xi)(x-a)=\left[f'_x(\xi,y)-f'_x(\xi,b)\right](x-a).$$

Aplicând din nou teorema Lagrange rezultă că există η între y şi b astfel încât

$$R(x,y)=f''_{yx}(\xi,\eta)(x-a)(y-b). \tag{4.17}$$

În mod analog, dacă notăm cu

$$h(t)=f(x,t)-f(a,t),\ t\in J$$

atunci

$$R(x,y)=h(y)-h(b).$$

Aplicând de două ori teorema Lagrange, rezultă

$$R(x,y)=f''_{xy}(\xi',\eta')(x-a)(y-b). \tag{4.18}$$

Aşadar avem

$$f''_{yx}(\xi,\eta)=f''_{xy}(\xi',\eta'). \tag{4.19}$$

Deoarece f''_{yx} şi f''_{xy} sunt continue în (a,b), trecând la limită în (4.19) rezultă:

$$f''_{yx}(a,b) = \lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f''_{yx}(\xi,\eta) = \lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f''_{xy}(\xi',\eta') = f''_{xy}(a,b).$$

Observația 4.5.1. Teorema 4.5.1 se poate generaliza pentru funcția de n variabile şi anume: dacă $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, A deschisă şi există $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ şi $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j\, \partial x_i}$ pe o vecinătate V a punctului $a \in A$, $V \subset A$ şi sunt continue în a, atunci

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j\, \partial x_i}(a).$$

Definirea derivatelor parțiale de ordin mai mare ca 2 este evidentă. De exemplu, dacă există $\dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j\, \partial x_k}\right)$, aceasta se notează cu $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j\, \partial x_k}$.

Definiția 4.5.2. *Orice element* $k = (k_1, k_2, \ldots, k_n) \in \mathbb{N}^n$ *se numeşte multiindice. Notăm cu* $|k| = k_1 + k_2 + \ldots + k_n$ *şi cu* $D^k f = \dfrac{\partial^{|k|} f}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}}$, *unde* $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Funcția f se numeşte de clasă C^p *pe mulțimea deschisă* $A \subset \mathbb{R}^n$ *dacă există* $D^k f$ *şi e continuă pe A pentru orice multi-indice k cu* $|k| \le p$.

Exemplu. Fie $k = (2,1,0,3)$. Atunci $|k| = 6$ şi $D^k f = \dfrac{\partial^6 f}{\partial x_1^2 \partial x_2 \partial x_4^3}$.

Funcția f este de clasă C^5 pe mulțimea deschisă $A \subset \mathbb{R}^4$, dacă există $D^k f$ şi e continuă pe A, pentru orice multi-indice $k \in \mathbb{N}^4$ cu $|k| \le 5$.

Pentru derivate mixte de ordin mai mare ca 2, posibilitatea permutării ordinii de derivare se demonstrează aplicând de mai multe ori Teorema 4.5.1.

Exemplu. Fie $A \subset \mathbb{R}^3$ o mulțime deschisă şi $f \in C^4(A)$. Avem:

$$\frac{\partial^4 f}{\partial z\, \partial x\, \partial z\, \partial y} = \frac{\partial^2}{\partial z\, \partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z\, \partial y}\right) = \frac{\partial^2}{\partial x\, \partial z}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial z}\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial^2}{\partial z\, \partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial^2}{\partial y\, \partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\right] = \frac{\partial^4 f}{\partial x\, \partial y\, \partial z^2}.$$

Definiția 4.5.3. *Fie* $A \subset \mathbb{R}^n$ *o mulțime deschisă,* $a \in A$ *și* $f : A \to \mathbb{R}$ *. Dacă* $f \in C^2(A)$*, atunci se numește diferențiala de ordinul doi a funcției f în punctul a și se notează cu* $\mathrm{d}^2 f(a)$ *următoarea formă pătratică pe* $\mathbb{R}^n$:

$$\mathrm{d}^2 f(a)(h) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) h_i h_j \,, \ \forall \ h = (h_1, \ldots, h_n) \in \mathbb{R}^n .$$

Se folosește și notația

$$\mathrm{d}^2 f(a) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \mathrm{d}x_i \mathrm{d}x_j \,.$$

Matricea simetrică $H = \left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \, \partial x_j}(a) \right)_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}}$ se numește matricea hessiană asociată funcției f în punctul a. În cazul funcțiilor de două variabile avem

$$\mathrm{d}^2 f(a,b)(h,k) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) k^2 \,, \ \forall \ (h,k) \in \mathbb{R}^2 ,$$

sau

$$\mathrm{d}^2 f(a,b) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) \mathrm{d}x^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) \mathrm{d}x \mathrm{d}y + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) \mathrm{d}y^2 .$$

Exemplu. Fie $f(x,y) = x^3 y - 2xy^2$.

Avem

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 y - 2y^2 \,; \ \frac{\partial f}{\partial y} = x^3 - 4xy \,.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6xy \,; \ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 3x^2 - 4y \,; \ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -4x$$

$$\mathrm{d}^2 f(1,2) = 12\mathrm{d}x^2 - 10\mathrm{d}x\mathrm{d}y - 4\mathrm{d}y^2 .$$

Pentru o funcție de trei variabile, diferențiala de ordinul doi arată astfel:

$$\mathrm{d}^2 f(a,b,c) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b,c) \mathrm{d}x^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b,c) \mathrm{d}y^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(a,b,c) \mathrm{d}z^2 +$$

$$+2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b,c) \mathrm{d}x \mathrm{d}y + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(a,b,c) \mathrm{d}x \mathrm{d}z + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(a,b,c) \mathrm{d}y \mathrm{d}z \,.$$

Revenind la cazul general al funcțiilor de n variabile, constatăm că diferențiala de ordinul doi este o formă pătratică. Dacă notăm cu $a_{ij} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)$, atunci $a_{ij} = a_{ji}$, $\forall\ i$ și j și $\mathrm{d}^2 f(a)(h) = \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} h_i h_j$.

Reamintim următoarele definiții și rezultatele de algebră liniară.

Diferențiala de ordinul 2, $\mathrm{d}^2 f(a)$ este pozitiv (negativ) definită dacă $\mathrm{d}^2 f(a)(h) > 0$ $\left[\mathrm{d}^2 f(a)(h) < 0\right]$ pentru orice $h \neq 0$.

Dacă există $h_i \neq 0$, $i = 1,2$, astfel încât $\mathrm{d}^2 f(a)(h_1) < 0$ și $\mathrm{d}^2 f(a)(h_2) > 0$, spunem că $\mathrm{d}^2 f(a)$ este alternantă.

Introducem notațiile:

$$\Delta_1 = a_{11};\ \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix};\ \ \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix};\ \ \Delta_n = \det A\,.$$

Teorema 4.5.2. (Sylvester)

Condiția necesară și suficientă ca $\mathrm{d}^2 f(a)$ *să fie pozitiv* (*negativ*) *definită este ca* $\Delta_i > 0$, $\forall\ i = \overline{1,n}$ (*respectiv* $(-1)^i \Delta_i > 0$, $\forall\ i = \overline{1,n}$).

În continuare, vom introduce următoarea convenție de notație:

Vom nota cu $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)$ în loc de $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)\right)^2$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)$ în loc de $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b) \cdot \dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)$ în loc de $\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)\right)^2$

Cu această convenție, pentru funcții de două variabile avem:

$$\mathrm{d}^2 f(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)\mathrm{d}x^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)\mathrm{d}y^2 =$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\mathrm{d}y\right)^{(2)}.$$

Pentru a defini diferențiala de ordinul m, vom extinde convenția precedentă în mod firesc și anume: vom nota

cu $\dfrac{\partial^m f}{\partial x^m}(a,b)$ în loc de $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)\right)^m$,

cu $\dfrac{\partial^m f}{\partial x^k\,\partial y^{m-k}}(a,b)$ în loc de $\dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(a,b)\cdot\dfrac{\partial^{m-k} f}{\partial y^{m-k}}(a,b)$ etc.

Definiția 4.5.4. *Fie* $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, *A deschisă şi* $(a,b)\in A$. *Dacă* $f \in C^m(A)$, *atunci diferențiala de ordinul m a funcției f în punctul* (a,b) *se defineşte astfel:*

$$\mathrm{d}^m f(a,b) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\mathrm{d}y\right)^{(m)} =$$

$$= \sum_{k=0}^{m} C_m^k \frac{\partial^m f}{\partial x^{m-k}\partial y^k}(a,b)\mathrm{d}x^{m-k}\mathrm{d}y^k =$$

$$= C_m^0 \frac{\partial^m f}{\partial x^m}(a,b)\mathrm{d}x^m + C_m^1 \frac{\partial^m f}{\partial x^{m-1}\partial y}(a,b)\mathrm{d}x^{m-1}\mathrm{d}y + \ldots + C_m^m \frac{\partial^m f}{\partial y^m}(a,b)\mathrm{d}y^m .$$

Prin inducție matematică se poate demonstra următoarea formulă care generalizează binomul lui Newton:

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^m = \sum_{\substack{k_1+\ldots+k_n=m\\ k_i\in\mathbb{N}}} \frac{(k_1+\ldots+k_n)!}{k_1!\ldots k_n!} a_1^{k_1}\ldots a_n^{k_n} .$$

Folosind această formulă şi convențiile anterioare, putem defini diferențiala de ordinul *m* a unei funcții

Definiția 4.5.5. *Fie* $A \subset \mathbb{R}^n$ *o mulțime deschisă,* $a \in A$ *şi* $f : A \to \mathbb{R}$. *Dacă* $f \in C^m(A)$ *atunci*

$$\mathrm{d}^m f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\mathrm{d}x_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\mathrm{d}x_n\right)^{(m)} =$$

$$= \sum_{\substack{k_1+\ldots+k_n=m\\ k_i\in\mathbb{N}}} \frac{(k_1+\ldots+k_n)!}{k_1!\ldots k_n!}\cdot\frac{\partial^m f}{\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_n^{k_n}}(a)dx_1^{k_1}\ldots dx_n^{k_n} .$$

4.6. Derivatele parțiale de ordinul doi ale funcțiilor compuse de două variabile

Teorema 4.6.1. *Fie A şi B două mulțimi deschise din* $\mathbb{R}^2$, $F=(u,v):A\to B$, $f:B\to\mathbb{R}$ *şi* $h=f\circ F:A\to\mathbb{R}$, $h(x,y)=f\left[u(x,y),v(x,y)\right]$, $\forall\ (x,y)\in A$.

Dacă $F\in C^2(A)$ şi $f\in C^2(B)$, atunci $h\in C^2(A)$ şi avem:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}.$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}+$$
$$+\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}.$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}.$$

Demonstrație

În condițiile date, derivatele de ordinul întâi există şi conform formulelor (4.9) din subcap. 4.3 avem

$$\begin{aligned}\frac{\partial h}{\partial x}&=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\\ \frac{\partial h}{\partial y}&=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\end{aligned}\tag{4.20}$$

Vom examina existența derivatei $\dfrac{\partial^2 h}{\partial x^2}$ şi modul ei de calcul.

Din Teorema 4.3.1 rezultă că funcția $(x,y)\to\dfrac{\partial f}{\partial u}\left[u(x,y),v(x,y)\right]:A\to\mathbb{R}$ admite derivate parțiale de ordinul întâi şi anume:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)=\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}.\tag{4.21}$$

În mod analog avem:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}.\tag{4.22}$$

Din (4.20), (4.21) şi (4.22) rezultă:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+$$

$$+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial u^2}+$$

$$+\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}.$$

Deoarece, în condițiile noastre $\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}=\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}$, în final obținem:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+2\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}.$$

În mod analog se demonstrează şi celelalte două formule din enunțul teoremei.

Exemplu. Fie $f\in C^2\left(\mathbb{R}^2\right)$ şi $h(x,y)=f\left(x^2+y^2,xy\right)$. Dacă notăm cu $u(x,y)=x^2+y^2$ şi cu $v(x,y)=xy$, atunci avem:

$$\frac{\partial h}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot 2x+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot y$$

$$\frac{\partial h}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot 2y+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot x$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\cdot 4x^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\cdot 2xy+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\cdot y^2+\frac{\partial f}{\partial u}\cdot 2$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\cdot 4xy+\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\left(2x^2+2y^2\right)+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\cdot yx+\frac{\partial f}{\partial u}\cdot 1$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\cdot 4y^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\cdot 2xy+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\cdot x^2+\frac{\partial f}{\partial u}2$$

Dacă facem convenția să notăm formal

$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}$ în loc de $\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2$,

$\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}$ în loc de $\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial f}{\partial v}$ şi

$\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}$ în loc de $\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2$,

atunci expresiile derivatelor de ordinul doi ale funcțiilor compuse se rețin mai uşor sub forma:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^{(2)} + \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} = \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial h}{\partial y}\right) + \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^{(2)} + \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial y^2},$$

unde prin ridicarea formală la pătrat a lui $\frac{\partial h}{\partial x}$ înțelegem

$$\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^{(2)} = \left(\frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}\right)^{(2)} =$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 \text{ etc.}$$

De pildă în exemplul de mai sus

$$\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^{(2)} = \left(\frac{\partial f}{\partial u} \cdot 2x + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot y\right)^{(2)} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \cdot 4x^2 + 4xy\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \cdot y^2 \text{ etc.}$$

4.7. Formula Taylor. Extremele funcțiilor de mai multe variabile

Pentru orice două puncte $a, b \in \mathbb{R}^n$, notăm cu $[a,b] = \{(1-t)a + tb;\ t \in [0,1]\}$. Mulțimea $[a,b]$ se numeşte segmentul închis de capete a şi b. Segmentul deschis se notează cu $(a,b) = \{(1-t)a + tb;\ t \in (0,1)\}$.

Definiția 4.7.1. *O mulțime $C \subset \mathbb{R}^n$ se numeşte convexă dacă $\forall\ a,b \in C$ rezultă că $[a,b] \subset C$.*

Observația 4.7.1. Orice bilă deschisă (închisă) din $\mathbb{R}^n$ este o mulțime convexă.

Într-adevăr, fie $x, y \in B(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^n;\ \|x-a\| < r\}$. Atunci $\|x-a\| < r$ şi $\|y-a\| < r$. Pentru orice $t \in [0,1]$ avem

$$\left\|(1-t)x+ty-a\right\|=\left\|(1-t)(x-a)+t(y-a)\right\|\leq$$
$$\leq(1-t)\left\|x-a\right\|+t\left\|(y-a)\right\|<(1-t)r+tr=r\,.$$

Din Observația 4.7.1 rezultă orice interval din $\mathbb{R}$, orice disc (pătrat) din $\mathbb{R}^2$, orice sferă (cub) din $\mathbb{R}^3$ este o mulțime convexă.

Teorema 4.7.1 (Taylor). *Fie* $f:A\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $a\in A$ *un punct interior şi* $r>0$ *astfel încât* $V=B(a,r)\subset A$.

Dacă $f\in C^{m+1}(V)$, atunci, pentru orice $x\in V$, există $\xi\in(a,x)$ astfel încât

$$f(a+h)=f(a)+\frac{1}{1!}\mathrm{d}f(a)(h)+\frac{1}{2!}\mathrm{d}^2f(a)(h)+\ldots+\frac{1}{m!}\mathrm{d}^mf(a)(h)+$$
$$+\frac{1}{(m+1)!}\mathrm{d}^{m+1}f(\xi)(h),\ \text{unde}\ \ h=x-a\,.$$

Demonstrație

Pentru simplificarea scrierii facem demonstrația în cazul particular $n=2$.

Fie $a=(a_1,a_2)\in A$, $x=(x_1,x_2)\in V$ fixat şi $h=(h_1,h_2)=x-a$. Pentru orice $t\in[0,1]$ notăm cu

$$u_1(t)=a_1+th_1=a_1+t(x_1-a_1)$$
$$u_2(t)=a_2+th_2=a_2+t(x_2-a_2)$$

şi considerăm funcția compusă

$$g(t)=f\left[u_1(t),u_2(t)\right],\ \ t\in[0,1].$$

Evident, g este o funcție de clasă C^{m+1} pe $[0,1]$ şi conform formulei Mac Laurin, există $0<\theta<1$ astfel încât

$$g(1)=g(0)+\frac{1}{1!}g'(0)+\frac{1}{2!}g''(0)+\ldots+\frac{1}{m!}g^{(m)}(0)+\frac{1}{(m+1)!}g^{(m+1)}(\theta).\quad(4.23)$$

Observăm că

$$g(1)=f(x)=f(a+h)\ \text{ şi }\ g(0)=f(a)\quad(4.24)$$

Pe de altă parte avem:

$$g'(t)=\frac{\partial f}{\partial x_1}\left[u_1(t),u_2(t)\right]\cdot u_1'(t)+\frac{\partial f}{\partial x_2}\left[u_1(t),u_2(t)\right]\cdot u_2'(t)$$

sau $$g'(t)=\frac{\partial f}{\partial x_1}\left[u_1(t),u_2(t)\right]\cdot h_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}\left[u_1(t),u_2(t)\right]\cdot h_2\,,$$

deci $$g'(0)=\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)h_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}(a)h_2=df(a)(h)\,.\quad(4.25)$$

De asemenea, din Teorema 4.6.1 rezultă

$$g''(t)=\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\left[u_1(t),u_2(t)\right]\cdot\left(u_1'(t)\right)^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\,\partial x_2}\left[u_1(t),u_2(t)\right]\cdot u_1'(t)\,u_2'(t)+$$

$$+\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\left[u_1(t),u_2(t)\right]\cdot\left(u_2'(t)\right)^2+\frac{\partial f}{\partial x_1}\left[u_1(t),u_2(t)\right]\cdot u_1''(t)+$$

$$+\frac{\partial f}{\partial x_2}+\left[u_1(t),u_2(t)\right]u_2''(t)$$

Deoarece $u_1''(t)=u_2''(t)=0$ rezultă:

$$g''(0)=\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a)h_1^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\,\partial x_2}(a)h_1h_2+\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a)h_2^2=\mathrm{d}^2 f(a)(h) \quad (4.26)$$

Se poate arăta că

$$g^{(k)}(0)=\mathrm{d}^k f(a)(h),\ \forall\ \ k\in\mathbb{N}^* \quad (4.27)$$

Dacă notăm cu $\xi=a+\theta h$ şi ținem seama de (4.24)-(4.27) în (4.23) obținem:

$$f(x)=f(0)+\frac{1}{1!}\mathrm{d}f(a)(h)+\frac{1}{2!}\mathrm{d}^2 f(a)(h)+\ldots+\frac{1}{m!}\mathrm{d}^m f(a)(h)+$$

$$+\frac{1}{(m+1)!}\mathrm{d}^{m+1} f(\xi)(h),$$

unde $\xi\in(a,x)$, adică formula din enunțul teoremei.

Teorema 4.7.2 (Lagrange). *Fie $f:A\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $a\in A$ un punct interior şi V o vecinătate convexă şi deschisă a punctului a, $V\subset A$. Dacă $f\in C^1(V)$, atunci pentru orice $x\in V$, există $\xi\in(a,x)$ astfel încât*

$$f(x)-f(a)=\frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi)(x_1-a_1)+\ldots+\frac{\partial f}{\partial x_n}(\xi)(x_n-a_n).$$

Demonstrația rezultă imediat din formula Taylor, pentru cazul particular $m = 0$. În cazul $n = 2$ obținem:

$$f(x_1,x_2)-f(a_1,a_2)=\frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi_1,\xi_2)(x_1-a_1)+\frac{\partial f}{\partial x_2}(\xi_1,\xi_2)(x_2-a_2).$$

Definiția 4.7.2. *Fie $f:A\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ şi $a\in A$. Spunem că punctul a este un punct de maxim (minim) local pentru f dacă există o vecinătate V a punctului a astfel încât $f(x)\le f(a)$ [respectiv $f(x)\ge f(a)$], oricare ar fi $x\in V$.*

Ca şi la funcțiile de o variabilă, un punct de maxim (minim) local se numeşte punct de extrem local.

Definiția 4.7.3. *Fie* $f: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *şi* $a \in A$ *un punct interior. Dacă f este diferențiabilă în punctul a şi* $df(a) = 0$, *atunci x = a se numeşte punct critic pentru f.*

Teorema 4.7.3. *Fie* $f: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *şi* $a \in A$ *un punct interior. Dacă a este punct de extrem local pentru f şi dacă f este diferențiabilă în punctul a, atunci a este punct critic pentru f.*

Demonstrație

Fie $A_i = \left\{ t \in \mathbb{R} \,\middle|\, \left(a_1, \ldots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \ldots, a_n\right) \in A \right\}$ şi fie funcția de o variabilă $\varphi_i : A_i \to \mathbb{R}$, definită astfel $\varphi_i(t) = f\left(a_1, \ldots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \ldots, a_n\right)$, $t \in A_i$.

Evident, φ_i este derivabilă în punctul $t = a_i$ şi acest punct este punct de extrem local pentru φ_i. Din Teorema Fermat rezultă că $\varphi'_i(a_i) = 0$, deci $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$, pentru orice $i = \overline{1, n}$. Aşadar, $\mathrm{d}f(a) = 0$, deci $x = a$ este punct critic pentru *f*.

Ca şi în cazul funcțiilor de o variabilă, nu orice punct critic este punct de extrem local. Următoarea teoremă stabileşte condiții suficiente pentru ca un punct critic să fie punct de extrem local.

Teorema 4.7.4. *Fie* $f: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $a \in A$ *un punct interior* $r > 0$ *şi* $V = B(a, r) \subset A$. *Mai presupunem că* $f \in C^2(V)$ *şi că punctul x = a este punct critic pentru f. Atunci*

(*i*) *Dacă* $\mathrm{d}^2 f(a)$ *este pozitiv definită, punctul a este punct de minim local pentru f.*

(*ii*) *Dacă* $\mathrm{d}^2 f(a)$ *este negativ definită, punctul a este punct de maxim local pentru f.*

(*iii*) *Dacă* $\mathrm{d}^2 f(a)$ *este alternantă în orice vecinătate a punctului a, punctul a nu este punct de extrem local pentru f.*

Demonstrație

Fie $x \in V$ oarecare fixat şi $h = x - a$. Din formula Taylor rezultă că există $\xi \in (a, x)$ astfel încât

$$f(x) = f(a) + \frac{1}{1!}\mathrm{d}f(a)(h) + \frac{1}{2!}\mathrm{d}^2 f(\xi)(h).$$

$$f(x) - f(a) = \frac{1}{2}\mathrm{d}^2 f(\xi)(h) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\xi) h_i h_j .$$

În continuare dacă notăm cu $\alpha_i = \dfrac{h_i}{\|h\|_2}$, atunci $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i^2 = 1$ şi

$$f(x) - f(a) = \frac{\|h\|^2}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\xi)\alpha_i \alpha_j \, . \tag{4.28}$$

Dacă notăm cu $\omega(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} \left[\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\xi) - \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \right] \alpha_i \alpha_j$ şi ținem seamă că $f \in C^2(V)$, rezultă că $\lim\limits_{x \to a} \omega(x) = 0$ şi formula (4.28) devine

$$f(x) - f(a) = \frac{\|h\|^2}{2} \left[\mathrm{d}^2 f(a)(\alpha) + \omega(x) \right].$$

Fie $S = \left\{ x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n ; \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 = 1 \right\}$. Evident S este o mulțime închisă şi mărginită, deci compactă. Aplicația $\alpha \to \mathrm{d}^2 f(a)(\alpha) : S \to \mathbb{R}$ este continuă (fiind o funcție polinomială), deci este mărginită şi îşi atinge marginile pe S. Presupunem că $\mathrm{d}^2 f(a)$ este pozitiv definită.

Fie $\alpha_0 \in S$ astfel încât $m = \inf\limits_{\alpha \in S} \mathrm{d}^2 f(a)(\alpha) = \mathrm{d}^2 f(a)(\alpha_0) > 0$. Cum $\lim\limits_{x \to a} \omega(x) = 0$, rezultă că există o vecinătate V_1 a punctului a, $V_1 \subset V$ astfel încât $|\omega(x)| < \dfrac{m}{2}$, $\forall\ x \in V_1$. Aşadar, pentru orice $x \in V_1$ avem:

$$f(x) - f(a) = \frac{\|h\|^2}{2} \left[\mathrm{d}^2 f(a)(\alpha) + \omega(x) \right] > \frac{\|h\|^2}{2} \left(m - \frac{m}{2} \right) \geq 0 \, .$$

Rezultă că $f(x) \geq f(a)$, $\forall\ x \in V_1$, deci a este punct de minim local pentru *f*.

Dacă $\mathrm{d}^2 f(a)$ este negativ definită, se demonstrează la fel că există o vecinătate V_2 a punctului a, $V_2 \subset V$ astfel încât $f(x) \leq f(a)$, $\forall\ x \in V_2$, deci a este punct de maxim local pentru *f*. În cazul (iii) diferența $f(x) - f(a)$ nu păstrează semn constant pe nici o vecinătate a punctului a, deci punctul a nu este punct de extrem local pentru *f*.

Exemple. Să se afle punctele de extrem local ale funcțiilor

1. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 4z$

Punctele critice se află rezolvând sistemul:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x + 2 = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 2y + 4 = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} = 2z - 4 = 0 \end{cases}$$

Rezultă un singur punct critic $a = (-1, -2, 2)$.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 2\,; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = 0$$

$$\mathrm{d}^2 f(a) = 2\left(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2\right)$$

$$\Delta_1 = 2 > 0\,; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0\,; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 8 > 0\,.$$

Rezultă că $d^2 f(a)$ este pozitiv definită, deci punctul $a = (-1, -2, 2)$ este un punct de minim local.

2. $f(x, y) = x^3 + y^3 + 21xy + 36x + 36y$.

Punctele critice sunt $M_1(-4, -4)$ şi $M_2(-3, -3)$.

$$\mathrm{d}^2 f(x, y) = 6x\mathrm{d}x^2 + 42\mathrm{d}x\mathrm{d}y + 6y\mathrm{d}y^2$$

$$\mathrm{d}^2 f(-4, -4) = -24\mathrm{d}x^2 + 42\mathrm{d}x\mathrm{d}y + 24\mathrm{d}y^2$$

$$\Delta_1 = -24 < 0\,; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} -24 & 21 \\ 21 & -24 \end{vmatrix} > 0\,.$$

Rezultă că $\mathrm{d}^2 f(-4, -4)$ este negativ definit, deci punctul $M_1(-4, -4)$ este punct de maxim local.

$$\mathrm{d}^2 f(-3, -3) = -18\mathrm{d}x^2 + 42\mathrm{d}x\mathrm{d}y - 18\mathrm{d}y^2$$

$$\Delta_1 = -18\,; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} -18 & 21 \\ 21 & -18 \end{vmatrix} < 0\,.$$

$\mathrm{d}^2 f(-3, -3)$ este alternantă, deci punctul $(-3, -3)$ nu este punct de extrem local.

3. $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$.

$\dfrac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 4x + 4y\,;$ $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2 - 4\,;$ $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 4\,;$ $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12y^2 - 4\,.$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3 + 4x - 4y\,.$$

Punctele critice sunt $M_1\left(\sqrt{2},-2\right)$, $M_2\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$, $M_3(0,0)$.

$\mathrm{d}^2 f(M_1) = 20\mathrm{d}x^2 + 8\mathrm{d}x\mathrm{d}y + 20\mathrm{d}y^2$; $\Delta_1 = 20 > 0$; $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{vmatrix} > 0$.

$M_1\left(\sqrt{2},-2\right)$ este punct de minim local.

$\mathrm{d}^2 f(M_2) = \mathrm{d}^2 f(M_1)$, deci $M_2\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$ este de asemenea punct de minim local.

$\mathrm{d}^2 f(0,0) = -4\mathrm{d}x^2 + 8\mathrm{d}x\mathrm{d}y - 4\mathrm{d}y^2$

$\Delta_1 = -4 < 0$; $\Delta_2 = \begin{vmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} = 0$.

Deoarece $\Delta_2 = 0$, nu putem aplica Teorema 4.7.4. Ne putem da seama dacă punctul $M_3(0,0)$ este sau nu punct de extrem plecând de la definiție.

Într-adevăr, observăm că $f(0,0) = 0$, $f(x,0) = x^2\left(x^2 - 2\right)$ și $f(x,x) = 2x^4$. Rezultă că în orice vecinătate a punctului $(0,0)$ există puncte în care $f > 0$ și puncte în care $f < 0$, în timp ce $f(0,0) = 0$. Așadar, $(0,0)$ nu este punct de extrem local pentru f.

4.8. Teorema de inversiune locală

Definiția 4.8.1. *Fie $A, B \subset \mathbb{R}^n$ două mulțimi deschise. O funcție $F : A \to B$ se numește difeomorfism dacă*

a) F este bijectivă

b) $F \in C^1(A)$

c) $F^{-1} \in C^1(B)$

O astfel de definiție este necesară deoarece există funcții care îndeplinesc condițiile a) și b) dar nu îndeplinesc condiția c).

Într-adevăr, fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$. Evident f este bijectivă și $F \in C^1(\mathbb{R})$. Inversa sa f^{-1} nu este difeomorfism, deoarece nu este diferențiabilă în $y = 0$, deci $f^{-1} \notin C^1(\mathbb{R})$.

Observația 4.8.1. Fie A, B şi D mulțimi deschise din $\mathbb{R}^n$ şi $F: A \to B$, $G: B \to D$ difeomorfism. Atunci $H = G \circ F : A \to D$ este difeomorfism.

Afirmația rezultă din faptul că o compunere de funcții de clasă C^1 este de asemenea o funcție de clasă C^1 şi din observația că $(G \circ F)^{-1} = F^{-1} \circ G^{-1}$.

Cel mai simplu exemplu de difeomorfism este operatorul de translație. Fie $y \in \mathbb{R}^n$ oarecare fixat şi fie $\tau_y : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, definit prin $\tau_y(x) = x + y$, $\forall\ x \in \mathbb{R}^n$. Evident $\tau_y \in C^1(\mathbb{R}^n)$, τ_y este bijectivă şi $\tau_y^{-1} = \tau_{-y} \in C^1(\mathbb{R}^n)$.

Următorul rezultat este cunoscut sub numele de teorema de inversiune locală pentru funcții de o variabilă.

Teorema 4.8.1. *Fie $A \subset \mathbb{R}$ o mulțime deschisă, $a \in A$ şi $f : A \to \mathbb{R}$. Dacă $f \in C^1(A)$ şi $f'(a) \neq 0$, atunci există o vecinătate deschisă U a punctului a cu proprietățile: $U \subset A$, $f'(x) \neq 0$, $\forall\ x \in U$ şi $f : U \to V = f(U)$ este difeomorfism.*

Demonstrație

Presupunem că $f'(a) > 0$. Cum f' este continuă în a, rezultă că există un interval deschis U care conține punctul a şi $f'(x) > 0$, $\forall\ x \in U$.

Dacă notăm cu $V = f(U)$, atunci V este un interval deschis şi $f : U \to V$ este bijectivă (fiind strict crescătoare). Se ştie de la liceu că dacă $f' \neq 0$ pe U, atunci $f^{-1} : V \to U$ este derivabilă pe V şi $\left(f^{-1}\right)'(y) = \dfrac{1}{f'(x)}$, $\forall\ y \in V$, $y = f(x)$. Evident, $f^{-1} \in C^1(V)$, deci f este difeomorfism.

În continuare prezentăm teorema de inversiune locală pentru funcții vectoriale.

Teorema 4.8.2. *Fie $A \subset \mathbb{R}^n$ o mulțime deschisă, $a \in A$ şi $F : A \to \mathbb{R}^n$. Dacă $F \in C^1(A)$ şi $\det J_F(a) \neq 0$, atunci există o vecinătate deschisă U a punctului a cu proprietățile: $U \subset A$, $\det J_F(x) \neq 0$, $\forall\ x \in U$, $F : U \to V = F(U)$ este difeomorfism şi*

$$\det J_{F^{-1}}(y) = \frac{1}{\det J_F(x)},\ \forall\ y \in V,\ y = F(x).$$

Demonstrație

Pentru început facem observația că putem presupune că $a = 0$ şi că $F(0) = 0$. Într-adevăr, fie $A_1 = \{x - a;\ x \in A\}$ şi fie $F_1 : A_1 \to \mathbb{R}^n$, $F_1(t) =$

$=F(t+a)-b$, $t\in A_1$, unde $b=F(a)$. Avem $F_1(0)=0$ şi $F=\tau_b\circ F_1\circ\tau_{-a}$. Dacă vom arăta că F_1 este difeomorfism va rezulta că şi F este difeomorfism, deoarece translațiile sunt difeomorfisme.

Observăm de asemenea că putem presupune că $\mathrm{d}F(0)=I$ (operatorul identitate pe $\mathbb{R}^n$).

Într-adevăr, fie $T=\mathrm{d}F(0)$ şi fie $F_2=T^{-1}\circ F$. Deoarece diferențiala de ordinul întâi a oricărei aplicații liniare este acea aplicație liniară însăşi, rezultă că

$$\mathrm{d}F_2(0)=T^{-1}\circ\mathrm{d}F(0)=I.$$

Aşadar $F=T\circ F_2$ şi $\mathrm{d}F_2(0)=I$.

Cum $\det J_F(0)\neq 0$ prin ipoteză, rezultă că $T=\mathrm{d}F(0):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ este difeomorfism. Prin urmare, dacă F_2 este difeomorfism, atunci şi F este difeomorfism.

Fie deci $F:A\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, $0\in A$, $F(0)=0$ şi $\mathrm{d}F(0)=I$.

Dacă notăm cu $H(x)=F(x)-x$, $\forall\ x\in A$, atunci $H\in C^1(A)$, $H(0)=0$ şi $dH(0)=0$. Cum componentele scalare $h_1,\dots,h_n$ ale funcției vectoriale H sunt de clasă C^1 pe A şi $\dfrac{\partial h_i}{\partial x_j}(0)=0$, rezultă că există $\delta_1>0$ astfel încât

$$\left|\frac{\partial h_i}{\partial x_j}(t)\right|<\frac{1}{2n\sqrt{n}},\ \ \forall\ \ t\in B(0,\delta_1)\subset A,\ \forall\ \ i,j=\overline{1,n}.$$

Conform teoremei Lagrange, pentru orice $x,y\in B(0,\delta_1)$ există un punct ξ_i pe segmentul deschis de capete x şi y astfel încât

$$|\,h_i(x)-h_i(y)|=\left|\frac{\partial h_i}{\partial x_1}(\xi_i)(x_1-y_1)+\ldots+\frac{\partial h_i}{\partial x_n}(\xi_i)(x_n-y_n)\right|\le$$

$$\le\left(\left|\frac{\partial h_i}{\partial x_1}(\xi_i)\right|+\ldots+\left|\frac{\partial h_i}{\partial x_n}(\xi_i)\right|\right)\|x-y\|<\frac{1}{2\sqrt{n}}\|x-y\|.$$

(Norma folosită în această demonstrație este $\|\ \|_2$).

Aşadar avem: $\|H(x)-H(y)\|<\dfrac{1}{2}\|x-y\|$.

Fie $0<\delta<\delta_1$ astfel încât $K=\overline{B(0,\delta)}\subset B(0,\delta_1)\subset A$. Rezultă că:

$$\|H(x)-H(y)\|<\frac{1}{2}\|x-y\|,\ \ \forall\ \ x,y\in K. \tag{4.29}$$

În particular, pentru $y=0$ avem

$$\|H(x)\|<\frac{1}{2}\|x\|\le\frac{\delta}{2},\ \forall\ \ x\in K. \tag{4.30}$$

Fie $V_1 = B\left(0, \frac{\delta}{2}\right)$ şi $U_1 = B(0,\delta) \cap F^{-1}(V_1)$. Observăm că V_1 şi U_1 sunt mulţimi deschise, $0 \in U_1$ şi $F(U_1) \subset V_1$. Vom arăta că $F: U_1 \to V_1$ este bijectivă.

Într-adevăr, dacă $F(x) = F(y)$, unde $x, y \in U_1$ atunci $H(x) + x = H(y) + y$ şi ţinând seama de (4.29) rezultă $\|x - y\| = \|H(x) - H(y)\| \le \frac{1}{2}\|x - y\|$, inegalitate care nu poate avea loc decât dacă $\|x - y\| = 0$, adică $x = y$.

Aşadar, am dovedit că $F: U_1 \to V_1$ este injectivă.

Pentru a arăta că este şi surjectivă folosim teorema de punct fix a lui Banach. Pentru orice $y \in V_1$ considerăm funcţia $\phi_y : K \to \mathbb{R}^n$, definită astfel: $\phi_y(x) = y - H(x)$, $\forall\ x \in K$.

Din (4.29) rezultă că

$$\|\phi_y(x_1) - \phi_y(x_2)\| < \frac{1}{2}\|x_1 - x_2\|,\ \forall\ x_1, x_2 \in K.$$

Pe de altă parte, din (4.30) avem:

$$\|\phi_y(x)\| \le \|y\| + \|H(x)\| < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta,\ \forall\ x \in K.$$

Aşadar, $\phi_y : K \to K$ este o contracţie. Din Teorema de punct fix a lui Banach, rezultă că există $z \in K$ unic astfel încât $z = \phi_y(z)$.

Evident, z depinde de y şi de aceea vom nota $z = G(y)$. Ţinând seama de definiţiile funcţiilor ϕ_y şi H avem

$$G(y) = y - H[G(y)],\ \forall\ y \in V_1 \tag{4.31}$$

şi

$$F[G(y)] = y,\ \forall\ y \in V_1 \tag{4.32}$$

Pe de altă parte din (4.30) şi (4.31) rezultă

$$\|G(y)\| \le \|y\| + \|H[G(y)]\| < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta. \tag{4.33}$$

Din (4.32) şi (4.33) deducem că $G(y) \in B(0,\delta) \cap F^{-1}(V_1) = U_1$, deci $G: V_1 \to U_1$ şi $F \circ G = I$. Prin urmare am arătat că $F: U_1 \to V_1$ este surjectivă, deci bijectivă şi $F^{-1} = G$. Din (4.29) şi (4.31) rezultă

$$\|G(y_1) - G(y_2)\| \le \|y_1 - y_2\| + \|H[G(y_1)] - H[G(y_2)]\| <$$

$$< \|y_1 - y_2\| + \frac{1}{2}\|G(y_1) - G(y_2)\|$$

sau

$$\|G(y_1) - G(y_2)\| < 2\|y_1 - y_2\|,\ \forall\ y_1, y_2 \in V_1. \tag{4.34}$$

Din (4.34) deducem că G este uniform continuă pe V_1, deci continuă pe V_1.

Cum $\det J_F(0) > 0$ şi $F \in C^1(A)$ rezultă că există o vecinătate U a originii, $U \subset U_1 \subset A$ astfel încât $\det J_F(x) > 0$, $\forall\ x \in U$. Dacă notăm cu $V = G^{-1}(U)$, atunci $V \subset V_1$, V este deschisă pentru că G este continuă şi $V = F(U)$.

Pentru a arăra că $F : U \to V$ este difeomorfism rămâne să arătăm că $G \in C^1(V)$.

Fie $b \in V$ oarecare fixat. Vom arăta că G este diferențiabilă în b. Pentru aceasta fie $y \in V$ şi $x, c \in U$ astfel încât $y = F(x)$, $b = F(c)$. Deoarece F este diferențiabilă în c avem:

$$y - b = F(x) - F(c) = dF(c)(x - c) + \varphi(x - c),$$

unde

$$\lim_{x \to c} \frac{\varphi(x - c)}{\|x - c\|} = 0. \tag{4.35}$$

Cum $\det J_F(c) \neq 0$, rezultă că $\operatorname{rang} J_F(c) = n$ şi deci că $dF(c) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ este un izomorfism liniar. Dacă notăm cu $S = [dF(c)]^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, atunci avem

$$S(y - b) = x - c + S[\varphi(x - c)].$$

Cum $x = G(y)$ şi $c = G(b)$, mai departe avem:

$$\frac{\|G(y) - G(b) - S(y - b)\|}{\|y - b\|} = \frac{\|S[\varphi(x - c)]\|}{\|y - b\|} \leq \frac{\|J_S(b)\|\,\|\varphi(x - c)\|}{\|x - c\|} \cdot \frac{\|x - c\|}{\|y - b\|} =$$

$$= \|J_S(b)\| \cdot \frac{\|G(y) - G(b)\|}{\|y - b\|} \cdot \frac{\|\varphi(x - c)\|}{\|x - c\|} \leq 2\|J_S(b)\| \cdot \frac{\|\varphi(x - c)\|}{\|x - c\|}.$$

(Pentru ultima inegalitate am folosit (4.34)).

Cum $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{\|\varphi(x - c)\|}{\|x - c\|} = 0$, rezultă că G este diferențiabilă în punctul b şi că $dG(b) = S$.

Pe de altă parte avem $G \circ F = I = 1_{\mathbb{R}^n}$. Rezultă că $J_G(b) \cdot J_F(c) = I_n$ (matricea unitate), $\forall\ c \in U$, $b \in V$, $b = F(c)$. Cum $\det J_F(c) \neq 0$, deducem că

$$J_{F^{-1}}(b) = J_G(b) = [J_F(c)]^{-1}, \text{ deci } G = F^{-1} \in C^1(V).$$

4.9. Transformări regulate

Definiția 4.9.1. *Fie $A \subset \mathbb{R}^n$ o mulțime deschisă şi fie $F : A \to \mathbb{R}^n$. Spunem că F este o transformare regulată în punctul $a \in A$, dacă $\det J_F(a) \neq 0$ şi există o*

vecinătate deschisă U a lui a, $U \subset A$ *astfel încât* $F \in C^1(U)$. *Spunem că F este o transformare regulată pe mulțimea A, dacă F este regulată în fiecare punct din A.*

Propoziția 4.9.1. *Dacă* $F : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *este o transformare regulată în punctul a* $\in$ *A, atunci F este continuă în punctul a.*

Demonstrație

Dacă *F* este o transformare regulată în punctul *a*, atunci conform Teoremei 4.1.3, *F* este diferențiabilă în *a*, deci continuă în *a*.

Definiția 4.9.2. *Fie* $A \subset \mathbb{R}^n$ *o mulțime deschisă și fie* $F = (f_1, \ldots, f_n) : A \to \mathbb{R}^n$ *o funcție de clasă* C^1.

Determinantul matricei iacobiene $J_F(a)$ *se numește iacobianul funcției F în punctul a și se notează cu* $\frac{D(f_1,\ldots,f_n)}{D(x_1,\ldots,x_n)}(a)$. *Așadar avem*:

$$\frac{D(f_1,\ldots,f_n)}{D(x_1,\ldots,x_n)}(a) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \hline \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \ldots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{vmatrix}, \quad a \in A.$$

Propoziția 4.9.2. *Fie* $A, B \subset \mathbb{R}^n$ *mulțimi deschise. Dacă* $F : A \to B$ *este transformare regulată în punctul a* $\in$ *A și* $G : B \to \mathbb{R}^n$ *este transformare regulată în punctul* $b = F(a) \in B$, *atunci funcția compusă* $H = G \circ F$ *este transformare regulată în punctul a* $\in$ *A.*

Demonstrație

Prin ipoteză $\det J_F(a) = \frac{D(f_1,\ldots,f_n)}{D(x_1,\ldots,x_n)}(a) \neq 0$ și există o vecinătate *U* a punctului *a*, $U \subset A$ astfel încât $F \in C^1(U)$. De asemenea, există o vecinătate deschisă *V* a punctului $b = F(a) \in B$, $V \subset B$ astfel încât $G \in C^1(V)$ și $\det J_G(b) = \frac{D(g_1,\ldots,g_n)}{D(y_1,\ldots,y_n)}(b) \neq 0.$

Deoarece *F* este continuă în punctul *a*, rezultă că există o vecinătate deschisă U_1 a lui *a*, $U_1 \subset U$ astfel încât $F(U_1) \subset V$. Evident $H = G \circ F$ este de clasă C^1 pe U_1. Pe de altă parte avem $\det J_H(a) = \det J_G(b) \det J_F(a) \neq 0$, deci *H* este transformare regulată în punctul *a* $\in$ *A*.

Dacă notăm cu $h_1, \ldots, h_n$ componentele scalare ale lui *H* obținem egalitatea:

$$\frac{D(h_1,\dots,h_n)}{D(x_1,\dots,x_n)}(a)=\frac{D(g_1,\dots,g_n)}{D(y_1,\dots,y_n)}(b)\,\frac{D(f_1,\dots,f_n)}{D(x_1,\dots,x_n)}(a).$$

Teorema următoare pune în evidență o proprietate remarcabilă a transformărilor regulate şi anume faptul că imaginea directă a unei mulțimi deschise, printr-o transformare regulată este de asemenea o mulțime deschisă.

Teorema 4.9.1. *Fie* $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ *o transformare regulată pe* $\mathbb{R}^n$*. Dacă* $A\subset\mathbb{R}^n$ *este deschisă, atunci* $F(A)$ *este de asemenea o mulțime deschisă.*

Demonstrație

Fie $b\in F(A)$ şi $a\in A$ astfel încât $b=F(a)$. Din Teorema de inversiune locală rezultă că există o vecinătate deschisă *U* a punctului *a*, $U\subset A$ şi o vecinătate deschisă $V=F(U)$ a punctului *b*, astfel încât $F:U\to V$ este difeomorfism.

Evident, $V\subset F(A)$, deci *b* este punct interior pentru mulțimea $F(A)$. Cum *b* a fost arbitrar, rezultă că $F(A)$ este deschisă.

Definiția 4.9.3. *O mulțime din* $\mathbb{R}^n$*, deschisă şi conexă se numeşte* ***domeniu****.*

Propoziția 4.9.3. *Fie* $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ *o transformare regulată pe* $\mathbb{R}^n$*. Dacă* $D\subset\mathbb{R}^n$ *este un domeniu, atunci* $F(D)$ *este de asemenea un domeniu şi iacobianul* $\dfrac{D(f_1,\dots,f_n)}{D(x_1,\dots,x_n)}$ *păstrează semn constant pe D.*

Demonstrație

Faptul că $F(D)$ este deschisă rezultă din Teorema 4.9.1. Pe de altă parte, din Propoziția 4.9.1 rezultă că *F* este continuă pe $\mathbb{R}^n$. Cum o funcție continuă duce o mulțime conexă într-o mulțime conexă, rezultă că $F(D)$ este conexă, deci $F(D)$ este un domeniu.

Deoarece funcția $\dfrac{D(f_1,\dots,f_n)}{D(x_1,\dots,x_n)}:\mathbb{R}^n\to\Upsilon$ este continuă şi *D* este o mulțime conexă, rezultă că $\dfrac{D(f_1,\dots,f_n)}{D(x_1,\dots,x_n)}(D)$ este o mulțime conexă din Υ, deci un interval. Dacă presupune, că există $u,v\in D$ astfel încât $\dfrac{D(f_1,\dots,f_n)}{D(x_1,\dots,x_n)}(u)<0$ şi

$\dfrac{D(f_1,\ldots,f_n)}{D(x_1,\ldots,x_n)}(v) > 0$, atunci rezultă că există $w \in D$ astfel încât $\dfrac{D(f_1,\ldots,f_n)}{D(x_1,\ldots,x_n)}(w) = 0$, ceea ce contrazice ipoteza că F este regulată.

4.10. *Funcții implicite*

Fie dreptunghiul $D = [a,b] \times [c,d] \subset \mathbb{R}^2$ şi ecuația

$$F(x,y) = 0\,,\ (x,y) \in D \tag{4.36}$$

Ne punem întrebarea dacă pentru orice $x \in [a,b]$, există o singură valoare $y \in [c,d]$, astfel încât perechea (x,y) să verifice ecuația (4.36). În cazul când acest lucru are loc, vom nota valoarea *y* corespunzătoare lui *x* cu $y(x)$. Funcția $x \to y(x) : [a,b] \to [c,d]$ se spune că este definită implicit de ecuația (4.36). Evident avem

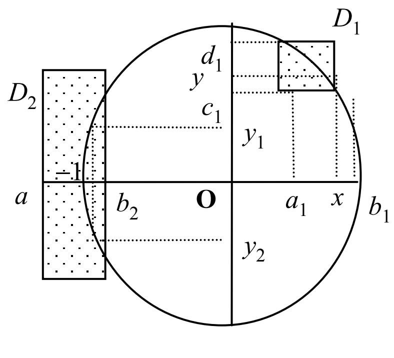
$$F[x, y(x)] = 0\,,\ \forall\ \ x \in [a,b]. \tag{4.37}$$

Exemplu. Fie ecuația

$$x^2 + y^2 - 1 = 0\,. \tag{4.38}$$

Mulțimea punctelor din plan care verifică ecuația (4.38) reprezintă din punct de vedere geometric cercul $\mathcal{C}(0;1)$ (cu centrul în origine şi de rază 1).

Fie $D_1 = [a_1, b_1] \times [c_1, d_1]$. Se observă că $\forall\ x \in [a_1, b_1]$ există o singură valoare $y = y(x) \in [c_1, d_1]$ astfel încât perechea (x,y) verifică ecuația (4.38), adică punctul (x,y) aparține cercului $\mathcal{C}(0;1)$ şi anume $y(x) = \sqrt{1 - x^2}$. Rezultă că pe dreptunghiul D_1 ecuația (4.38) defineşte o funcție implicită.



Pe de altă parte, observăm că pe dreptunghiul D_2, ecuația (4.38) nu defineşte nici o funcție implicită de forma $y = y(x)$, deoarece pentru $x \in [a_2, -1)$ nu există nici o valoare *y* astfel încât perechea $(x,y) \in \mathcal{C}(0,1)$, iar pentru $\forall\ \ x \in [-1, b_2]$

există două valori $y_1 = -\sqrt{1-x^2}$ şi $y_2 = \sqrt{1-x^2}$ astfel încât punctele (x, y_1) şi (x, y_2) aparțin cercului $\mathcal{C}(0,1)$.

Următoarea teoremă stabileşte condiții suficiente pentru existența funcțiilor implicite.

Teorema 4.10.1 *Fie* $A \subset \mathbb{R}^2$ *o mulțime deschisă,* $(a,b) \in A$ *şi* $F : A \to \mathbb{R}$ *cu proprietățile*:

a) $F \in C^1(A)$

b) $F(a,b) = 0$

c) $\dfrac{\partial F}{\partial y}(a,b) \neq 0$.

Atunci există o vecinătate deschisă *U* a punctului *a*, o vecinătate deschisă *V* a punctului *b*, astfel încât $U \times V \subset A$ şi o funcție unică $f : U \to V$ cu proprietățile:

a') $F[x, f(x)] = 0$, $\forall\ x \in U$

b') $F(a) = b$

c') $F \in C^1(U)$ şi $f'(x) = -\dfrac{\dfrac{\partial F}{\partial x}[x, f(x)]}{\dfrac{\partial F}{\partial y}[x, f(x)]}$, $\forall\ x \in U$.

Dacă $F \in C^p(A)$, atunci $f \in C^p(U)$.

Demonstrație

Considerăm funcția vectorială $\phi = (\varphi_1, \varphi_2) : A \to \mathbb{R}^2$ definită astfel:

$$\phi(x,y) = (x, F(x,y)),\ \forall\ (x,y) \in A.$$

Evident avem

$$\varphi_1(x,y) = x \text{ şi } \varphi_2(x,y) = F(x,y),\ \forall\ (x,y) \in A \text{ şi}$$

$$J_\phi(a,b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial x}(a,b) & \dfrac{\partial F}{\partial y}(a,b) \end{pmatrix}.$$

Deoarece

$$\det J_\phi(a,b) = \frac{\partial F}{\partial y}(a,b) \neq 0,$$

matricea $J_\phi(a,b)$ este inversabilă. Din condiția b) rezultă $\phi(a,b) = (a,0)$.

Conform Teoremei 4.8.2 (de inversiune locală) există o vecinătate deschisă $U\times V$ a punctului (a,b) şi o vecinătate deschisă $U\times W$ a punctului $(a,0)$ astfel încât $\phi : U\times V \to U\times W$ este difeomorfism. Mai mult,

$$\det J_{\phi}(x,y) = \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) \neq 0 \,,\ \forall\ (x,y)\in U\times V \,.$$

Fie $\psi = (\psi_1,\psi_2) = \phi^{-1} : U\times W \to U\times V$. Atunci ψ este de clasă C^1 pe $U\times W$.

Definim $f(x) = \psi_2(x,0)$, $\forall\ x\in U$. Evident $f : U\to V$, $f\in C^1(U)$ şi $f(a) = \psi_2(a,0) = b$. În continuare, pentru $\forall\ x\in U$ avem:

$$(x,0) = \phi\left[\psi(x,0)\right] = \phi\left[\psi_1(x,0),\psi_2(x,0)\right] = \phi\left[x, f(x)\right] = \left(x, F(x, f(x))\right),$$

de unde rezultă

$$F\left[x, f(x)\right] = 0 \,,\ \forall\ x\in U \,. \tag{4.39}$$

Derivând relaţia (4.39) obţinem:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\left[x, f(x)\right] + \frac{\partial F}{\partial y}\left[x, f(x)\right] f'(x) = 0 \,,$$

de unde rezultă

$$f'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}\ x, f(x)}{\frac{\partial F}{\partial y}\ x, f(x)} \,,\ \forall\ x\in U \,.$$

În continuare prezentăm fără demonstraţii două generalizări importante ale Teoremei 4.10.1 (Teorema 4.10.1 şi Teorema 4.10.3).

Teorema 4.10.2. *Fie* $A\subset \mathbb{R}^{n+1}$ *o mulţime deschisă,* $(a,b) = (a_1,\dots,a_n,b)\in A$ *şi* $F = (x_1,\dots,x_n,y) : A\to \mathbb{R}$ *cu proprietăţile*:

1) $F\in C^1(A)$
2) $F(a_1,\dots,a_n,b) = 0$
3) $\dfrac{\partial F}{\partial y}(a_1,\dots,a_n,b) \neq 0$.

Atunci există o vecinătate deschisă U a punctului $(a_1,\dots,a_n)$ şi o vecinătate deschisă V a punctului b, astfel încât $U\times V\subset A$ şi o funcţie unică $f : U\to V$ cu proprietăţile:

1') $F\left[x_1,\dots,x_n, f(x_1,\dots,x_n)\right] = 0$, $\forall\ (x_1,\dots,x_n)\in U$

2') $f(a_1,\dots,a_n)=b$

3') $f\in C^1(U)$ şi $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x)=-\dfrac{\dfrac{\partial F}{\partial x_i}[x,f(x)]}{\dfrac{\partial F}{\partial y}[x,f(x)]}$, $\forall\ (x_1,\dots,x_n)\in U$, $i=\overline{1,n}$.

Exemplu. Să se arate că ecuația $2x^2+2y^2+z^2-8xz+7=0$ defineşte într-o vecinătate a punctului $(2,0,1)$ o funcție $z=f(x,y)$ şi să se calculeze $df(2,0)$.

Avem

$F(x,y,z)=2x^2+2y^2+z^2-8xz+7=0$, $F\in C^1(\mathbb{R}^3)$

$F(2,0,1)=0$ şi $\dfrac{\partial F}{\partial z}(2,0,1)=-14\neq 0$.

Sunt îndeplinite condițiile Teoremei 4.10.2, deci există o vecinătate U a punctului $(2,0)$ şi o vecinătate V a punctului 1 şi o funcție unică $z=f(x,y):U\to V$ cu proprietățile 1'), 2') şi 3').

Avem:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(2,0)=-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}(2,0,1)}{\dfrac{\partial F}{\partial z}(2,0,1)}=0;$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(2,0)=-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}(2,0,1)}{\dfrac{\partial F}{\partial z}(2,0,1)}=0$$

rezultă $\mathrm{d}f(2,0)=0$.

Teorema 4.10.3. *Fie* $A\subset\mathbb{R}^{n+m}$ *o mulțime deschisă,*

$(a,b)=(a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_m)\in A$ *şi* $F=(F_1,\dots,F_m):A\to\mathbb{R}^m$

cu proprietățile:

1) $F\in C^1(A)$

2) $\begin{cases} F_1(a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_m)=0\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ F_m(a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_m)=0\end{cases}$

3) $\dfrac{D(F_1,\ldots,F_m)}{D(y_1,\ldots,y_m)}(a,b)\neq 0$.

Atunci $\exists$ o vecinătate deschisă a punctului $a=(a_1,\ldots,a_n)$ şi o vecinătate deschisă $V=V_1\times V_2\times\ldots\times V_m$ a punctului $b=(b_1,\ldots,b_m)$, astfel încât $U\times V\subset A$ şi m funcţii unic determinate $f_i:U\to V_i$, $i=\overline{1,m}$ cu proprietăţile:

$$1')\ \begin{cases} F_1\left[x_1,\ldots,x_n,f_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,f_m(x_1,\ldots,x_n)\right]=0\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ F_m\left[x_1,\ldots,x_n,f_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,f_m(x_1,\ldots,x_n)\right]=0\end{cases}$$

pentru $\forall\ x=(x_1,\ldots,x_n)\in U$.

2') $f_1(a)=b_1,\ldots,f_m(a)=b_m$

3') $f_i\in C^1(U)$, $\forall\ i=\overline{1,m}$ şi $\forall\ i=\overline{1,n}$ şi $\forall\ x=(x_1,\ldots,x_m)\in U$ avem

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_j}(x)=-\frac{\dfrac{D(F_1,\ldots,F_m)}{D(x_j,\ldots,y_m)}\left[x,f_1(x),\ldots,f_m(x)\right]}{\dfrac{D(F_1,\ldots,F_m)}{D(y_1,\ldots,y_m)}\left[x,f_1(x),\ldots,f_m(x)\right]}$$

$$-----------------------------------$$

$$\frac{\partial f_m(x)}{\partial x_j}=-\frac{\dfrac{D(F_1,\ldots,F_m)}{D(y_1,\ldots,x_j)}\left[x,f_1(x),\ldots,f_m(x)\right]}{\dfrac{D(F_1,\ldots,F_m)}{D(y_1,\ldots,y_m)}\left[x,f_1(x),\ldots,f_m(x)\right]}$$

Exemplu. Să se arate că sistemul:

$$\begin{cases} x^3+3y^2-z^2+x-y-8=0\\ 2x^2-4y-6z-6=0\end{cases}$$

defineşte într-o vecinătate a punctului $(1,2,-2)$ două funcţii $y=f(x)$ şi $z=g(x)$ şi să se calculeze $f'(1)$, $g'(1)$. Avem:

$$\begin{cases} F(x,y,z)=x^3+3y^2-z^2+x-y-8\\ G(x,y,z)=2x^2-4y-6z-6\end{cases}$$

$F,G\in C^1(\mathbb{R}^3)$, $F(1,2,-2)=0$, $G(1,2,-2)=0$

$$\frac{D(F,G)}{D(y,z)}(1,2,-2)=\begin{vmatrix}\frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z}\\ \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial z}\end{vmatrix}(1,2,-2)=-50\neq 0.$$

Aşadar, sunt îndeplinite condițiile Teoremei 4.7.3, de unde rezultă că există o vecinătate $U\in\mathcal{V}(1)$, o vecinătate $V\times W$ a punctului $(2,-2)$ şi două funcții

$$y=f(x):U\to V \text{ şi } z=g(x):U\to W$$

cu proprietățile 1'), 2') şi 3').

În continuare avem:

$$\frac{D(F,G)}{D(x,z)}(1,2,-2)=-40 \text{ şi } \frac{D(F,G)}{D(y,x)}=60$$

de unde rezultă $f'(1)=-\frac{4}{5}$ şi $g'(1)=\frac{6}{5}$.

4.11. Funcții dependente şi independente

Fie $A\subset\mathbb{R}^n$ o mulțime deschisă şi *m* funcții $f_1,\dots,f_m:A\to\mathbb{R}$ de clasă C^1 pe *A*, $m\le n$.

Definiția 4.11.1. *Spunem că funcțiile* $f_1,\dots,f_m$ *sunt dependente pe mulțimea A, dacă cel puțin una dintre aceste funcții, de exemplu* f_m *depinde de celelalte pe mulțimea A, adică există* $\phi\in C^1\left(\mathbb{R}^m\right)$ *astfel încât* $f_m(x)=\phi\left[f_1(x),\dots,f_{m-1}(x)\right]$, $\forall\ x\in A$.

Exemplu. Fie funcțiile $f_i:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}$, $i=\overline{1,3}$ definite astfel:

$$f_1(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2$$
$$f_2(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1+x_2+x_3+x_4$$
$$f_3(x_1,x_2,x_3,x_4)=2x_1x_2+2x_1x_3+2x_1x_4+2x_2x_3+2x_2x_4+2x_3x_4$$

Se observă imediat că

$$f_1(x_1,x_2,x_3,x_4)=\phi\left[f_2(x_1,x_2,x_3,x_4),\ f_3(x_1,x_2,x_3,x_4)\right],$$

unde

$$\phi(u,v)=u^2-v,\ \forall\ (u,v)\in\mathbb{R}^2.$$

Rezultă că funcțiile f_1,f_2,f_3 sunt dependente pe $\mathbb{R}^4$.

Observaţia 4.11.1. La cursul de algebră se studiază noţiunea de funcţii liniar dependente.

Reamintim că $f_1,\dots,f_m$ sunt linear dependente pe *A*, dacă $\exists$ *m* numere $\lambda_1,\dots,\lambda_m \in \mathbb{R}$, nu toate nule, astfel încât:

$$\lambda_1 f_1(x)+\dots+\lambda_m f_m(x)=0\,,\ \ \forall\ x\in A\,.$$

Dacă presupunem de exemplu că $\lambda_m \neq 0$, rezultă

$$f_m(x)=\left(-\frac{\lambda_1}{\lambda_m}\right)f_1(x)+\dots+\left(-\frac{\lambda_{m-1}}{\lambda_m}\right)f_m(x)\,,\ \ \forall\ x\in A\,.$$

Aşadar, noţiunea de funcţii linear dependente pe *A*, este un caz particular al Definiţiei 4.11.1 şi anume, cazul când funcţia ϕ este liniară.

Teorema 4.11.1. *Fie* $A\subset\mathbb{R}^n$ *deschisă,* $m\le n$ *şi* $F=\left(f_1,\dots,f_m\right):A\to\mathbb{R}^m$, *de clasă* C^1 *pe A. Dacă* $f_1,\dots,f_m$ *sunt dependente pe A, atunci*

$$\operatorname{rang} J_F(x)<m\,,\ \forall\ \ x\in A\,.$$

Demonstraţie

Fie $\phi\in C^1\left(\mathbb{R}^{m-1}\right)$ astfel încât

$$f_m\left(x_1,\dots,x_m\right)=\phi\left[f_1\left(x_1,\dots,x_n\right),\dots,f_{m-1}\left(x_1,\dots,x_n\right)\right],\ \forall\ \left(x_1,\dots,x_n\right)\in A\,. \tag{4.40}$$

Derivând relaţia (4.40) obţinem:

$$\frac{\partial f_m}{\partial x_j}=\frac{\partial\phi}{\partial y_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_j}+\dots+\frac{\partial\phi}{\partial y_{n-1}}\frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_j}\,,\ \ j=\overline{1,n}\,. \tag{4.41}$$

Cum matricea iacobiană este

$$J_F(x)=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \dots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_m}(x) & \dots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(x)\\ \hdashline \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1}(x) & \dots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_m}(x) & \dots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n}(x)\end{pmatrix},$$

din (4.41) rezultă că ultima linie a matricei $J_F(x)$ este combinaţie lineară de celelalte linii, deci orice minor de ordinul *m* al matricei $J_F(x)$ este nul.

Definiţia 4.11.2. *Fie* $A\subset\mathbb{R}^n$ *deschisă. Spunem că funcţiile* $f_1,\dots,f_m$ *sunt independente în punctul* $a\in A$, *dacă nu sunt dependente pe nici o vecinătate a punctului a. Spunem că* $f_1,\dots,f_m$ *sunt independente pe A, dacă sunt independente în fiecare punct din A.*

Cu această definiţie, din Teorema 4.11.1 rezultă

Corolarul 4.11.1. *Dacă* $\operatorname{rang} J_F(x) = m$, $\forall\ x \in A$, *atunci funcţiile* $f_1,\dots,f_m$ *sunt independente pe A.*

Teorema 4.11.2. *Fie* $A \subset \mathbb{R}^n$ *deschisă,* $a \in A$, $m \le n$ *şi* $F = (f_1,\dots,f_m) : A \to \mathbb{R}^m$, *de clasă* C^1 *pe A. Dacă* $\operatorname{rang} J_F(a) = s < m$ *atunci există o vecinătate deschisă* $U \in \mathcal{V}(a)$, $U \subset A$ *astfel încât s funcţii dintre funcţiile* $f_1,\dots,f_m$ *sunt independente pe U, iar celelalte* $m-s$ *funcţii depind de acestea pe U.*

Demonstraţie

Fie $a = (a_1,\dots,a_n) \in A$. Deoarece $J_F(a) = s < m$, $\exists$ un minor nenul de ordinul *s* al matricei $J_F(a)$. Fără a rsetrânge generalitatea putem presupune că minorul

$$\frac{D(f_1,\dots,f_s)}{D(x_1,\dots,x_s)}(a) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_s}(a) \\ \hline \\ \dfrac{\partial f_s}{\partial x_1}(a) & \dots & \dfrac{\partial f_s}{\partial x_s}(a) \end{vmatrix} \ne 0.$$

Deoarece $f_i \in C^1(A)$ rezultă că funcţia

$$\frac{D(f_1,\dots,f_s)}{D(x_1,\dots,x_s)} : A \to \mathbb{R} \quad \text{este continuă pe } A,$$

deci $\exists$ o vecinătate deschisă U_1 a punctului *a*, $U_1 \subset A$ astfel încât

$$\frac{D(f_1,\dots,f_s)}{D(x_1,\dots,x_s)}(x) \ne 0\,,\ \forall\ \ x \in U_1\,.$$

Din Corolarul 4.11.1 rezultă că funcţiile $f_1,\dots,f_s$ sunt independente pe mulţimea U_1.

Considerăm sistemul:

$$\begin{cases} F_1(x_1,\dots,x_s,x_{s+1},\dots,x_n,y_1,\dots,y_s) \equiv f_1(x_1,\dots,x_s,x_{s+1},\dots,x_n) - y_1 = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ F_s(x_1,\dots,x_s,x_{s+1},\dots,x_n,y_1,\dots,y_s) \equiv f_s(x_1,\dots,x_s,x_{s+1},\dots,x_n) - y_s = 0 \end{cases} \tag{4.42}$$

Fie $a' = (a_1,\dots,a_s)$, $a'' = (a_{s+1},\dots,a_n)$ şi $b = (b_1,\dots,b_s)$ unde $b_i = f_i(a)$, $i = \overline{1,s}$.

Evident, $F_i \in C^1\left(A \times \mathbb{R}^s\right)$ şi ., $\forall\ \ i = \overline{1,s}$. Observăm de asemenea că

$$\frac{D(F_1,\ldots,F_s)}{D(x_1,\ldots,x_s)}(a',a'',b)=\frac{D(f_1,\ldots,f_s)}{D(x_1,\ldots,x_s)}(a)\neq 0.$$

Din Teorema 4.10.3 rezultă că din sistemul (4.42) putem explicita variabilele $x_1,\ldots,x_s$ în funcție de $x_{s+1},\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_s$. Mai precis există U' o vecinătate deschisă a punctului a', $U''\times V$ o vecinătate a punctului (a'',b) şi o funcție unică $G=(g_1,\ldots,g_s):U''\times V\to U'$ cu proprietățile:

$$g_i(a_{s+1},\ldots,a_n,b_1,\ldots,b_s)=a_i,\quad i=\overline{1,s}. \tag{4.43}$$

$$\begin{cases} f_1\left[g_1(x_{s+1},\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_s),\ldots,g_s(x_{s+1},\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_s),x_{s+1},\ldots\right. \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \left.\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_s\right]=y_1 \\ \text{-------------------------------------} \\ f_s\left[g_1(x_{s+1},\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_s),\ldots,g_s(x_{s+1},\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_s),x_{s+1},\ldots\right. \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \left.\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_s\right]=y_s \end{cases} \tag{4.44}$$

pentru $\forall\ (x_{s+1},\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_s)\in U''\times V$. Fie $U_1'\subset U'$ o vecinătate deschisă a lui a' şi $U_1''\subset U''$ o vecinătate deschisă a lui a'' astfel încât $U_1'\times U_1''\subset U_1$. Deoarece $U_1'\in \mathcal{V}\ (a')$ şi $G:U''\times V\to U'$ este continuă în (a'',b) există $U_2''\times V_1\subset U_1''\times V$ vecinătate deschisă a punctului (a'',b) astfel încât $G(U_2''\times V_1)\subset U_1'$.

Fie $s<r\le n$ şi

$$\phi_r(x_{s+1},\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_s)=$$
$$=f_r\left[g_1(x_{s+1},\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_s),\ldots,g_s(x_{s+1},\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_s),x_{s+1},\ldots,x_n\right], \tag{4.45}$$
$$\forall\ (x_{s+1},\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_s)\in U_2''\times V_1.$$

Vom arăta că ϕ_r nu depinde de variabilele $x_{s+1},\ldots,x_n$. Fie $s<k\le n$. Derivând relațiile (4.44) şi (4.45) obținem

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}\dfrac{\partial g_1}{\partial x_k}+\ldots+\dfrac{\partial f_1}{\partial x_s}\dfrac{\partial g_s}{\partial x_k}+\dfrac{\partial f_1}{\partial x_k}=0 \\ \text{--------------------------} \\ \dfrac{\partial f_s}{\partial x_1}\dfrac{\partial g_1}{\partial x_k}+\ldots+\dfrac{\partial f_s}{\partial x_s}\dfrac{\partial g_s}{\partial x_k}+\dfrac{\partial f_s}{\partial x_k}=0 \\ \dfrac{\partial f_r}{\partial x_k}\dfrac{\partial g_1}{\partial x_k}+\ldots+\dfrac{\partial f_r}{\partial x_s}\dfrac{\partial g_s}{\partial x_k}+\dfrac{\partial f_r}{\partial x_k}=\dfrac{\partial \phi_r}{\partial x_k} \end{cases} \tag{4.46}$$

Derivatele $\frac{\partial g_i}{\partial x_k}$ sunt calculate într-un punct oarecare $(x_{s+1},\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_s) \in$ $\in U_2'' \times V$, iar $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ sunt calculate în punctul corespunzător $(x_1,\ldots,x_s,x_{s+1},\ldots,x_n)$ unde

$$x_i = g_i(x_{s+1},\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_s),\ i=\overline{1,s}.$$

Din cele de mai sus rezultă că punctul

$$(x_1,\ldots,x_s,x_{s+1},\ldots,x_n) \in U_1' \times U_2'' \subset U_1,$$

deci

$$\frac{D(f_1,\ldots,f_s)}{D(x_1,\ldots,x_s)}(x_1,\ldots,x_n) \neq 0.$$

Pentru ca sistemul (4.46) să fie compatibil, trebuie ca determinantul caracteristic să fie nul, deci avem:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots\cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_s} & \frac{\partial f_1}{\partial x_k} \\ \hline \\ \frac{\partial f_s}{\partial x_1} & \cdots\cdots & \frac{\partial f_s}{\partial x_s} & \frac{\partial f_s}{\partial x_k} \\ \frac{\partial f_r}{\partial x_1} & \cdots\cdots & \frac{\partial f_r}{\partial x_s} & \frac{\partial f_r}{\partial x_k} - \frac{\partial \phi_r}{\partial x_k} \end{vmatrix} = 0.$$

şi mai departe

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots\cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_s} & \frac{\partial f_1}{\partial x_k} \\ \hline \\ \frac{\partial f_s}{\partial x_1} & \cdots\cdots & \frac{\partial f_s}{\partial x_s} & \frac{\partial f_s}{\partial x_k} \\ \frac{\partial f_r}{\partial x_1} & \cdots\cdots & \frac{\partial f_r}{\partial x_s} & \frac{\partial f_r}{\partial x_k} \end{vmatrix} - \frac{D(f_1,\ldots,f_s)}{D(x_1,\ldots,x_s)} \frac{\partial \phi_r}{\partial x_k} = 0. \tag{4.47}$$

Deoarece rang $J_F(x) = s$, rezultă că primul determinat din relația (4.47) este nul. Cum

$$\frac{D(f_1,\ldots,f_s)}{D(x_1,\ldots,x_s)} \neq 0$$

în final rezultă

$$\frac{\partial \phi_r}{\partial x_k} = 0\,,\ \forall \quad s < r \le n \ \text{ şi } \forall \quad s < k \le n \tag{4.48}$$

Aşadar ϕ_r nu depinde de $x_{s+1},\ldots,x_n$. Atunci, pentru $(y_1,\ldots,y_n) \in V_1$ din (4.45) rezultă

$$\phi_r(y_1,\ldots,y_s) = f_r[x_1,\ldots,x_s,x_{s+1},\ldots,x_n] = f_r(x)\,,\ \forall \quad x \in U_1' \times U_2''\,.$$

Ţinând seama şi de (4.44) avem:

$$f_r(x) = \phi_r[f_1(x),\ldots,f_s(x)]\,,\ \forall \quad x \in U_1' \times U_2''\,.$$

Notând cu $U = U_1' \times U_2''$, rezultă $f_1,\ldots,f_s,f_r$ sunt dependente pe U şi cu aceasta teorema este demonstrată. Dacă ne întoarcem la exemplul dat constatăm că

$$J_F(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 & 2x_3 & 2x_4 \\ 1 & 1 & 1 & \\ 2(x_2+x_3+x_4) & 2(x_1+x_3+x_4) & 2(x_1+x_2+x_4) & 2(x_1+x_2+x_3) \end{pmatrix}.$$

Este uşor de verificat că toţi minorii de ordinul 3 sunt nuli. Fie

$$M = \left\{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4;\ x_1 = x_2 = x_3 = x_4\right\} \quad \text{şi} \quad A = \mathbb{R}^4 \setminus M\,.$$

Dacă $(x_1,x_2,x_3,x_4) \in A$, atunci cel puţin unul din minorii

$$\begin{vmatrix} 2x_1 & 2x_2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} 2x_1 & 2x_3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} 2x_1 & 2x_4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

este $\neq 0$. Rezultă că f_1, f_2 sunt independente pe *A*, în timp ce f_3 depinde de f_1 şi f_2 pe *A*.

4.12. Extreme cu legături

În aplicaţii, intervine adesea problema determinării valorilor extreme ale unei funcţii de mai multe variabile în situaţii în care variabilele sunt supuse la anumite restricţii (satisfac anumite relaţii de legătură).

Exemplu. Să se găsească valorile extreme ale funcţiei $f(x,y) = x^2 + y^2$ cu legătura $x + y - 1 = 0$. Cazul fiind foarte simplu, problema se reduce imediat la o problemă de extrem liber.

Într-adevăr, înlocuind $y = 1 - x$ în expresia funcţiei *f*, obţinem $g(x) = $ $= x^2 - 2x + 1$, $x \in \mathbb{R}$.

Deoarece $g'(x) = 4x - 2$ şi $g''(x) = 4$, rezultă că funcția g admite un minim egal cu $\frac{1}{2}$ în punctul $x = \frac{1}{2}$, deci $f(x,y) = x^2 + y^2$ cu legătura $x + y - 1 = 0$, admite un minim egal cu $\frac{1}{2}$ în punctul $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Notăm că funcția $f(x,y) = x^2 + y^2$ admite valoarea minimă 0 în punctul (0,0) dacă variabilele x şi y nu sunt supuse la nici o restricție.

Fie $A \subset \mathbb{R}^n$ o mulțime deschisă şi $f,\ F_1,\ldots,F_m\ (1 \le m < n)$, $m+1$ funcții reale definite pe A.

Fie $S \subset \mathbb{R}^n$ mulțimea tuturor soluțiilor sistemului.

$$\begin{cases} F_1(x_1,\ldots,x_n) = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ F_m(x_1,\ldots,x_n) = 0 \end{cases} \tag{4.49}$$

Definiția 4.12.1. *Spunem că punctul $a \in A \cap S$ este punct de maxim (minim) pentru funcția f, condiționat de legăturile* (4.49)*, dacă există o vecinătate deschisă U a punctului a, $U \subset A$ astfel încât*

$$f(x) \le f(a)\left[f(x) \ge f(a)\right],\ \forall\ x \in A \cap S \cap U.$$

Teorema 4.12.1. *Fie $f,\ F_1,\ldots,F_m \in C^1(A)$ şi $a \in A \cap S$ un punct de extrem al funcției f condiționat de legăturile* (4.49). *Dacă* $\frac{D(F_1,\ldots,F_m)}{D(x_1,\ldots,x_m)}(a) \ne 0$, *atunci există $\lambda_1,\ldots,\lambda_m \in \Upsilon$* (*unic determinata*) *astfel încât*

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) + \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(a) + \ldots + \lambda_m \frac{\partial F_m}{\partial x_1}(a) = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) + \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(a) + \ldots + \lambda_m \frac{\partial F_m}{\partial x_n}(a) = 0 \end{cases} \tag{4.50}$$

($\lambda_1,\ldots,\lambda_m$ *se numesc multiplicatorii lui Lagrange*).

Demonstrație

Pentru a fixa ideile, să presupunem că $a = (a_1,\ldots,a_n)$ este punct de maxim pentru f, condiționat de (1). Atunci $a \in A \cap S$ şi $\exists\ U$ o vecinătate deschisă a lui a, $U \subset A$ astfel încât $f(x) \le f(a)$, $\forall\ x \in U \cap A \cap S$.

Fie $a'=(a_1,\dots,a_m)$ şi $a''=(a_{m+1},\dots,a_n)$. Deoarece $F_i\in C^1(A)$, $i=\overline{1,m}$ şi $\dfrac{D(F_1,\dots,F_m)}{D(x_1,\dots,x_m)}(a',a'')\neq 0$, din Teorema funcţiilor implicite rezultă că sistemul (4.49) se poate rezolva în raport cu variabilele $x_1,\dots,x_m$. Mai precis, $\exists$ o vecinătate deschisă U' a punctului a' şi o vecinătate deschisă U'' a punctului a'' şi o funcţie vectorială unică $\phi=(\varphi_1,\dots,\varphi_m):U''\to U$ de clasă C^1 pe U'' cu proprietăţile:

$$\varphi_i(a_{m+1},\dots,a_n)=a_i,\ \ i=\overline{1,m} \tag{4.51}$$

$$\begin{cases} F_1\left[\varphi_1(x_{m+1},\dots,x_n),\dots,\varphi_m(x_{m+1},\dots,x_n),x_{m+1},\dots,x_n\right]=0\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ F_m\left[\varphi_1(x_{m+1},\dots,x_n),\dots,\varphi_m(x_{m+1},\dots,x_n),x_{m+1},\dots,x_n\right]=0\end{cases} \tag{4.52}$$

oricare ar fi $x''=(x_{m+1},\dots,x_n)\in U''$.

Fără a restrânge generalitatea, putem presupune $U'\times U''\subset U$. Fie $m+1\le k\le n$.

Derivând relaţiile (4.52) obţinem:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F_1}{\partial x_k}+\dfrac{\partial F_1}{\partial x_1}\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_k}+\dots\dots+\dfrac{\partial F_1}{\partial x_m}\dfrac{\partial \varphi_m}{\partial x_k}=0\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \dfrac{\partial F_m}{\partial x_k}+\dfrac{\partial F_m}{\partial x_1}\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_k}+\dots\dots+\dfrac{\partial F_m}{\partial x_m}\dfrac{\partial \varphi_m}{\partial x_k}=0\end{cases} \tag{4.53}$$

Definim $g:U''\to\mathbb{R}$ astfel

$$g(x_{m+1},\dots,x_n)=f\left[\varphi_1(x_{m+1},\dots,x_n),\dots,\varphi_m(x_{m+1},\dots,x_n),x_{m+1},\dots,x_n\right] \tag{4.54}$$

Dacă $x''=(x_{m+1},\dots,x_n)\in U''$, atunci din (4.52) rezultă

$$\left(\varphi_1(x''),\dots,\varphi_m(x''),x''\right)\in S\cap(U'\times U'')\subset S\cap U,$$

deci

$$g(x'')=f\left[\varphi_1(x''),\dots,\varphi_m(x''),x''\right]\le f(a_1,\dots,a_m,a_{m+1},\dots,a_n)=$$
$$=f\left[\varphi_1(a''),\dots,\varphi_m(a''),a''\right]=g(a'').$$

Aşadar $g(x'')\le g(a'')$, $\forall\ x''\in U''$, deci a'' este punct de maxim liber pentru *g*. Rezultă $\dfrac{\partial g}{\partial x_k}(a'')=0,\ \forall\ \ m+1\le k\le n$.

Ţinând seama de definiţia lui *g* avem:

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}+\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_k}+\dots+\frac{\partial f}{\partial x_m}\frac{\partial \varphi_m}{\partial x_k}=0 \tag{4.55}$$

Amplificând succesiv ecuațiile sistemului (4.53) cu $\lambda_1,\dots,\lambda_m$ şi adunând ecuația (4.55) obținem:

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}+\lambda_1\frac{\partial F_1}{\partial x_k}+\dots+\lambda_m\frac{\partial F_m}{\partial x_k}+\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}+\lambda_1\frac{\partial F_1}{\partial x_1}+\dots+\lambda_m\frac{\partial F_m}{\partial x_1}\right)\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_k}+\dots+$$

$$+\left(\frac{\partial f}{\partial x_m}+\lambda_1\frac{\partial F_1}{\partial x_m}+\dots+\lambda_m\frac{\partial F_m}{\partial x_m}\right)\frac{\partial\varphi_m}{\partial x_k}=0. \tag{4.55'}$$

Precizăm că $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ şi $\frac{\partial F_1}{\partial x_j}$ sunt calculate în punctul a.

Punem condițiile:

$$\begin{cases}\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a)+\lambda_1\frac{\partial F_1}{\partial x_1}(a)+\dots\dots+\lambda_m\frac{\partial F_m}{\partial x_1}(a)=0\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \frac{\partial f}{\partial x_m}(a)+\lambda_1\frac{\partial F_1}{\partial x_m}(a)+\dots\dots+\lambda_m\frac{\partial F_m}{\partial x_m}(a)=0\end{cases} \tag{4.56}$$

Deoarece $\frac{D(F_1,\dots,F_m)}{D(x_1,\dots,x_m)}(a)\neq 0$, sistemul (4.56) are soluție unică.

Fie $\lambda_1^0,\dots,\lambda_m^0$ soluția sistemului (4.56).

Ținând seama de (4.56) şi (4.55') rezultă

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(a)+\lambda_1^0\frac{\partial F_1}{\partial x_k}(a)+\dots+\lambda_m^0\frac{\partial F_m}{\partial x_k}(a)=0,\ k=m+1,\dots,n \tag{4.57}$$

Din (4.56) şi (4.57) deducem:

$$\begin{cases}\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a)+\lambda_1^0\frac{\partial F_1}{\partial x_1}(a)+\dots\dots+\lambda_m^0\frac{\partial F_m}{\partial x_1}(a)=0\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a)+\lambda_1^0\frac{\partial F_1}{\partial x_n}(a)+\dots\dots+\lambda_m^0\frac{\partial F_m}{\partial x_n}(a)=0\end{cases} \tag{4.58}$$

Cu aceasta teorema este demonstrată.

Fie funcția auxiliară $\phi: A\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ definită astfel:

$$\phi(x_1,\dots,x_n,\lambda_1,\dots,\lambda_m)=f(x_1,\dots,x_n)+\lambda_1F_1(x_1,\dots,x_n)+\dots+\lambda_mF_m(x_1,\dots,x_n) \tag{4.59}$$

şi fie sistemul

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\phi}{\partial x_1}\left(x_1,\ldots,x_n,\lambda_1,\ldots,\lambda_m\right) \equiv \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x) + \lambda_1 \dfrac{\partial F_1}{\partial x_1}(x) + \ldots + \lambda_n \dfrac{\partial F_m}{\partial x_1}(x) = 0 \\ \text{---} \\ \dfrac{\partial\phi}{\partial x_n}\left(x_1,\ldots,x_n,\lambda_1,\ldots,\lambda_m\right) \equiv \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(x) + \lambda_1 \dfrac{\partial F_1}{\partial x_n}(x) + \ldots + \lambda_n \dfrac{\partial F_m}{\partial x_n}(x) = 0 \\ \dfrac{\partial\phi}{\partial \lambda_1}\left(x_1,\ldots,x_n,\lambda_1,\ldots,\lambda_m\right) \equiv F_1(x) = 0 \\ \text{---} \\ \dfrac{\partial\phi}{\partial \lambda_m}\left(x_1,\ldots,x_n,\lambda_1,\ldots,\lambda_m\right) \equiv F_m(x) = 0 \end{cases} \tag{4.60}$$

Din Teorema 4.11.1 rezultă că dacă a este punct de extrem pentru f, condiționat de legăturile (4.49) şi $\lambda_1^0,\ldots,\lambda_m^0$ satisfac sistemul (4.50), atunci punctul $\left(a_1,\ldots,a_n,\lambda_1^0,\ldots,\lambda_m^0\right)$ verifică sistemul (4.60).

Rezultă că punctele de extrem condiționat ale funcției f se caută printre punctele $\left(x_1,\ldots,x_n\right)$ cu proprietatea că $\left(x_1,\ldots,x_n,\lambda_1,\ldots,\lambda_m\right)$ sunt puncte critice ale funcției auxiliare ϕ, dată de (4.59).

Fie $\left(a_1,\ldots,a_n,\lambda_1^0,\ldots,\lambda_m^0\right)$ un punct critic pentru ϕ şi fie

$$\phi_0(x) = f(x) + \lambda_1^0 F_1(x) + \ldots + \lambda_m^0 F_m(x), \ \forall \ \ x \in A .$$

Dacă $x \in U \cap A \cap S$, atunci $F_i(x) = 0$, $i = \overline{1,m}$ şi avem:

$$f(x) - f(a) = \phi_0(x) - \phi_0(a) = d\phi_0(a)\left(x-a\right) + \frac{1}{2!} d^2\phi_0\left(\xi\right)\left(x-a\right).$$

Cum $d\phi_0(a) = 0$, rezultă

$$f(x) - f(a) = \frac{1}{2!}\mathrm{d}^2\phi_0\left(\xi\right)\left(x-a\right) = \frac{1}{2!}\mathrm{d}^2\phi_0(a)\left(x-a\right) + \omega(x), \tag{4.61}$$

unde ω este $o\left(x-a\right)$ pentru $x \to a$.

Dacă diferențiem legăturile (4.49) obținem:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F_1}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \dfrac{\partial F_1}{\partial x_n} dx_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\partial F_m}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \dfrac{\partial F_m}{\partial x_n} dx_n = 0 \end{cases} \tag{4.62}$$

Din sistemul (4.62) se exprimă $\mathrm{d}x_1,\ldots,\mathrm{d}x_m$ în funcție de $\mathrm{d}x_{m+1},\ldots,\mathrm{d}x_n$ şi apoi se înlocuiesc în $\mathrm{d}^2\phi_0(a)$. Se obține astfel o formă pătratică în $n-m$ variabile independente. Ca şi la extremele libere, dacă $\mathrm{d}^2\phi_0(a)$ este pozitiv (negativ) definită, atunci a este punct de minim (maxim) pentru f condiționat de legăturile (4.49).

Exemplu. Să se afle punctele de extrem ale funcției $f(x,y,z)=xy+yz+zx$ cu legătura $xyz=1$. Se formează funcția auxiliară

$$\phi(x,y,z)=xy+yz+zx+\lambda(xyz-1).$$

Punctele critice ale funcției se obțin rezolvând sistemul

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\phi}{\partial x}=y+z+\lambda yz=0\\ \dfrac{\partial\phi}{\partial y}=x+z+\lambda xz=0\\ \dfrac{\partial\phi}{\partial z}=y+x+\lambda xy=0\\ \dfrac{\partial\phi}{\partial\lambda}=xyz-1=0\end{cases} \tag{4.63}$$

Sistemul (4.63) are o singură soluție și anume $x=y=z=1$, $\lambda=-2$. Fie $\phi_0(x,y,z)=xy+yz+zx-2(xyz-1)$.

$$d^2\phi_0(x,y,z)=2\left[(1-2z)dx\,dy+(1-2y)dx\,dz+(1-2x)dy\,dz\right]$$

$$d^2\phi_0(1,1,1)=-2(dx\,dy+dx\,dz+dy\,dz).$$

Diferențiind legătura, obținem $dF(x,y,z)=0$, deci

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy+\frac{\partial F}{\partial z}dz=yz\,dx+xz\,dy+xy\,dz=0.$$

Pentru $x=z=1$ avem $dx+dy+dz=0$, de unde rezultă $dz=-(dx+dy)$. Înlocuind în $d^2\phi_0(1,1,1)$ obținem:

$$d^2\phi(1,1,1)=2\left(dx^2-dx\,dy+dy^2\right),$$

care este pozitiv definită, deoarece

$$\Delta_1=a_{11}=1>0 \quad \text{și} \quad \Delta_2=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{12} & a_{22}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & -\dfrac{1}{2}\\ -\dfrac{1}{2} & 1\end{vmatrix}=\frac{3}{4}>0.$$

Așadar, punctul $(1,1,1)$ este punct de minim pentru funcția $f(x,y,z)=$ $=xy+yz+zx$ condiționat de legătura $xyz=1$.

4.13. Schimbări de variabile

Fie expresia

$$H\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \ldots\right) \tag{4.64}$$

unde x şi y sunt variabile independente şi $z = z(x, y)$.

Fie $A, B \subset \mathbb{R}^3$ două mulţimi deschise şi $F = (\varphi, \psi, \chi) : A \to B$ un difeomorfism de clasă C^k. Fiecărui punct $(x, y, z) \in A$ îi corespunde prin funcţia vectorială F un punct $(u, v, w) \in B$ şi anume

$$\begin{cases} u = \varphi(x, y, z) \\ v = \psi(x, y, z) \\ w = \chi(x, y, z) \end{cases} \tag{4.65}$$

Deoarece F este bijectivă, sistemul (4.65) se poate rezolva în raport cu x, y, z. De asemenea, vom presupune că din primele două ecuaţii din (4.65) se pot rezolva x şi y în raport cu u, v şi z.

Problema schimbării de variabile constă în întrebarea ce devine expresia (4.64) în urma schimbării de variabile (4.65)? Este evident că pentru a rezolva această problemă este suficient să exprimăm derivatele $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ etc., în funcţie de $u, v, w, \frac{\partial w}{\partial u}, \frac{\partial w}{\partial v}, \frac{\partial^2 w}{\partial u^2}$ etc.

Ţinând seama că $z = z(x, y)$ şi $w = w(u, v)$:

$$\mathrm{d}u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\mathrm{d}z = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y\right) \tag{4.66}$$

$$\mathrm{d}v = \frac{\partial \psi}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial \psi}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial \psi}{\partial z}\mathrm{d}z = \frac{\partial \psi}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial \psi}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial \psi}{\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y\right) \tag{4,67}$$

$$\mathrm{d}w = \frac{\partial w}{\partial u}\mathrm{d}u + \frac{\partial w}{\partial v}\mathrm{d}v = \frac{\partial \chi}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial \chi}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial \chi}{\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y\right) \tag{4.68}$$

Înlocuind în (4.68) expresiile diferenţialelor du şi dv date de (4.66) şi (4.67) şi egalând coeficienţii în dx şi dy obţinem

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial u}\left[\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} + \dfrac{\partial \varphi}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial x}\right] + \dfrac{\partial w}{\partial v}\left[\dfrac{\partial \psi}{\partial x} + \dfrac{\partial \psi}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial x}\right] = \dfrac{\partial \chi}{\partial x} + \dfrac{\partial \chi}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial x} \\[2ex] \dfrac{\partial w}{\partial u}\left[\dfrac{\partial \varphi}{\partial y} + \dfrac{\partial \varphi}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial y}\right] + \dfrac{\partial w}{\partial v}\left[\dfrac{\partial \psi}{\partial y} + \dfrac{\partial \psi}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial y}\right] = \dfrac{\partial \chi}{\partial y} + \dfrac{\partial \chi}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial x} \end{cases} \tag{4.69}$$

Rezolvând sistemul (4.69) rezultă:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{\dfrac{\partial w}{\partial u}\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} + \dfrac{\partial w}{\partial v}\dfrac{\partial \psi}{\partial x} - \dfrac{\partial \chi}{\partial x}}{\dfrac{\partial w}{\partial u}\dfrac{\partial \varphi}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial v}\dfrac{\partial \psi}{\partial z} - \dfrac{\partial \chi}{\partial z}} \\ \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{\dfrac{\partial w}{\partial u}\dfrac{\partial \varphi}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial v}\dfrac{\partial \psi}{\partial y} - \dfrac{\partial \chi}{\partial y}}{\dfrac{\partial w}{\partial u}\dfrac{\partial \varphi}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial v}\dfrac{\partial \psi}{\partial z} - \dfrac{\partial \chi}{\partial z}} \end{cases} \tag{4.70}$$

Pentru calculul derivatelor de ordinul doi $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ se calculează diferențialele de ordinul doi $\mathrm{d}^2 u$, $\mathrm{d}^2 v$, $\mathrm{d}^2 w$.

Exemplu. Ce devine expresia $\Delta z = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ în coordonate polare $\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}$

$$\mathrm{d}x = \cos \mathrm{d}\rho - \rho \sin \theta \mathrm{d}\theta$$

$$\mathrm{d}y = \sin \theta \mathrm{d}\rho + \rho \cos \theta \mathrm{d}\theta$$

$$\mathrm{d}z = \frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y = \frac{\partial z}{\partial \rho}\mathrm{d}\rho + \frac{\partial z}{\partial \theta}\mathrm{d}\theta$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}\left(\cos \mathrm{d}\rho - \rho \sin \theta \mathrm{d}\theta\right) + \frac{\partial z}{\partial y}\left(\sin \theta \mathrm{d}\rho + \rho \cos \theta \mathrm{d}\theta\right) = \frac{\partial z}{\partial \rho}\mathrm{d}\rho + \frac{\partial z}{\partial \theta}\mathrm{d}\theta .$$

Egalând coeficienții termenilor $d\theta$ și $d\rho$ obținem:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x}\cos \theta + \dfrac{\partial z}{\partial y}\sin \theta = \dfrac{\partial z}{\partial \rho} \\ -\dfrac{\partial z}{\partial x}\rho \sin \theta + \dfrac{\partial z}{\partial y}\rho \cos \theta = \dfrac{\partial z}{\partial \theta}. \end{cases}$$

Rezolvând acest sistem rezultă:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = \cos \theta \dfrac{\partial z}{\partial \rho} - \dfrac{1}{\rho}\sin \theta \dfrac{\partial z}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = \sin \theta \dfrac{\partial z}{\partial \rho} + \dfrac{1}{\rho}\cos \theta \dfrac{\partial z}{\partial \theta}. \end{cases}$$

Se obțin astfel operatorii de derivare:

$$\frac{\partial}{\partial x}=\cos\theta\frac{\partial}{\partial\rho}-\frac{1}{\rho}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}=\sin\theta\frac{\partial}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}\cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta}.$$

Mai departe avem:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial\rho}-\frac{1}{\rho}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\left(\cos\theta\frac{\partial z}{\partial\rho}-\frac{1}{\rho}\sin\theta\frac{\partial z}{\partial\theta}\right)=$$

$$=\cos\theta\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\cos\theta\frac{\partial z}{\partial\rho}-\frac{1}{\rho}\sin\theta\frac{\partial z}{\partial\theta}\right)-\frac{1}{\rho}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\cos\theta\frac{\partial z}{\partial\rho}-\frac{1}{\rho}\sin\theta\frac{\partial z}{\partial\theta}\right).$$

După calcule uşor de urmărit obţinem:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\cos^2\theta\frac{\partial^2 z}{\partial\rho^2}-\frac{2}{\rho}\sin\theta\cos\theta\frac{\partial^2 z}{\partial\rho\partial\theta}+\frac{1}{\rho^2}\sin^2\theta\frac{\partial^2 z}{\partial\theta^2}+$$

$$+\frac{1}{\rho}\sin^2\theta\frac{\partial z}{\partial\rho}+\frac{2}{\rho^2}\sin\theta\cos\theta\frac{\partial z}{\partial\theta}.$$

În mod analog avem:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\sin^2\theta\frac{\partial^2 z}{\partial\rho^2}+\frac{2}{\rho}\sin\theta\cos\theta\frac{\partial^2 z}{\partial\rho\partial\theta}+\frac{1}{\rho^2}\cos^2\theta\frac{\partial^2 z}{\partial\theta^2}+$$

$$+\frac{1}{\rho}\cos^2\theta\frac{\partial z}{\partial\rho}-\frac{2}{\rho^2}\sin\theta\cos\theta\frac{\partial z}{\partial\theta}.$$

Astfel, în coordonate polare, expresia laplacianului este

$$\Delta z=\frac{\partial^2 z}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 z}{\partial\theta^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial z}{\partial\rho}.$$

4.14. Elemente de teoria câmpurilor

Fie $A\subset\mathbb{R}^3$ o mulţime deschisă, $a=(a_1,a_2,a_3)\in A$ un punct fixat şi $l=(l_1,l_2,l_3)\in\mathbb{R}^3$ un versor, deci $\|l\|=\sqrt{l_1^2+l_2^2+l_3^2}=1$. Deoarece $a\in A$ este punct interior, rezultă că $\exists\ r>0$ astfel încât $B(a,r)\subset A$. Pentru $\forall\ t\in(-r,r)$, punctul $x=a+tl\in B(a,r)\subset A$.

Definiţia 4.14.1. *Spunem că funcţia* $f : A \to \mathbb{R}$ *este derivabilă în punctul a, după direcţia l, dacă următoarea limită există şi e finită.*

$$\lim_{t\to 0} \frac{f\left(a+tl\right)-f(a)}{\left|t\right|} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x=a+tl}} \frac{f(x)-f(a)}{d\left(a,x\right)}.$$

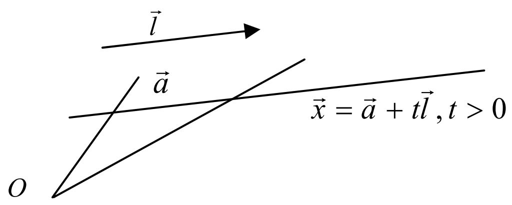
Această limită se notează cu $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}l}(a)$ şi se numeşte derivata funcţiei *f* în punctul *a*, după direcţia *l*.

Din punct de vedere geometric, mulţimea punctelor $x = a + tl$, $t \in \Upsilon$, reprezintă dreapta care trece prin *a* şi are parametrii directori l_1, l_2, l_3.

Semiaxa pozitivă a acestei drepte corespunde valorilor parametrilor $t > 0$, iar semiaxa negativă corespunde valorilor $t < 0$. Convenim să notăm cu l^+ sensul pozitiv pe această dreaptă şi cu l^- sensul negativ.

Avem:

$$\frac{\partial f}{\partial l^-}(a) = \lim_{t\to 0} \frac{f\left(a+tl\right)-f(a)}{\left|t\right|} = \lim_{t\to 0} \frac{f\left(a+tl\right)-f(a)}{-t} = -\frac{\partial f}{\partial l^+}(a).$$



Teorema 4.14.1. *Dacă* $f : A \to \mathbb{R}$ *este o diferenţiabilă în punctul* $a \in A$, *atunci f este derivabilă în punctul a după direcţia l şi avem*:

$$\frac{\partial f}{\partial l^+}(a) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) l_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) l_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3}(a) l_3.$$

Demonstraţie

Fie $r > 0$ astfel încât $B\left(a,r\right) \subset A$. Dacă $t \in \left(0,r\right)$, atunci $a + tl \in A$ şi deoarece *f* este diferenţiabilă în punctul *a* vom avea:

$$f\left(a+tl\right) - f(a) = f'(a)\left(tl\right) + \varphi\left(tl\right),$$

unde φ este $o\left(tl\right)$ pentru $h \to 0$. Ţinând seama că $\left\|tl\right\| = t$ şi $f'(a)\left(tl\right) = tf'(a)\left(l\right)$, în continuare avem:

$$\frac{f\left(a+tl\right)-f(a)}{t} = f'(a)\left(l\right) + \frac{\varphi\left(tl\right)}{\left\|tl\right\|}.$$

Cum $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\varphi(tl)}{\|tl\|}=0$, rezultă:

$$\exists\ \frac{\partial f}{\partial l^{+}}(a)=\lim_{t\to 0}\frac{f(a+tl)-f(a)}{t}=f'(a)(l)=$$
$$=\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)l_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}(a)l_2+\frac{\partial f}{\partial x_3}(a)l_3.$$

Exemplu. Fie $f(x,y,z)=xyz$, $a=(1,-1,1)$ şi $l=\left(\dfrac{1}{\sqrt{17}},\dfrac{4}{\sqrt{17}},0\right)$. Avem $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a)=-1$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a)=1$ şi $\dfrac{\partial f}{\partial z}(a)=-1$, deci

$$\frac{\partial f}{\partial l}(a)=-\frac{1}{\sqrt{17}}+\frac{4}{\sqrt{17}}-1\cdot 0=\frac{3}{\sqrt{17}}.$$

Definiția 4.14.2. *Fie $D\subset\mathbb{R}^3$ o mulțime deschisă. Prin câmp scalar pe D se înțelege orice funcție $u:D\to\mathbb{R}$. Dacă în plus $u\in C^k(D)$, spunem că u este un câmp scalar de clasă C^k pe D. Prin câmp vectorial pe D se înțelege orice funcție vectorială, $\vec{v}=(P,Q,R):D\to\mathbb{R}^3$. Dacă $P,Q,R\in C^k(D)$, spunem că $\vec{v}$ este un câmp vectorial de clasă C^k pe D.*

Ca exemple de câmpuri scalare menționăm câmpul temperaturilor, câmpul presiunilor, câmpul densităților etc. Un exemplu tipic de câmp vectorial este câmpul vitezelor particulelor unui fluid în mişcare.

În continuare, presupunem că fixăm un reper rectangular drept $\{0,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$, unde $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ sunt versori şi identificăm orice punct *M* din spațiu cu vectorul său de poziție $\overrightarrow{OM}$. Cu această precizare, dacă $\vec{v}=(P,Q,R):D\to\mathbb{R}^3$ este un câmp vectorial, atunci

$$\vec{v}(x,y,z)=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k},\ \forall\ (x,y,z)\in D.$$

Definiția 4.14.3, *Dacă $u:D\subset\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ este un câmp scalar de clasă C^1 pe D, atunci câmpul vectorial pe D definit prin $\mathrm{grad}(u)=\dfrac{\partial u}{\partial x}\vec{i}+\dfrac{\partial u}{\partial y}\vec{j}+\dfrac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$, se numeşte câmpul de gradienți al câmpului scalar u.*

Reamintim că produsul scalar a doi vectori $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ este prin definiție $\vec{a}\cdot\vec{b}=\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|\cos\phi$, unde ϕ este unghiul dintre cei doi vectori, iar expresia

analitică a produsului scalar este $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$, unde $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$, $\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$. Din Teorema 4.14.1 rezultă:

Observația 4.14.1. Fie $D \subset \mathbb{R}^3$ deschisă, $a \in D$ și $\vec{l} = l_1 \vec{i} + l_2 \vec{j} + l_3 \vec{k}$ un versor. Dacă $f : D \to \mathbb{R}$ este diferențiabilă în *a*, atunci

$$\frac{\partial f}{\partial l}(a) = \vec{l}\ \mathrm{grad}_a(f),\ \text{unde}\ \mathrm{grad}_a(f) = \frac{\partial f}{\partial x}(a)\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(a)\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}(a)\vec{k}.$$

Fie φ unghiul dintre $\vec{l}$ și $\mathrm{grad}_a(f)$. Atunci $\frac{\partial f}{\partial l}(a) = \left\| \mathrm{grad}_a(f) \right\| \cos\varphi$, de unde rezultă că valoarea maximă a derivatei lui *f* în *a*, după direcția *l*, se realizează atunci când $\vec{l}$ și $\mathrm{grad}_a(f)$ sunt colineare.

Definiția 4.14.4. *Un câmp vectorial $\vec{v}$ pe D se numește de potențial dacă există $u : D \to \Upsilon$, $u \in C^1(D)$ astfel încât $\vec{v} =$* grad (*u*). *Dacă $\vec{v} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$, aceasta revine la*

$$P = \frac{\partial u}{\partial x},\quad Q = \frac{\partial u}{\partial y},\quad R = \frac{\partial u}{\partial z}.$$

Exemplu: $\vec{v}(x,y,z) = y^2 z^3 \vec{i} + 2xyz^3 \vec{j} + 3xy^2 z^2 \vec{k}$ este câmp de potențial, deoarece $\vec{v}$ =grad *u*, unde $u(x,y,z) = xy^2 z^3$.

Definiția 4.14.5. *Fie $\vec{v} = (P,Q,R) : D \to \mathbb{R}^3$ un câmp vectorial de clasă C^1 pe D. Se numește divergența câmpului $\vec{v}$, următorul câmp scalar*

$$\mathrm{div}(\vec{v}) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

Câmpul vectorial $\vec{v}$ se numește solenoidul (tubular) dacă $\mathrm{div}(\vec{v}) = 0$.

Definiția 4.14.6. *Fie $\vec{v} = (P,Q,R) : D \to \mathbb{R}^3$ un câmp vectorial de clasă C^1 pe D. Se numește rotorul câmpului v, următorul câmp vectorial*:

$$\mathrm{rot}(\vec{v}) = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right)\vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)\vec{k}.$$

Câmpul vectorial $\vec{v}$ se numește irațional dacă $\mathrm{rot}\,\vec{v} = 0$.

Pentru a reține mai uşor expresia rotorului se foloseşte următorul determinant simbolic

$$\operatorname{rot}(\vec{v}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}.$$

(acest determinant „se dezvoltă“ întotdeauna după prima linie).

Definiția 4.14.7. *Se numeşte operatorul nabla, sau operatorul lui Hamilton, următorul operator simbolic*

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\ .$$

Fie $u : D \to \mathbb{R}$ un câmp scalar de clasă C^1 pe D şi $\vec{v} = (P,Q,R) : D \to \mathbb{R}^3$ un câmp vectorial de clasă C^1 pe D. Cu ajutorul operatorului ∇, operatorii diferențiali se exprimă astfel:

1) grad $(u) = \nabla u$ – produsul dintre vectorul ∇ şi funcția scalară u

$$\operatorname{grad}(u) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}\ ;$$

2) div $\vec{v} = \nabla\,\vec{v}$ – produsul scalar dintre vectorii ∇ şi v

$$\operatorname{div}\vec{v} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)\left(Pi + Qj + Rk\right) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\ ;$$

3) rot $\vec{v} = \nabla \times \vec{v}$ – produsul vectorial dintre vectorii ∇ şi v

$$\operatorname{rot}(\vec{v}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}\ .$$

Teorema 4.14.2. *Fie u_1, u_2 două câmpuri scalare de clasă C^1 pe D şi $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ două câmpuri vectoriale de clasă C^1 pe D. Au loc următoarele proprietăți*:

a) $\operatorname{grad}(u_1 \cdot u_2) = u_2 \operatorname{grad} u_1 + u_1 \operatorname{grad} u_2$

b) $\operatorname{div}(u_1 \cdot \vec{v}_1) = \vec{v}_1 \operatorname{grad} u_1 + u_1 \operatorname{div} \vec{v}_1$

c) $\operatorname{div}(\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2) = \vec{v}_2 \operatorname{rot} \vec{v}_1 - \vec{v}_1 \operatorname{rot} \vec{v}_2$

d) $\operatorname{div}(\operatorname{grad} u_1) = \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} = \Delta u_1$

(*operatorul* $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ *se numeşte laplacian*)

e) $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{v}_1) = 0$

f) $\operatorname{rot}(u_1 \cdot \vec{v}_1) = \operatorname{grad} u_1 \times \vec{v}_1 + u_1 \operatorname{rot} \vec{v}_1$

g) $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} u_1) = 0$.

Demonstrație

Demonstrația revine la verificări directe. De exemplu:

b) $\operatorname{div}(u_1 \cdot \vec{v}_1) = \operatorname{div}(u_1 P_1 \vec{i} + u_1 Q_1 \vec{j} + u_1 R_1 \vec{k}) = \dfrac{\partial}{\partial x}(u_1 P_1) + \dfrac{\partial}{\partial y}(u_1 Q_1) + \dfrac{\partial}{\partial z}(u_1 R_1) =$

$$= \frac{\partial u_1}{\partial x} P_1 + u_1 \frac{\partial P_1}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} Q_1 + u_1 \frac{\partial Q_1}{\partial y} + \frac{\partial u_1}{\partial z} R_1 + u_1 \frac{\partial R_1}{\partial z} = (\operatorname{grad} u_1) \vec{v}_1 + u_1 \operatorname{div} \vec{v}_1 .$$

Bibliografie

[1] G. Chilov, *Analyse Mathématique*, Editions Mir, Moscou, Vol. 1 (1973), Vol. 2 (1975).

[2] I. Colojoară, *Analiză matematică*, Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1983.

[3] R. Cristescu, *Elemente de analiză funcţională*, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1975.

[4] P. Flondor, O. Stănăşilă, *Lecţii de analiză matematică şi exerciţii rezolvate*, Ed. ALL, 1998.

[5] V.A. Ilyn and E.G. Poznyak, *Fundamentals of Mathematical Analysis*, Mir Publishers Moscow, Part I and II, 1982.

[6] S. Lange, *Analysis I*, Addison-Wesly Publishing Company, 1969.

[7] M. Nicolescu, N. Dinculeanu, S. Marcus, *Manual de analiză matematică*, Vol I şi II, Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1962.

[8] S.M. Nicolsky, *A Course of Mathematical Analysis*, Mir Publishers Moscow, Part I and Part II, 1977.

[9] V. Olariu, A. Halanay, S. Turbatu, *Analiză Matematică*, Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1983.

[10] G. Păltineanu, I. Popa, R. Trandafir, *Analiză matematică*, Partea I – Calculul diferenţial. Litografie U.T.C.B., 1990.

[11] I. Popa, *Analiză matematică*, Vol. 1, Calculul diferenţial, MATRIX ROM, Bucureşti, 2000.

[12] O. Stănăşilă, *Analiză matematică*, Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1981.

CAPITOLUL 1

PRIMITIVE

1.1 METODE GENERALE DE CALCUL ALE PRIMITIVELOR

În acest paragraf vom reaminti noțiunea de primitivă, proprietățile primitivelor şi metodele generale de calcul ale acestora.

Definiția 1.1.1 *Fie* $f : I \to \mathbb{R}$, *unde* $I \subset \mathbb{R}$ *este un interval. Funcția* $F : I \to \mathbb{R}$ *se numeşte primitivă a funcției f pe intervalul I, dacă F este derivabilă pe I şi*

$$F'(x) = f(x), \ \forall \ x \in I.$$

Observația 1.1.1 Dacă F este o primitivă a lui f pe I, atunci oricare ar fi constanta reală C, funcția $G : I \to \mathbb{R}$ definită prin $G(x) = F(x) + C$, $\forall\ x \in I$, este de asemenea o primitivă a lui f pe I. Mai mult, orice altă primitivă a lui f pe I este de această formă.

Într-adevăr, dacă $G = F + C$, atunci $G' = F' = f$, deci G este o primitivă a lui f pe I.

Reciproc, fie G o altă primitivă a lui f pe I şi fie $H = G - F$.

Pentru orice $x \in I$ avem $H'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$.

Fie acum $a \in I$ un punct interior fixat. Din Teorema lui Lagrange rezultă că pentru orice $x \in I$, există ξ în intervalul deschis de capete a şi x astfel încât:

$$H(x) - H(a) = H'(\xi)(x - a) = 0.$$

Dacă notăm cu $C = H(a)$, atunci $G(x) - F(x) = C$, $\forall\ x \in I$, deci $G = F + C$ pe I.

Definiția 1.1.2 *Fie* $f : I \to \mathbb{R}$ *şi* $F : I \to \mathbb{R}$ *o primitivă a sa. Mulțimea tuturor primitivelor funcției f pe I se notează cu* $\int f \mathrm{d}x$ sau $\int f(x)\mathrm{d}x$ *şi se numeşte integrala nedefinită a funcției f.*

Din Observația 1.1.1 rezultă că

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + \mathcal{C}, \ \forall \ x \in I,$$

unde cu $\mathcal{C}$ am notat mulțimea tuturor funcțiilor constante pe I.

Observația 1.1.2 În capitolul următor se va arăta că orice funcție continuă pe un interval admite primitive pe acest interval.

În continuare reamintim tabloul primitivelor funcțiilor elementare uzuale.

$$\int x^{\alpha}\,\mathrm{d}x = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C\ ,\ x \in \mathbb{R},\ \alpha \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln x + C\ ,\ x \in (0,\infty),\quad \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln(-x) + C\ ,\ x \in (-\infty,0)$$

$$\int a^{x}\,\mathrm{d}x = \frac{a^{x}}{\ln a}\ ,\ x \in \mathbb{R},\ a > 0,\ a \neq 1,\quad \int e^{x}\,\mathrm{d}x = e^{x} + C\ ,\ x \in \mathbb{R}$$

$$\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + C\ ,\ x \in \mathbb{R}$$

$$\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + C\ ,\ x \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{1}{\cos^{2} x}\,\mathrm{d}x = \operatorname{tg} x + C\ ,\ x \in \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\pi/2; k \in \mathbb{Z}\}$$

$$\int \frac{1}{\sin^{2} x}\,\mathrm{d}x = -\operatorname{ctg} x + C\ ,\ x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$$

$$\int \frac{1}{1+x^{2}}\,\mathrm{d}x = \operatorname{arctg} x + C\ ,\ x \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}\,\mathrm{d}x = \arcsin x + C\ ,\ x \in (-1,1)$$

$$\int \operatorname{sh} x\,\mathrm{d}x = \operatorname{ch} x + C\ ,\ x \in \mathbb{R}$$

$$\int \operatorname{ch} x\,\mathrm{d}x = \operatorname{sh} x + C\ ,\ x \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^{2}+a^{2}}} = \ln\left(x + \sqrt{x^{2}+a^{2}}\right) + C\ ,\ x \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^{2}-a^{2}}} = \begin{cases} \ln\left(x + \sqrt{x^{2}+a^{2}}\right) + C\ ,\ x \in (a,\infty) \\ \ln\left(-x - \sqrt{x^{2}-a^{2}}\right) + C\ ,\ x \in (-\infty,-a) \end{cases}\ ,\quad a > 0.$$

Propoziția 1.1.1 *Fie f, $g : I \to \mathbb{R}$ și fie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ oarecare. Dacă f și g au primitive pe I, atunci $\alpha f + \beta g$ admite primitive pe I și*

$$\int (\alpha f + \beta g)(x)\,\mathrm{d}x = \alpha \int f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Demonstrație.

Afirmația rezultă din proprietatea de linearitate a operației de derivare: $(\alpha F + \beta G)' = \alpha F' + \beta G'$.

Propoziția 1.1.2 *Fie $F : J \to \mathbb{R}$ o primitivă a funcției $f : J \to \mathbb{R}$ și fie $u : I \to J$ o funcție derivabilă pe I. Atunci*

$$\int f\left[u(x)\right]u'(x)\mathrm{d}x = F\left[u(x)\right]+\mathrm{C}\ ,\ \ \forall\ \ x \in I.$$

Demonstrația rezultă imediat din regula de derivare a funcțiilor compuse:

$$\left(F\left[u(x)\right]\right)' = F'\left[u(x)\right]\cdot u'(x) = f\left[u(x)\right]\cdot u'(x)\ ,\quad x \in I.$$

Observația 1.1.3 Din Propoziția 1.1.2 rezultă că pentru calculul primitivei funcției $\left(f\circ u\right)u'$ se poate proceda astfel:

Facem schimbarea de variabilă $t = u(x)$, $x \in I$. Funcția u este diferențiabilă pe I şi avem $\mathrm{d}t = \mathrm{d}u(x) = u'(x)\mathrm{d}x$.

În continuare rezultă:

$$\int f\left[u(x)\right]\cdot u'(x)\mathrm{d}x = \int f(t)\mathrm{d}t = F(t)+\mathrm{C}\ = F\left[u(x)\right]+\mathrm{C}\ ,\quad x \in I.$$

Precizăm că egalitatea $\int f\left[u(x)\right]u'(x)\mathrm{d}x = \int f(t)\mathrm{d}t$ este o egalitate formală. Într-adevăr, funcția din membrul stâng este definită pe J iar funcția din membrul drept pe I, deci cele două funcții nu sunt egale în sensul egalității funcțiilor.

Exemplul 1.1.1 Să se calculeze $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2}$.

Dacă notăm $t = \dfrac{x}{a}$, atunci $\mathrm{d}x = a\mathrm{d}t$ şi vom avea:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{\mathrm{d}x}{\left(\dfrac{x}{a}\right)^2+1} = \frac{1}{a^2}\int \frac{a\mathrm{d}t}{t^2+1} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg} t = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+\mathrm{C}\ ,\ \ x \in \mathbb{R}.$$

În mod analog se arată că

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a}+\mathrm{C}\ ,\ \ x \in \left(-a,a\right),\ \ a > 0.$$

Propoziția 1.1.3 *Fie* $u : I \to J$ *o funcție bijectivă de clasă* C^1 *cu* $u'(x) \neq 0$, $\forall\ x \in I$ *şi* $f : J \to \mathbb{R}$ *o funcție continuă. Dacă* $G : J \to \mathbb{R}$ *este o primitivă a funcției* $f\cdot\left(u^{-1}\right)' : J \to \mathbb{R}$ *atunci* $\int f\left[u(x)\right]\mathrm{d}x = G\left[u(x)\right]+\mathrm{C}\ ,\ \forall\ \ x \in I.$

Demonstrație.

Deoarece $u^{-1}\left[u(x)\right] = x$, $\forall\ x \in I$, rezultă $\left(u^{-1}\right)'\left[u(x)\right]u'(x) = 1$, $\forall\ \ x \in I$. Aşadar avem:

$$\int f\left[u(x)\right]\mathrm{d}x = \int f\left[u(x)\right]\cdot\left(u^{-1}\right)'\left[u(x)\right]\cdot u'(x)\,\mathrm{d}x = \int\left[f\cdot\left(u^{-1}\right)'\right]\left[u(x)\right]\cdot u'(x)\mathrm{d}x\ .$$

Cum G este o primitivă a funcției $f\cdot\left(u^{-1}\right)'$, din Propoziția 1.1.2 rezultă că $\int\left[f\cdot\left(u^{-1}\right)'\right][u(x)]\cdot u'(x)\mathrm{d}x = G[u(x)]+\mathcal{C}$.

Observația 1.1.4 Din Propoziția 1.1.3 rezultă că pentru calculul primitivei $\int f[u(x)]\mathrm{d}x$, facem schimbarea de variabilă $t = u(x)$ și acceptăm următorul calcul formal: $x = u^{-1}(t)$, $\mathrm{d}x = \left(u^{-1}\right)'(t)\mathrm{d}t$, $\int f[u(x)]\mathrm{d}x = \int f(t)\cdot\left(u^{-1}\right)'(t)\mathrm{d}t = G(t)+\mathcal{C}$ = $= G[u(x)]+\mathcal{C}$.

Exemplul 1.1.2 Să se calculeze $\int \mathrm{tg}^4 x\,\mathrm{d}x$, $x\in(-\pi/2,-\pi/2)$.

Notăm t = tg$x$, x = arctg t, $\mathrm{d}x = \dfrac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t$.

$$\int \mathrm{tg}^4 x\,\mathrm{d}x = \int\frac{t^4}{1+t^2}\mathrm{d}t = \int\left(t^2-1+\frac{1}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t = \frac{t^3}{3}-t+\mathrm{arctg}\,t+\mathcal{C} =$$
$$= \frac{\mathrm{tg}^3 x}{3}-\mathrm{tg}\,x+x+\mathcal{C}\ .$$

Următorul rezultat este cunoscut sub numele de metoda de integrare prin părți.

Propoziția 1.1.3 *Dacă f și g sunt de clasă* C^1 *pe I, atunci*
$$\int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Demonstrație.

Conform regulii de derivare a produsului a două funcții, avem:
$$(fg)' = f'g+fg'\,.$$
Ținând seama de Propoziția 1.1.1 rezultă
$$\int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = \int\left(f(x)g(x)\right)'\mathrm{d}x - \int f'(x)g(x)\mathrm{d}x = f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)\mathrm{d}x\,.$$

Exemplul 1.1.3 Să se calculeze $\int\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x$.

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x = \int\frac{a^2-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x = a^2\arcsin\frac{x}{a}-\int x\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x\,.$$

Dacă notăm cu $f(x) = x$ și $g'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$, atunci

$f'(x)=1$, $g(x)=-\sqrt{a^2-x^2}$ şi $\int x\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x=-x\sqrt{a^2-x^2}+\int\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x$.

Aşadar $\int\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x=a^2\arcsin\frac{x}{a}+x\sqrt{a^2-x^2}-\int\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x$, de rezultă că $2\int\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x=x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\arcsin\frac{x}{a}+\mathrm{C}$, deci

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\mathrm{C}\ .$$

În mod asemănător se arată că

$$\int\sqrt{a^2+x^2}\mathrm{d}x=\frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2}+\frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)+\mathrm{C}\ ,\ x\in\mathbb{R}.$$

1.2. PRIMITIVELE FUNCŢIILOR RAŢIONALE

Prin funcţie raţională se înţelege un raport de două polinoame (funcţii polinomiale), adică o funcţie de forma: $R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$, $x\in I$ unde P şi Q sunt polinoame şi $Q(x)\neq 0$, $\forall\ x\in I$. Dacă gradul lui P este mai mare sau egal cu gradul lui Q, efectuăm împărţirea şi obţinem:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=C(x)+\frac{P_1(x)}{Q(x)},$$ unde C este un polinom şi $\operatorname{grad}P_1<\operatorname{grad}Q$.

De la cursul de algebră se ştie că raportul $\frac{P_1}{Q}$ admite următoarea descompunere (unică) în fracţii simple:

$$\frac{P_1(x)}{Q(x)}=\sum_{j=1}^{l}\left(\frac{A_{j1}}{x-a_j}+\frac{A_{j2}}{\left(x-a_j\right)^2}+\ldots+\frac{A_{jk_j}}{\left(x-a_j\right)^{k_j}}\right)+$$
$$+\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{B_{j1}x+C_{j1}}{x^2+b_jx+c_j}+\frac{B_{j2}x+C_{j2}}{\left(x^2+b_jx+c_j\right)^2}+\ldots+\frac{B_{jm_j}x+C_{jm_j}}{\left(x^2+b_jx+c_j\right)^{m_j}}\right].$$

unde $A_{ji},a_j,B_{ji},C_{ji},b_j,c_j$ sunt numere reale, $b_j^2-4c_j<0$, $j=\overline{1,n}$ şi $Q(x)=$ $=\left(x-a_1\right)^{k_1}\ldots\left(x-a_l\right)^{k_l}\left(x^2+b_1x+c_1\right)^{m_1}\ldots\left(x^2+b_nx+c_n\right)^{m_n}$ (Descompunerea în factori ireductibili a polinomului Q).

Aşadar, pentru a calcula primitiva unei funcţii raţionale este suficient să ştim să calculăm primitive de forma

$$\int \frac{1}{(x-a)^k}\,\mathrm{d}x\,,\ \text{respectiv}\ \int \frac{Bx+C}{\left(x^2+bx+c\right)^k}\,\mathrm{d}x\,,\ b^2-4c<0\,,\ k\in\mathbb{N}^*\,.$$

Calculul primului tip de primitivă este imediat. Într-adevăr, pentru $k \neq 1$ avem $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^k}=\int (x-a)^{-k}\,\mathrm{d}x=\frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1}+\mathcal{C}$, iar $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x-a}=\ln|x-a|+\mathcal{C}$.

Pentru al doilea tip de primitivă procedăm astfel:

$$\int \frac{Bx+C}{\left(x^2+bx+c\right)^k}\,\mathrm{d}x=\int \frac{Bx+C}{\left[\left(x+\frac{b}{2}\right)^2+\frac{4c-b^2}{4}\right]^k}\,\mathrm{d}x\,.$$

Folosind notațiile $t=x+\frac{b}{2}$ şi $a^2=\frac{4c-b^2}{4}$ obținem:

$$\int \frac{Bx+C}{\left(x^2+bx+c\right)^k}\,\mathrm{d}x=\frac{B}{2}\int \frac{2t}{\left(t^2+a^2\right)^k}\,\mathrm{d}t+\left(C-\frac{Bb}{2}\right)\int \frac{\mathrm{d}t}{\left(t^2+a^2\right)^k}\,.$$

Evident avem:

$$\int \frac{2t}{\left(t^2+a^2\right)^k}\,\mathrm{d}t=\begin{cases}\dfrac{1}{2(1-k)\left(t^2+a^2\right)^{k-1}}\ , & \text{pentru}\ \ k\neq 1\\[2ex] \ln\left(t^2+a^2\right)\ , & \text{pentru}\ \ k=1\,.\end{cases}$$

Pentru cealaltă primitivă stabilim, în cazul $k > 1$, o relație de recurență:

$$I_k=\int \frac{\mathrm{d}t}{\left(t^2+a^2\right)^k}=\frac{1}{a^2}\int \frac{a^2+t^2-t^2}{\left(t^2+a^2\right)^k}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{a^2}\left(I_{k-1}-\int \frac{t^2}{\left(t^2+a^2\right)^k}\,\mathrm{d}t\right).$$

Dacă notăm cu $f(t)=t$ şi $g'(t)=\dfrac{t}{\left(t^2+a^2\right)^k}$, atunci $f'(t)=t$ şi

$$g(t)=\frac{1}{2}\int \frac{2t}{\left(t^2+a^2\right)^k}\,\mathrm{d}t=-\frac{1}{2(k-1)}\cdot\frac{1}{\left(t^2+a^2\right)^{k-1}}\ \text{ şi}$$

$$\int \frac{t^2}{\left(t^2+a^2\right)^k}\,\mathrm{d}t=-\frac{t}{2(k-1)\left(t^2+a^2\right)^{k-1}}+\frac{1}{2(k-1)}I_{k-1}\,.$$

În continuare avem:

$$I_k=\frac{1}{a^2}\left(I_{k-1}+\frac{t}{2(k-1)\left(t^2+a^2\right)^{k-1}}-\frac{1}{2(k-1)}I_{k-1}\right)\ \text{sau}$$

$$I_k = \frac{1}{a^2}\left(\frac{t}{2(k-1)\left(t^2+a^2\right)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2(k-1)} I_{k-1} \right) \tag{1}$$

În cazul $k = 1$ avem $I_1 = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a} + \mathrm{C}$.

Exemplul 1.2.1 Să se calculeze primitiva funcției:

$$f(x) = \frac{x^7 - 2x^6 + 4x^5 - 5x^4 + 4x^3 - 5x^2 - x}{x^6 - 2x^5 + 3x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 2x + 1}.$$

Este uşor de observat că polinomul de la numitor are rădăcina dublă $x = 1$ şi admite descompunerea $x^6 - 2x^5 + 3x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2\left(x^2+1\right)^2$.

Din teorema împărțirii rezultă:

$$f(x) = x + \frac{x^5 - x^4 + x^3 - 3x^2 - 2x}{(x-1)^2\left(x^2+1\right)^2}, \text{ deci}$$

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} + \int \frac{x^5 - x^4 + x^3 - 3x^2 - 2x}{(x-1)^2\left(x^2+1\right)^2}\mathrm{d}x.$$

Funcția de sub semnul integrală o descompunem în fracții simple astfel:

$$\frac{x^5 - x^4 + x^3 - 3x^2 - 2x}{(x-1)^2\left(x^2+1\right)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1} + \frac{Ex+F}{\left(x^2+1\right)^2}.$$

Dacă amplificăm ambii membri ai acestei egalități cu $(x-1)^2$ şi apoi dăm lui x valoarea 1, rezultă $B = -1$. În continuare, trecem în membrul stâng termenul $\frac{-1}{(x-1)^2}$, aducem la acelaşi numitor şi simplificăm cu $x - 1$. Rezultă:

$$\frac{x^4 + x^3 - 2x^2 + x - 1}{(x-1)\left(x^2+1\right)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{Cx+D}{x^2+1} + \frac{Ex+F}{\left(x^2+1\right)^2}.$$

Amplificând ultima egalitate cu $x - 1$ şi dând apoi lui x valoarea 1 obținem $A = 1$. Trecem în membrul stâng termenul $\frac{1}{x-1}$, aducem la acelaşi numitor şi simplificăm cu $x - 1$. Rezultă:

$$\frac{x^2 + x + 2}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{Cx+D}{x^2+1} + \frac{Ex+F}{\left(x^2+1\right)^2} \text{ sau}$$

$$x^2 + x + 2 = Cx^3 + Dx^2 + (C+E)x + D + F.$$

Se obține astfel sistemul: $C = 0$, $D = 1$, $C + E = 1$, $D + F = 2$, care admite soluția: $C = 0$, $D = 1$, $E = 1$, $F = 1$.

Aşadar, avem:

$$\int \frac{x^5 - x^4 + x^3 - 3x^2 - 2x}{(x-1)^2\left(x^2+1\right)^2}\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}x}{x-1} - \int \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^2} + \int \frac{1}{x^2+1}\mathrm{d}x + \int \frac{x+1}{\left(x^2+1\right)^2}\mathrm{d}x =$$

$$= \ln|x-1| + \frac{1}{x-1} + \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}\int \frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}\mathrm{d}x + \int \frac{\mathrm{d}x}{\left(x^2+1\right)^2} =$$

$$= \ln|x-1| + \frac{1}{x-1} + \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2\left(x^2+1\right)} + I_2 .$$

Din (1) rezultă:

$$I_2 = \int \frac{\mathrm{d}x}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{x}{2\left(x^2+1\right)} + \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} = \frac{x}{2\left(x^2+1\right)} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x .$$

În final avem:

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} + \ln|x-1| + \frac{1}{x-1} + \frac{x-1}{2\left(x^2+1\right)} + \frac{3}{2}\operatorname{arctg} x + \mathrm{C} .$$

1.3 PRIMITIVE DE FORMA: $\int R(\cos x, \sin x)\mathrm{d}x$

Fie $R(u,v) = \dfrac{P(u,v)}{Q(u,v)}$ o funcție rațională de două variabile, unde $P(u,v) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} a_{ij}u^i v^j$ şi $Q(u,v) = \sum_{k=0}^{m}\sum_{j=0}^{l} b_{ij}u^i v^j$ sunt două polinoame de două variabile.

Presupunem că $I \subset (-\pi, \pi)$ este un interval şi $Q(\sin x, \cos x) \neq 0$, $\forall\ x \in I$.

Pentru calculul primitivei de forma $\int R(\sin x, \cos x)\mathrm{d}x$ facem schimbarea de variabilă: $t = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$, $x \in I$. Inversând funcția, obținem $x = 2\operatorname{arctg} t$ şi $\mathrm{d}x = \dfrac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t$.

Pe de altă parte avem:

$$\cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} \quad \text{şi} \quad \sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} .$$

În urma acestei schimbări de variabilă rezultă:

$$\int R(\cos x,\, \sin x)\mathrm{d}x = \int R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)\cdot\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t = \int R_1(t)\,\mathrm{d}t,$$

unde R_1 este o funcție rațională în *t*.

Observația 1.3.1 Intervalul *I* se poate înlocui cu orice alt interval *J* pe care funcția $x \to \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ este strict monotonă şi $Q(\sin x,\, \cos x) \neq 0$, $\forall\ x \in J$.

Exemplul 1.3.1 Să se calculeze $\int \frac{\mathrm{d}x}{3+\sin x}$, $x \in (-\pi, \pi)$.

Facem schimbarea de variabilă $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ şi obținem:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{3+\sin x} = \int \frac{1}{3+\frac{2t}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t = \int \frac{2\,\mathrm{d}t}{3t^2+2t+3} = \frac{2}{3}\int \frac{\mathrm{d}t}{\left(t+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{8}{9}} =$$

$$= \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t+\frac{1}{3}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{3\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{2\sqrt{2}} + \mathrm{C}\ .$$

În continuare, prezentăm trei cazuri particulare, în care se pot face alte schimbări de variabile, ce conduc la calculul unor primitive de funcții raționale mai simple decât cele obținute în urma schimbării de variabilă $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$.

1. $R(\cos x,\, \sin x) = R_1\left(\cos^2 x,\, \sin^2 x\right)$ sau $R_2(\operatorname{tg} x)$, unde R_1 (respectiv R_2) sunt funcții raționale.

Presupunem în plus că $I \subset \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ şi $Q(\cos x,\, \sin x) \neq 0$, $\forall\ x \in I$. În acest caz, se face schimbarea de variabilă $t = \operatorname{tg} x$.

Inversând funcția, obținem $x = \operatorname{arctg} t$ şi $\mathrm{d}x = \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t$.

De la trigonometrie se ştie că:

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x} \quad \text{şi} \quad \sin^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}.$$

Aşadar, în urma acestei schimbări de variabile obținem:

$$\int R_1\left(\cos^2 x, \sin^2 x\right)\mathrm{d}x = \int R_1\left(\frac{1}{1+t^2}, \frac{t^2}{1+t^2}\right)\cdot\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t,$$

respectiv $$\int R_2\left(\operatorname{tg} x\right)\mathrm{d}x = \int R_2(t)\cdot\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t.$$

În ambele cazuri problema s-a redus la calculul unor primitive de funcții raționale în *t*.

Exemplul 1.3.2 Să se calculeze $\int \frac{1}{2+\sin x\cos x}\mathrm{d}x$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Pentru început observăm că:

$$\int \frac{1}{2+\sin x\cos x}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{2+\operatorname{tg} x\cos^2 x}\mathrm{d}x = \int \frac{\operatorname{tg}^2 x+1}{2\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{tg} x+2}\mathrm{d}x.$$

Dacă facem schimbarea de variabilă: $x = \operatorname{tg} x$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, obținem:

$$\int \frac{1}{2+\sin x\cos x}\mathrm{d}x = \int \frac{t^2+1}{2t^2+t+2}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \int \frac{\mathrm{d}t}{2t^2+t+2} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{\left(t+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{15}{16}} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{\sqrt{15}}\cdot\operatorname{arctg}\frac{t+\frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{15}}{4}} = \frac{2}{\sqrt{15}}\operatorname{arctg}\frac{4\operatorname{tg} x+1}{\sqrt{15}}+\mathrm{C}.$$

2) $R(\cos x, \sin x) = R_1\left(\cos^2 x, \sin x\right)\cos x$, $x \in I$, unde R_1 este de asemenea, o funcție rațională de două variabile.

În acest caz facem schimbarea de variabilă $\sin x = t$. Rezultă $\mathrm{d}t = \cos x\,\mathrm{d}x$ și

$$\int R_1\left(\cos^2 x, \sin x\right)\cos x\,\mathrm{d}x = \int R_1\left(1-t^2, t\right)\mathrm{d}t = \int R_2(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exemplul 1.3.3 Să se calculeze $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}\mathrm{d}x$, $x \neq k\pi$. Dacă facem schimbarea de variabilă: $t = \sin x$, atunci $\mathrm{d}t = \cos x\,\mathrm{d}x$ și obținem:

$$\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}\mathrm{d}x = \int \frac{\cos^2 x\cdot\cos x\,\mathrm{d}x}{\sin^4 x} = \int \frac{\left(1-t^2\right)\mathrm{d}t}{t^4} = \int \left(\frac{1}{t^4}-\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t =$$

$$= -\frac{1}{3t^3}+\frac{1}{t} = -\frac{1}{3\sin^3 x}+\frac{1}{\sin x}+\mathrm{C}.$$

3) $R(\cos x, \sin x) = R_1\left(\cos x, \sin^2 x\right)\sin x$.

În acest caz se recomandă schimbarea de variabilă $\cos x = t$.

Exemplul 1.3.4 Să se calculeze $\int \cos^2 x \sin^3 x \, dx$. Dacă facem schimbarea de variabilă $\cos x = t$ obținem:

$$\int \cos^2 x \sin^3 x \, dx = \int \cos^2 x \sin^2 x \cdot \sin x \, dx = \int t^2 \left(1-t^2\right)(-dt) = \int \left(t^4 - t^2\right) dt =$$

$$= \frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3} = \frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^3 x}{3} + C .$$

1.4 PRIMITIVE DE FORMA $\int R\left(\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$

Pentru început observăm că printr-o schimbare de variabilă de forma $t = \alpha x + \beta$ se obține o primitivă de forma: $\int R_1\left(t, \sqrt{t^2+1}\right)dt$, $\int R_1\left(t, \sqrt{t^2-1}\right)dt$ sau $\int R_1\left(t, \sqrt{1-t^2}\right)dt$.

Într-adevăr, dacă $a > 0$ și $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, atunci avem:

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a}} = \sqrt{\frac{-\Delta}{4a}}\sqrt{\frac{4a^2}{-\Delta}\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + 1} .$$

Dacă facem schimbarea de variabilă

$$t = \frac{2a}{\sqrt{-\Delta}}\left(x+\frac{b}{2a}\right), \text{ atunci } x = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}\left(t - \frac{b}{\sqrt{-\Delta}}\right), \; dx = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a} dt$$

și $$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx = \int R\left[\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}\left(t-\frac{b}{\sqrt{-\Delta}}\right), \sqrt{\frac{-\Delta}{4a}}\cdot\sqrt{t^2+1}\right]\cdot\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}dt =$$

$$= \int R_1\left(t, \sqrt{t^2+1}\right)dt .$$

Celelalte două forme se obțin în cazurile $a > 0$, $\Delta > 0$, respectiv $a < 0$, $\Delta > 0$.

Pentru primitivele de forma $\int R\left(t, \sqrt{t^2+1}\right)dt$ se poate face una din următoarele schimbări de variabile:

$$\sqrt{t^2+1} = tu + 1 ; \quad \sqrt{t^2+1} = tu - 1 ; \quad \sqrt{t^2+1} = u \pm t .$$

Exemplul 1.4.1 Să se calculeze $\int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2+2x+2}}$.

Dacă facem schimbarea de variabilă $x + 1 = t$, rezultă

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{x^2+2x+2}} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{(x+1)^2+1}} = \int \frac{\mathrm{d}t}{t-1+\sqrt{t^2+1}} .$$

Facem acum o nouă schimbare de variabilă: $\sqrt{t^2+1}=u-t$. Ridicând la pătrat şi efectuând calculele obținem:

$$t=\frac{u^2-1}{2u},\ \mathrm{d}t=\frac{u^2+1}{2u^2}\mathrm{d}u \ \text{ şi } \sqrt{t^2+1}=\frac{u^2+1}{2u}.$$

Aşadar, avem:

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{t-1+\sqrt{t^2+1}} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\frac{u^2-1}{2u}-1+\frac{u^2+1}{2u}}\cdot\frac{u^2+1}{u^2}\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\int \frac{\left(u^2+1\right)\mathrm{d}u}{u^2(u-1)} =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}u}{u-1} + \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2(u-1)} = \frac{1}{2}\ln|u-1| + \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{u-1}-\frac{1}{u}-\frac{1}{u^2}\right)\mathrm{d}u =$$

$$= \ln|u-1| - \frac{1}{2}\ln|u| + \frac{1}{2u} + \mathrm{C} \quad \text{unde } u=t+\sqrt{t^2+1}=x+1+\sqrt{x^2+2x+2}.$$

Pentru primitive de forma $\int R\left(t,\sqrt{t^2-1}\right)\mathrm{d}t$ se poate face una din următoarele schimbări de variabile: $\sqrt{t^2-1}=u(t-1)$; $\sqrt{t^2-1}=u(t+1)$; $\sqrt{t^2-1}=t-u$, iar pentru primitive de forma $\int R\left(t,\sqrt{1-t^2}\right)\mathrm{d}t$, $\sqrt{1-t^2}=u(1-t)$; $\sqrt{1-t^2}=u(1+t)$; $\sqrt{1-t^2}=tu\pm 1$.

1.5. PRIMITIVE DE FORMA: $\int x^m\left(ax^n+b\right)^p \mathrm{d}x$, $m,n,q \in Q$

Acest tip de primitive este cunoscut sub numele de integrale binome. Matematicianul rus P.L. Cebâşev a arătat că aceste primitive se pot calcula numai în următoarele 3 cazuri:

Cazul 1: $p \in \mathbb{Z}$.

Dacă notăm cu r numitorul comun al numerelor m şi n şi facem schimbarea de variabilă $x = t^r$ obținem:

$$\int x^m\left(ax^n+b\right)^p \mathrm{d}x = \int t^{mr}\left(at^{nr}+b\right)^p \cdot rt^{r-1}\mathrm{d}t .$$

Deoarece $mr \in \mathbb{Z}$ şi $nr \in \mathbb{Z}$ rezultă că funcția de sub semnul integrală este rațională.

Exemplul 1.5.1 Să se calculeze $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}\left(\sqrt[4]{x}+1\right)^{10}}$, $x \in (0, \infty)$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}\left(\sqrt[4]{x}+1\right)^{10}} = \int x^{-1/2}\left(x^{1/4}+1\right)^{-10}\mathrm{d}x .$$

Aşadar avem: $m = -\dfrac{1}{2}$; $n = \dfrac{1}{4}$ şi $p = -10 \in \mathbb{Z}$.

Cum $r = 4$ facem schimbarea de variabilă $x = t^4$ şi obţinem:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}\left(\sqrt[4]{x}+1\right)^{10}} = \int \frac{4t^3\mathrm{d}t}{t^2\left(t+1\right)^{10}} = 4\int \frac{t}{\left(t+1\right)^{10}}\mathrm{d}t = 4\int \frac{\mathrm{d}t}{\left(t+1\right)^{9}} - 4\int \frac{\mathrm{d}t}{\left(t+1\right)^{10}} =$$

$$= -\frac{1}{2\left(t+1\right)^{8}} + \frac{4}{9}\cdot\frac{1}{\left(t+1\right)^{9}} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\left(\sqrt[4]{x}+1\right)^{8}} + \frac{4}{9}\cdot\frac{1}{\left(\sqrt[4]{x}+1\right)^{9}} + \mathcal{C} .$$

Cazul 2: $\dfrac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$, $p \notin \mathbb{Z}$.

Dacă notăm $u = x^n$, $x > 0$, atunci $x = u^{\frac{1}{n}}$, $\mathrm{d}x = \dfrac{1}{n}\cdot u^{\frac{1}{n}-1}\mathrm{d}u$ şi

$$\int x^m\left(ax^n+b\right)^p\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\int u^{\frac{m}{n}}\left(au+b\right)^p u^{\frac{1}{n}-1}\mathrm{d}u = \frac{1}{n}\int u^{\frac{m+1}{n}-1}\left(au+b\right)^p\mathrm{d}u .$$

În continuare facem schimbarea de variabilă $au+b = t^r$, unde r este numitorul lui p. Rezultă $u = \dfrac{1}{a}\left(t^r - b\right)$ şi

$$\int u^{\frac{m+1}{n}-1}\left(au+b\right)^p\mathrm{d}u = \int\left[\frac{1}{a}\left(t^r-b\right)\right]^{\frac{m+1}{n}-1}\cdot t^{rp}\cdot\frac{r}{a}\cdot t^{r-1}\mathrm{d}t = \int R(t)\,\mathrm{d}t .$$

Cum $\dfrac{m+1}{n} - 1 \in \mathbb{Z}$ şi $rp \in \mathbb{Z}$, rezultă că funcţia de sub semnul integralei este raţională în t.

Exemplul 1.5.2 Să se calculeze $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$, $x \in (-1,1)$.

Avem $m = 3$, $n = 2$, deci $\dfrac{m+1}{n} = 2 \in \mathbb{Z}$. Cum $p = -\dfrac{1}{2}$, vom face schimbarea de variabilă $1 - x^2 = t^2$. Rezultă $x = \sqrt{1-t^2}$, $\mathrm{d}x = \dfrac{-t}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t$ şi

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \int \frac{\left(1-t^2\right)^{3/2}}{t}\cdot\frac{-t}{\left(1-t^2\right)^{1/2}}\mathrm{d}t = \int\left(t^2-1\right)\mathrm{d}t = \frac{t^3}{3}-t =$$

$$= \frac{\left(1-x^2\right)\sqrt{1-x^2}}{3} - \sqrt{1-x^2} + \mathrm{C}\ .$$

Cazul 3: $\frac{m+1}{n}+p \in \mathbb{Z}$; $\frac{m+1}{n} \notin \mathbb{Z}$; $p \notin \mathbb{Z}$.

Se poate arăta, aşa cum s-a procedat şi în cazul 2, că dacă facem schimbarea de variabilă $\frac{ax^n+b}{x^n} = t^r$, $x \neq 0$, unde r este numitorul lui p, problema se reduce la calculul primitivei unei funcţii raţionale.

Exemplul 1.5.3 Să se calculeze $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}$, $x > 0$.

Avem $m = -2$; $n = 2$ şi $p = 3/2$. Evident $\frac{m+1}{n}+p = -2 \in \mathbb{Z}$. Facem schimbarea de variabilă $1+x^2 = t^2x^2$, $x > 0$ şi obţinem $x = \frac{1}{\sqrt{t^2-1}}$,

$$\mathrm{d}x = \frac{-t}{\left(t^2-1\right)^{3/2}}\mathrm{d}t\ ,\ \int\frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}} = \int\left(t^2-1\right)\frac{\left(t^2-1\right)^{3/2}}{t^3}\cdot\frac{-t}{\left(t^2-1\right)^{3/2}}\mathrm{d}t =$$

$$= \int\frac{1-t^2}{t^2}\mathrm{d}t = -\frac{1}{t}-t = -\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + \mathrm{C}\ .$$

În încheierea acestui capitol, prezentăm o listă de primitive care nu se pot exprima prin funcţii elementare.

$E_i(x) = \int\frac{e^x}{x}\mathrm{d}x$; $S_i(x) = \int\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$; $C_i(x) = \int\frac{\cos x}{x}\mathrm{d}x$; $\mathrm{Sh}_i(x) = \int\frac{\mathrm{sh}x}{x}\mathrm{d}x$;

$\mathrm{Ch}_i(x) = \int\frac{\mathrm{ch}x}{x}\mathrm{d}x$; $S(x) = \int\sin x^2\,\mathrm{d}x$; $C(x) = \int\cos x^2\,\mathrm{d}x$; $\phi(x) = \int e^{-x^2}\mathrm{d}x$;

$L_i(x) = \int\frac{\mathrm{d}x}{\ln x}$.

CAPITOLUL 2

INTEGRALA RIEMANN

2.1 SUME DARBOUX. CRITERIUL DE INTEGRABILITATE DARBOUX

Definiția 2.1.1 *Se numeşte diviziune a intervalului* $[a, b]$ *orice submulțime* $\Delta = \{x_0, x_1, \dots, x_i, \dots, x_n\} \subset [a, b]$ *astfel încât*

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_n = b \ .$$

Numărul $\|\Delta\| = \max\limits_{1 \le i \le n} (x_i - x_{i-1})$ se numeşte norma diviziunii Δ. Spunem că diviziunea Δ' este mai fină decât diviziunea Δ şi notăm $\Delta \prec \Delta'$ dacă Δ' conține pe lângă punctele diviziunii Δ şi alte puncte.

În continuare, pentru orice funcție $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, mărginită, notăm cu:

$m = \inf\{f(x); x \in [a,b]\}$, $M = \sup\{f(x); x \in [a,b]\}$,

$m_i = \inf\{f(x); x \in [x_{i-1}, x_i]\}$, $M_i = \sup\{f(x); x \in [x_{i-1}, x_i]\}$.

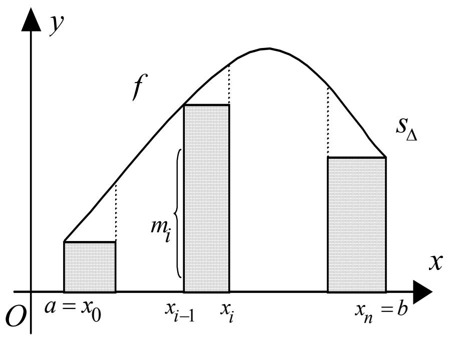
Evident au loc inegalitățile:

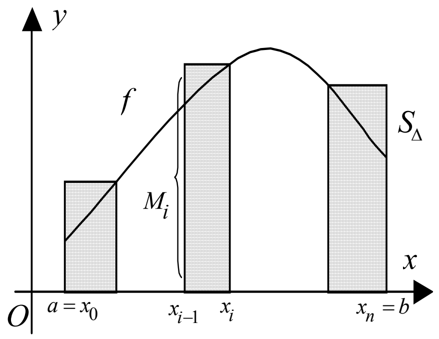
$$m \le m_i \le M_i \le M \ , \ \ \forall \ \ i = \overline{1,n} \qquad (1)$$

Suma Darboux inferioară (superioară) se defineşte astfel:

$$s_\Delta = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1}), \text{ respectiv } S_\Delta = \sum_{i=1}^{n} M_i (x_i - x_{i-1}).$$

Din punct de vedere geometric, aceste sume reprezintă ariile evidențiate în figură.





Din (1) rezultă că pentru orice diviziune Δ avem:

$$m(b-a) \le s_\Delta \le S_\Delta \le M(b-a) \qquad (2)$$

Lema 21.1 *Dacă* $\Delta \prec \Delta'$, atunci $s_\Delta \le s_{\Delta'} \le S_{\Delta'} \le S_\Delta$.

Demonstrație.

Fie Δ : $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_n = b$. Presupunem că diviziunea Δ' conține pe lângă punctele diviziunii Δ, un singur punct în plus şi anume, punctul *c*, situat între x_{i-1} şi x_i.

Fie $m_i' = \inf\{f(x); x \in [x_{i-1}, c]\}$ şi $m_i'' = \inf\{f(x); x \in [c, x_i]\}$.

Deoarece $m_i \le m_i'$ şi $m_i \le m_i''$, rezultă

$$s_{\Delta'} - s_\Delta = m_i'(c - x_{i-1}) + m_i''(x_i - c) - m_i(x_i - x_{i-1}) \ge$$
$$\ge m_i(c - x_{i-1} + x_i - c) - m_i(x_i - x_{i-1}) = 0 .$$

Aşadar, am arătat că $s_\Delta \le s_{\Delta'}$. Evident, dacă presupunem că diviziunea Δ' conține pe lângă punctele diviziunii Δ mai multe puncte (distincte) $c_1, \ldots, c_p$, raționamentul este asemănător.

Demonstrația inegalității $S_{\Delta'} \le S_\Delta$ este analoagă şi rămâne în seama cititorului.

Lema 2.1.2 *Pentru orice două diviziuni* Δ' *şi* Δ'' *ale intervalului* [*a*, *b*], *avem* $s_{\Delta'} \le S_{\Delta''}$.

Demonstrație.

Fie $\overline{\Delta} = \Delta' \cup \Delta''$ diviziunea care constă din reuniunea punctelor diviziunilor Δ' şi Δ''. Evident avem $\Delta' \prec \overline{\Delta}$ şi $\Delta'' \prec \overline{\Delta}$. Din Lema 2.1.1 rezultă: $s_{\Delta'} \le s_{\overline{\Delta}} \le S_{\overline{\Delta}} \le S_{\Delta'}$.

Din inegalitățile (2) rezultă că mulțimea de numere reale $\{s_\Delta\}_\Delta$ este majorată de numărul *M*(*b* – *a*), iar mulțimea de numere reale $\{S_\Delta\}_\Delta$ este minorată de numărul *m*(*b* – *a*).

Notăm cu $I_* = \sup\limits_\Delta s_\Delta$ şi cu $I^* = \inf\limits_\Delta S_\Delta$. I^* se numeşte integrala superioară iar I_* se numeşte integrala inferioară.

Lema 2.1.3 $I_* \le I^*$.

Demonstrație. Din Lema 2.1.2 rezultă că: $s_{\Delta'} \le S_{\Delta''}$, oricare ar fi diviziunile Δ' şi Δ''. Fixând pentru moment diviziunea Δ'' obținem: $I_* = \sup\limits_{\Delta'} s_{\Delta'} \le S_{\Delta''}$. Cum Δ'' a fost arbitrară, în continuare avem $I_* \le \inf\limits_{\Delta''} S_{\Delta''} = I^*$.

Definiția 2.1.2 *Fie* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *o funcție mărginită. Spunem că* f *este* (D)-*integrabilă* (*integrabilă în sensul lui Darboux*) *pe* $[a, b]$ *dacă* $I_* = I^* = I$.

Valoarea comună I o notăm cu $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Lema 2.1.4 *Pentru orice* $\varepsilon > 0$, *există* $\delta_\varepsilon > 0$ *astfel încât oricare diviziune* Δ *a intervalului* $[a, b]$ *cu* $\|\Delta\| < \delta_\varepsilon$ *avem:*

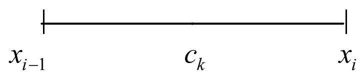
$$I_* - \varepsilon < s_\Delta \le S_\Delta < I^* + \varepsilon \tag{4}$$

Demonstrație.

Vom demonstra inegalitatea $I_* - \varepsilon < s_\Delta$, lăsând în seama cititorului demonstrația celeilalte inegalități. Deoarece $I_* = \sup\limits_{\Delta} s_\Delta$ rezultă că $\forall\ \varepsilon > 0$ există o diviziune Δ_0 a intervalului $[a, b]$ astfel încât: $I_* - \dfrac{\varepsilon}{2} < s_{\Delta_0}$.

Să presupunem că $\Delta_0 : a = c_0 < c_1 < \ldots < c_k < \ldots < c_p = b$.

Fie $\mu = \min\limits_{1 \le k \le p} \left(c_k - c_{k-1}\right)$ şi fie $\Delta\ :\ a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_n = b$ o diviziune a intervalului $[a, b]$ cu $\|\Delta\| < \mu$. Dacă notăm cu $\overline{\Delta} = \Delta_0 \cup \Delta$, atunci în intervalul $\left[x_{i-1}, x_i\right]$ se află cel mult un punct c_k din diviziunea Δ_0.



Fie $m_i' = \inf\left\{f(x); x \in \left[x_{i-1}, c_k\right]\right\}$ şi $m_i'' = \inf\left\{f(x); x \in \left[c_k, x_i\right]\right\}$. Contribuția subintervalului $\left[x_{i-1}, x_i\right]$ în diferența $s_{\overline{\Delta}} - s_\Delta$ va fi

$$m_i'\left(c_k - x_{i-1}\right) + m_i''\left(x_i - c_k\right) - m_i\left(x_i - x_{i-1}\right)$$

şi este evident majorată de $\left(M - m\right)\left(x_i - x_{i-1}\right)$. Cum în diviziunea $\overline{\Delta}$ există $(p - 1)$ puncte interioare c_k rezultă că avem următoarea majorare:

$$s_{\overline{\Delta}} - s_\Delta \le \left(p - 1\right)\left(M - m\right)\|\Delta\| \tag{5}$$

Fie acum $\delta_\varepsilon = \min\left\{\mu; \frac{\varepsilon}{2(p-1)(M-m)}\right\}$, fie Δ o diviziune a intervalului $[a, b]$ cu $\|\Delta\| < \delta_\varepsilon$ şi fie $\overline{\Delta} = \Delta_0 \cup \Delta$. Cum $\delta_\varepsilon \leq \mu$ rezultă că $\|\Delta\| < \mu$ şi conform (5) avem:

$$s_{\overline{\Delta}} - s_\Delta \leq (p-1)(M-m)\|\Delta\| < (p-1)(M-m)\frac{\varepsilon}{2(p-1)(M-m)} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Aşadar avem $I_* - \frac{\varepsilon}{2} < s_{\Delta_0} \leq s_{\overline{\Delta}} \leq s_\Delta + \frac{\varepsilon}{2}$, deci $I_* - \varepsilon \leq s_\Delta$.

Cu aceasta lema este demonstrată.

Teorema 2.1.1 (Criteriul de integrabilitate al lui Darboux)

Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ mărginită. Condiția necesară şi suficientă ca f să fie integrabilă pe $[a, b]$ este ca pentru orice $\varepsilon > 0$, să existe $\delta_\varepsilon > 0$, astfel încât oricare ar fi diviziunea Δ a intervalului $[a, b]$, cu $\|\Delta\| < \delta_\varepsilon$, să avem $S_\Delta - s_\Delta < \varepsilon$.

Demonstrație.

Necesitatea. Presupunem că $I_* = I^* = I$. Din Lema 2.1.4 rezultă că $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ \delta_\varepsilon > 0$ astfel încât $I - \frac{\varepsilon}{2} < s_\Delta \leq S_\Delta < I + \frac{\varepsilon}{2}$, pentru $\forall\ \Delta$ cu $\|\Delta\| < \delta_\varepsilon$. Evident, $S_\Delta - s_\Delta < \left(I + \frac{\varepsilon}{2}\right) - \left(I - \frac{\varepsilon}{2}\right) = \varepsilon$. Aşadar $S_\Delta - s_\Delta < \varepsilon$ pentru orice Δ cu $\|\Delta\| < \delta_\varepsilon$.

Suficiența. Presupunem că $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ \delta_\varepsilon > 0$ astfel încât, oricare ar fi Δ cu $\|\Delta\| < \delta_\varepsilon$ avem $S_\Delta - s_\Delta < \varepsilon$.

Deoarece $s_\Delta \leq I_* \leq I^* \leq S_\Delta$, rezultă că $0 \leq I^* - I_* \leq S_\Delta - s_\Delta < \varepsilon$.

Cum $\varepsilon > 0$ este arbitrar, aceasta implică $I^* - I_* = 0$, deci *f* este integrabilă pe $[a, b]$.

2.2. CLASE DE FUNCȚII INTEGRABILE

Teorema 2.1.1 *Dacă f : $[a, b] \to \mathbb{R}$ este continuă, atunci f este integrabilă pe* $[a, b]$.

Demonstrație. Fie Δ : $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_n = b$ o diviziune oarecare a intervalului $[a, b]$. Deoarece, o funcție continuă pe un interval compact

este mărginită şi îşi atinge marginile rezultă că $\exists\ \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ şi $\eta_i \in [x_{i-1}, x_i]$ astfel încât $m_i = f(\xi_i)$ şi $M_i = f(\eta_i)$. Aşadar, avem

$$S_\Delta - s_\Delta = \sum_{i=1}^{n} \left[f(\eta_i) - f(\xi_i) \right](x_i - x_{i-1}).$$

Pe de altă parte, f este uniform continuă pe $[a, b]$, deci $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ \delta_\varepsilon > 0$ astfel încât oricare ar fi $x', x'' \in [a,b]$ cu $|x' - x''| < \delta_\varepsilon$, avem $|f(x') - f(x'')| < \dfrac{\varepsilon}{b-a}$.

Dacă presupunem acum că $\|\Delta\| < \delta_\varepsilon$ rezultă $|\eta_i - \xi_i| \le x_i - x_{i-1} \le \|\Delta\| < \delta_\varepsilon$ deci

$$S_\Delta - s_\Delta < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon.$$

Aşadar, $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ \delta_\varepsilon > 0$ (cel de la continuitatea uniformă) astfel încât $\forall\ \Delta$ cu $\|\Delta\| < \delta_\varepsilon$ avem $S_\Delta - s_\Delta < \varepsilon$. Din Teorema 2.1.1 rezultă că f este integrabilă pe $[a, b]$.

Teorema 2.2.2 *Dacă $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este monotonă, atunci f este integrabilă pe $[a, b]$.*

Demonstraţie.

Vom face demonstraţia pentru cazul când f este crescătoare şi nu se reduce la o constantă. Cazul când f este descrescătoare se tratează asemănător. Dacă f se reduce la o constantă, adică $f(x) = c$, $\forall\ x \in [a,b]$, atunci $s_\Delta = S_\Delta = c(b-a)$, $\forall\ \Delta$ deci $I_* = I^* = c(b-a)$.

Fie deci f crescătoare, astfel încât $f(a) < f(b)$ şi fie

$\Delta : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_n = b$ o diviziune oarecare a intervalului $[a, b]$. Deoarece f este crescătoare, avem $m_i = f(x_{i-1})$ şi $M_i = f(x_i)$, deci

$$S_\Delta - s_\Delta = \sum_{i=1}^{n} \left(f(x_i) - f(x_{i-1}) \right)(x_i - x_{i-1}).$$

Fie $\varepsilon > 0$ şi fie $\delta_\varepsilon = \dfrac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}$. Dacă presupunem că $\|\Delta\| < \delta_\varepsilon$, atunci vom avea $S_\Delta - s_\Delta < \delta_\varepsilon \sum_{i=1}^{n} \left(f(x_i) - f(x_{i-1}) \right) < \dfrac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} [f(b) - f(a)] = \varepsilon$.

Aşadar, $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ \delta_\varepsilon > 0$ astfel încât $\forall\ \Delta$ cu $\|\Delta\| < \delta_\varepsilon$ avem $S_\Delta - s_\Delta < \varepsilon$. Din Teorema 2.1.1 rezultă că f este integrabilă pe $[a, b]$.

2.3. SUME RIEMANN. CRITERIUL DE INTEGRABILITATE RIEMANN

Fie $f: [a, b] \to \mathbb{R}$, $\Delta : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_n = b$ o diviziune a intervalului [*a*, *b*] şi $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ un punct oarecare. Dacă notăm cu $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, atunci suma Riemann asociată funcţiei *f*, diviziunii Δ şi punctelor intermediare ξ_i, se notează cu $\sigma_\Delta(f;\xi)$ şi este prin definiţie

$$\sigma_\Delta(f;\xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Definiţia 2.3.1 *Fie* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. *Spunem că f este* (*R*)-*integrabilă* (*integrabilă în sensul lui Riemann*) *pe* [*a, b*] *dacă există un număr finit I, astfel încât* $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ \delta_\varepsilon > 0$ *cu proprietatea că oricare ar fi diviziunea* Δ, *cu* $\|\Delta\| < \delta_\varepsilon$ *şi oricare ar fi punctele intermediare* $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, *avem* $|\sigma_\Delta(f;\xi) - I| < \varepsilon$.

Teorema 2.3.1 *Dacă f este* (*R*)-*integrabilă pe* [*a*, *b*], *atunci f este mărginită pe* [*a*, *b*].

Demonstraţie.

Prin ipoteză, există $I \in \mathbb{R}$, astfel încât pentru $\varepsilon = 1$, există $\delta_1 > 0$ cu proprietatea că oricare ar fi Δ cu $\|\Delta\| < \delta_1$ şi oricare ar fi punctele intermediare ξ_i avem:

$$I - 1 < \sigma_\Delta(f;\xi) < I + 1 \tag{1}$$

Fie $\Delta : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_n = b$ cu $\|\Delta\| < \delta_1$ şi fie $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = \overline{1,n}$.

Presupunem prin absurd că *f* nu este mărginită pe [*a*, *b*]. Atunci, există un subinterval $[x_{j-1}, x_j]$ astfel încât *f* nu este mărginită pe $[x_{j-1}, x_j]$. Pentru a face o alegere, să presupunem că $\sup\{f(x); x \in [x_{j-1}, x_j]\} = +\infty$. Cum *f* nu este mărginită superior pe intervalul $[x_{j-1}, x_j]$, rezultă că există $\overline{\xi}_j \in [x_{j-1}, x_j]$ astfel încât $f(\overline{\xi}_j) > \dfrac{I - s + 1}{x_j - x_{j-1}}$, unde am notat cu $s = \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$.

Fie $\overline{\xi}_i = \begin{cases} \xi_i & \text{dacă } i \neq j \\ \overline{\xi}_i & \text{dacă } i = j \end{cases}$ şi $\overline{\xi} = (\overline{\xi}_1, \ldots, \overline{\xi}_n)$. Rezultă

$$\sigma_\Delta\left(f;\overline{\xi}\right)=s+f\left(\overline{\xi}_j\right)\left(x_j-x_{j-1}\right)>s+\frac{I-s+1}{x_j-x_{j-1}}\left(x_j-x_{j-1}\right)=I+1$$

Aşadar $\sigma_\Delta\left(f;\overline{\xi}\right)>I+1$ ceea ce contrazice (1). Prin urmare, ipoteza că *f* nu e mărginită pe [*a*, *b*] ne conduce la o contradicție.

Următoarea teoremă ne arată că cele două definiții ale integrabilității sunt echivalente.

Teorema 2.3.2 *Fie f* : [*a*, *b*] $\to \mathbb{R}$ *mărginită. Atunci f este* (*D*)*-integrabilă pe* [*a*, *b*] *dacă şi numai dacă f este* (*R*)*-integrabilă pe* [*a*, *b*].

Demonstrație.

Dacă *f* este (*D*)-integrabilă pe [*a*, *b*], atunci $I_*=I^*=I$. Pe de altă parte, din Teorema 2.1.1. rezultă că $\forall\ \varepsilon>0$, $\exists\ \delta_\varepsilon>0$ astfel încât oricare ar fi diviziunea Δ cu $\|\Delta\|<\delta_\varepsilon$ avem $S_\Delta-s_\Delta<\varepsilon$.

Cum $s_\Delta\le I\le S_\Delta$ şi $s_\Delta\le\sigma_\Delta\left(f,\xi\right)\le S_\Delta$, $\forall\,\xi$, rezultă că $\left|\sigma_\Delta\left(f,\xi\right)-I\right|<\varepsilon$ pentru orice Δ cu $\|\Delta\|<\delta_\varepsilon$ şi orice puncte intermediare ξ_i, deci *f* este (*R*)-integrabilă.

Reciproc, să presupunem că *f* este (*R*)-integrabilă. Atunci există $I\in\mathbb{R}$ cu proprietatea că, pentru $\varepsilon>0$, $\exists\ \delta_\varepsilon>0$ astfel încât $\forall\ \Delta$ cu $\|\Delta\|<\delta_\varepsilon$ şi $\forall\,\xi$ avem:

$$I-\frac{\varepsilon}{4}<\sigma_\Delta\left(f;\xi\right)<I+\frac{\varepsilon}{4} \tag{2}$$

Fie $\Delta: a=x_0<x_1<\ldots<x_{i-1}<x_i<\ldots<x_n=b$ cu $\|\Delta\|<\delta_\varepsilon$. Deoarece $M_i=\sup\left\{f(x);x\in\left[x_{i-1},x_i\right]\right\}$, rezultă că există $\alpha_i\in\left[x_{i-1},x_i\right]$ astfel încât

$$M_i-\frac{\varepsilon}{4\left(b-a\right)}<f\left(\alpha_i\right) \tag{3}$$

Amplificând inegalitatea (3) cu $\left(x_i-x_{i-1}\right)$ şi sumând rezultă:

$$S_\Delta-\frac{\varepsilon}{4}<\sum_{i=1}^{n}f\left(\alpha_i\right)\left(x_i-x_{i-1}\right)=\sigma_\Delta\left(f;\alpha\right),\ \text{unde}\ \alpha=\left(\alpha_1,\ldots,\alpha_n\right).$$

Ținând seama acum şi de (2) obținem:

$$S_\Delta<I+\frac{\varepsilon}{2} \tag{4}$$

În mod asemănător se arată că

$$s_\Delta>I-\frac{\varepsilon}{2} \tag{5}$$

Din (4) şi (5) rezultă că $S_\Delta-s_\Delta<\varepsilon$, pentru orice Δ cu $\|\Delta\|<\delta_\varepsilon$, deci *f* este (*D*)-integrabilă, conform Teoriei 2.1.1.

Teorema 2.3.3 (Criteriul de integrabilitate al lui Riemann)

Condiția necesară și suficientă ca f : $[a, b] \to \mathbb{R}$ *să fie integrabilă pe* $[a, b]$, *este să existe un număr finit I, astfel încât pentru orice șir de diviziuni* $\{\Delta_n\}$ *ale intervalului* $[a, b]$ *cu proprietatea că* $\lim\limits_{n\to\infty} \|\Delta_n\| = 0$ *și orice alegere a punctelor intermediare* $\xi^{(n)}$ *să avem* $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_{\Delta_n}\left(f;\xi^{(n)}\right) = I$.

Demonstrație.

Necesitatea. Prin ipoteză există $I \in \mathbb{R}$ astfel încât $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ \delta_\varepsilon > 0$ cu proprietatea că $\forall\ \Delta$ cu $\|\Delta\| < \delta_\varepsilon$ și $\forall\ \xi$ avem $\left|\sigma_\Delta(f;\xi) - I\right| < \varepsilon$.

Fie $\{\Delta_n\}$ un șir de diviziuni cu $\|\Delta_n\| \to 0$. Atunci $\exists$ un rang $n_0 \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\|\Delta_n\| < \delta_\varepsilon$ pentru orice $n \geq n_0$. Conform ipotezei avem $\left|\sigma_{\Delta_n}\left(f,\xi^{(n)}\right) - I\right| < \varepsilon$ pentru orice $n \geq n_0$ și orice set de puncte intermediare $\xi^{(n)}$ corespunzător diviziunii Δ_n . Rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_{\Delta_n}\left(f;\xi^{(n)}\right) = I$.

Suficiență. Presupunem că există $I \in \mathbb{R}$ cu proprietatea că pentru orice șir de diviziuni $\{\Delta_n\}$ cu $\|\Delta_n\| \to 0$ și orice set de puncte intermediare $\xi^{(n)}$ avem
$\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_{\Delta_n}\left(f;\xi^{(n)}\right) = I$.

Presupunem prin absurd că *f* nu este integrabilă, deci că oricare ar fi numărul finit *I*, există $\varepsilon_0 > 0$ astfel încât $\forall\ \delta > 0$, $\exists\ \Delta_\delta$ cu $\|\Delta_\delta\| < \delta$ și există un set de puncte intermediare ξ^δ astfel încât $\left|\sigma_{\Delta_\delta}\left(f,\xi^\delta\right) - I\right| \geq \varepsilon_0$.

În particular, pentru $\delta = \dfrac{1}{n}$ rezultă că $\exists\ \Delta_n$ cu $\|\Delta_n\| < \dfrac{1}{n}$ și $\xi^{(n)}$ astfel încât $\left|\sigma_{\Delta_n}\left(f,\xi^{(n)}\right) - I\right| \geq \varepsilon_0$. Aceasta înseamnă că $\sigma_{\Delta_n}\left(f,\xi^{(n)}\right) \not\to I$, ceea ce contrazice ipoteza făcută.

Definiția 2.3.2 *Spunem că o mulțime* $A \subset \Upsilon$ *este neglijabilă* (*de măsură Lebesque nulă*), dacă $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists$ *un șir de intervale deschise* $\left(I_n\right)_{n\geq 1}$ *cu următoarele proprietăți* :

a) $A \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} I_n$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} l\left(I_n\right) < \varepsilon$, *unde cu* $l\left(I_n\right)$ *am notat lungimea intervalului* I_n .

Precizăm că unele din intervalele I_n pot să fie mulțimea vida $\varnothing$.

Propoziția 2.3.1. *Orice mulțime care se reduce la un punct este neglijabilă*

Demonstrație.

Fie $A = \{x_0\}$. Putem alege $I_1 = \left(x_0 - \frac{\varepsilon}{3}, x_0 + \frac{\varepsilon}{3}\right)$ şi $I_n = \varnothing$ pentru $n \geq 2$. Evident $A \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} I_n$ şi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} l(I_n) < \varepsilon$.

Următoarea afirmație este evidentă:

Propoziția 2.3.2 *Dacă $A \subset B$ şi B este neglijabilă, rezultă că A este neglijabilă.*

Propoziția 2.3.3 *O reuniune numărabilă de mulțimi neglijabile este de asemenea neglijabilă.*

Demonstrație.

Fie $A_n \subset \mathbb{R}^2$ neglijabilă, $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$. Rezultă că pentru $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists$ un şir de intervale deschise $\left(I_{nm}\right)_{m\geq 1}$ cu proprietățile: $A \subset \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} I_{nm}$ şi $\sum\limits_{m=1}^{\infty} l\left(I_{nm}\right) < \frac{\varepsilon}{2^n}$.

În continuare avem: $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\left(\bigcup\limits_{m=1}^{\infty} I_{nm}\right)$ şi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sum\limits_{m=1}^{\infty} l\left(I_{nm}\right) < \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon$, deci, mulțimea $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ este neglijabilă.

Corolarul 2.3.1 *Orice mulțime finită sau numărabilă din $\mathbb{R}$ este neglijabilă.*

Afirmația rezultă din Propozițiile 2.3.1 şi 2.3.3.

În continuare prezentăm fără demonstrație următoarea teoremă.

Teorema 2.3.4 (Criteriul de integrabilitate al lui Lebesque)

Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Condiția necesară şi suficientă ca f să fie integrabilă pe $[a, b]$ este ca f să fie mărginită pe $[a, b]$ şi mulțimea punctelor sale de discontinuitate să fie neglijabilă.

2.4. PROPRIETĂȚILE INTEGRALEI RIEMANN

2.4.1. $\int_a^b 1\,\mathrm{d}x = b - a$.

Afirmația rezultă imediat din observația că orice sumă Riemann $\sigma_\Delta(1;\xi) = b - a$

2.4.2. Proprietatea de linearitate

Dacă f, g : $[a, b] \to \mathbb{R}$ sunt integrabile, atunci funcția $\alpha f + \beta g$ este integrabilă pe $[a, b]$ şi

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x)\,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x .$$

Demonstrație.

Fie $\{\Delta_n\}$ un şir de diviziuni cu proprietatea că $\lim\limits_{n\to\infty} \|\Delta_n\| = 0$ şi fie $\xi^{(n)}$ un set de puncte intermediare oarecare pentru diviziunea Δ_n. Avem:

$$\sigma_{\Delta_n}\left(\alpha f + \beta g; \xi^{(n)}\right) = \alpha \sigma_{\Delta_n}\left(f; \xi^{(n)}\right) + \beta \sigma_{\Delta_n}\left(g; \xi^{(n)}\right).$$

Deoarece membrul drept are limită finită când $n \to \infty$ şi anume $\alpha \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + {}$ $+ \beta \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$, rezultă că şi membrul stâng are limită finită, deci $\alpha f + \beta g$ este integrabilă şi în plus $\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x)\,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

2.4.3. Proprietatea de monotonie

Dacă f şi g sunt integrabile pe $[a, b]$ şi $f(x) \le g(x)$, $\forall\ n \in [a, b]$, atunci $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

Afirmația rezultă imediat din observația că $\int_a^b [g(x) - f(x)]\,\mathrm{d}x \ge 0$ şi din proprietatea de linearitate a integralei Riemann.

2.4.4. Dacă f este integrabilă pe $[a, b]$, atunci $|f|$ este integrabilă pe $[a, b]$ şi $\left| \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \right| \le \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

Fie A mulțimea punctelor de discontinuitate ale funcției $|f|$ din intervalul $[a, b]$ şi B mulțimea punctelor de discontinuitate ale lui f din intervalul $[a, b]$. Se ştie că dacă f este continuă într-un punct, atunci $|f|$ este continuă în acel punct. Aşadar, avem $A \subset B$. Conform Teoremei 2.3.4, B este neglijabilă. Rezultă atunci că şi A este neglijabilă, deci că $|f|$ este integrabilă.

Pe de altă parte avem:

$-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$, $\forall\ x \in [a, b]$.

Din Proprietatea 3) de monotonie a integralei, rezultă că

$-\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x \le \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$ deci $\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \le \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

2.4.5. Dacă f şi g sunt integrabile pe $[a, b]$, atunci fg este integrabilă pe $[a, b]$. Într-adevăr, fie $A/B/C$ mulţimea punctelor de discontinuitate ale lui f /g/ fg. Se ştie că dacă f şi g sunt continue într-un punct, atunci fg este continuă în acest punct. Rezultă că $C \subset A$ Y B. Cum A şi B sunt neglijabile, rezultă că $A \cup B$ este neglijabilă, deci C este neglijabilă. Conform Teoremei 2.3.4 rezultă că fg este continuă pe $[a, b]$.

2.4.6. Teorema de medie

Fie f şi g două funcţii integrabile pe $[a, b]$. Presupunem că g păstrează semn constant pe $[a, b]$. Dacă notăm cu $m = \inf\{f(x); x \in [a,b]\}$ şi cu $M = \sup\{f(x); x \in [a,b]\}$, atunci există $m \le \mu \le M$ astfel încât

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \mu \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \tag{1}$$

Demonstraţie.

Presupunem că $g(x) \ge 0$, $\forall\ x \in [a, b]$. Deoarece $m \le f(x) \le M$, $\forall\ x \in [a, b]$ rezultă $mg(x) \le f(x)g(x) \le Mg(x)$, $\forall\ x \in [a, b]$.

Din Proprietăţile 2) şi 3) avem

$$m \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \le \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \le M \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \tag{2}$$

Dacă $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = 0$, atunci şi $\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = 0$ şi egalitatea (1) are loc pentru orice $\mu \in \mathbb{R}$.

Să presupunem că $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \ne 0$. Cum $g \ge 0$ rezultă $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x > 0$.

Împărţind inegalitatea (2) cu $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ obţinem: $m \le \dfrac{\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x} \le M$.

Dacă notăm cu $\mu = \dfrac{\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x}$, rezultă că $m \le \mu \le M$, deci

$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \mu \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

Corolarul 2.4.1 *Fie* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *continuă şi* $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ *integrabilă. Dacă g păstrează semn constant pe* $[a,b]$*, atunci există* $\xi\in[a,b]$ *astfel încât*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Demonstrație.

Deoarece f este continuă pe $[a,b]$, rezultă că există $\alpha,\beta\in[a,b]$ astfel încât $m=f(\alpha)$ şi $M=f(\beta)$. Din Teorema de medie, ştim că există $m\le\mu\le M$ astfel încât $\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x=\mu\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$. Pe de altă parte, f are proprietatea Darboux pe $[a,b]$, deci există ξ între α şi β, deci în $[a,b]$, astfel încât $\mu=f(\xi)$. Aşadar avem

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Corolarul 2.4.2 *Dacă* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *este integrabilă, atunci există* $m\le\mu\le M$ *astfel încât* $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\mu(b-a)$.

Afirmația rezultă imediat din Teorema de medie pentru cazul particular când $g=1$.

Corolarul 2.4.3 *Dacă* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *este continuă, atunci există* $\xi\in[a,b]$ *astfel încât* $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=f(\xi)(b-a)$.

Afirmația rezultă imediat din Corolarul 2.4.1, pentru cazul particular când $g=1$.

2.4.7. Dacă f este integrabilă pe $[a,b]$ şi $a<c<b$, atunci f este integrabilă pe $[a,c]$ şi $[c,b]$ şi $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Demonstrație.

Faptul că f este integrabilă pe $[a,b]$ şi $[c,b]$ rezultă imediat din Teorema 2.3.4.

Fie $\{\Delta_n'\}$ un şir de diviziuni ale intervalului $[a,c]$ cu $\|\Delta_n'\|\to 0$ şi fie $\{\Delta_n''\}$ un şir de diviziuni ale intervalului $[c,b]$ cu $\|\Delta_n''\|\to 0$. Dacă notăm cu $\Delta_n=\Delta_n'\cup\Delta_n''$, atunci Δ_n este o diviziune a intervalului $[a,b]$ şi $\|\Delta_n\|\to 0$.

Fie de asemenea $\alpha^{(n)}\left(\beta^{(n)}\right)$ un set de puncte intermediare pentru diviziunea Δ_n' (respectiv Δ_n''). Dacă notăm cu $\xi^{(n)}=\alpha^{(n)}\cup\beta^{(n)}$, atunci $\xi^{(n)}$ este un set de puncte intermediare pentru Δ_n.

Trecând la limită după n în egalitatea

$\sigma_{\Delta_n}\left(f;\xi^{(n)}\right)=\sigma_{\Delta_n'}\left(f;\alpha^{(n)}\right)+\sigma_{\Delta_n''}\left(f;\beta^{(n)}\right)$, rezultă că

$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Următoarea teoremă ne asigură că orice funcție continuă pe un interval admite primitive pe acel interval.

Teorema 2.4.8 *Fie* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *continuă și fie* $F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$, $\forall\, x\in[a,b]$. *Atunci* f *este derivabilă pe* (a,b) și $F'(x)=f(x)$, $\forall\, x\in(a,b)$.

Demonstrație.

Fie $x_0\in(a,b)$ oarecare. Să observăm pentru început că $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t-$ $-\int_a^{x_0} f(t)\,\mathrm{d}t=\int_{x_0}^x f(t)\,\mathrm{d}t$. Într-adevăr, dacă $x_0<x$ atunci afirmația rezultă din egalitatea $\int_a^x=\int_a^{x_0}+\int_{x_0}^x$. Dacă $x<x_0$, atunci $\int_a^{x_0}=\int_a^x+\int_x^{x_0}$ deci $\int_a^x-\int_a^{x_0}=-\int_x^{x_0}=\int_{x_0}^x$.

Așadar, avem $\dfrac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}=\dfrac{\int_{x_0}^x f(t)\,\mathrm{d}t}{x-x_0}$.

Conform Corolarului 2.4.3 rezultă că $\exists\,\xi$ în intervalul închis de capete x_0 și x astfel încât $\int_{x_0}^x f(t)\,\mathrm{d}t=f(\xi)(x-x_0)$. Cum f este continuă în x_0, în continuare avem:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0} f(\xi)=f(x_0),\ \text{deci}\ \ F'(x_0)=f(x_0).$$

Teorema 2.4.9 (Leibniz-Newton)

Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *integrabilă. Dacă* F *este o primitivă a lui* f *pe* $[a,b]$, *atunci* $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=F(b)-F(a)$.

Demonstrație.

Fie $\Delta: a=x_0<x_1<\ldots<x_{i-1}<x_n=b$ o diviziune oarecare a intervalului $[a,b]$. Observăm că $F(b)-F(a)=\sum_{i=1}^{n}\left[F(x_i)-F(x_{i-1})\right]$.

Pe de altă parte, din Teorema Lagrange rezultă că există $\xi_i\in(x_{i-1},x_i)$ astfel încât:

$$F(x_i)-F(x_{i-1})=F'(\xi_i)(x_i-x_{i-1})=f(\xi_i)(x_i-x_{i-1}).$$

Dacă notăm cu $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ obținem:

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \sigma_{\Delta}(f; \xi).$$

Fie $\{\Delta_n\}$ un şir de diviziuni de normă tinzând la zero şi fie $\xi^{(n)}$ setul de puncte intermediare pentru Δ_n care rezultă din Teorema Lagrange. Rezultă:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \sigma_{\Delta_n}\left(f; \xi^{(n)}\right) = F(b) - F(a),$$

CAPITOLUL 3

INTEGRALE GENERALIZATE ŞI CU PARAMETRU

3.1. INTEGRALE GENERALIZATE

Teoria integralei definite s-a făcut pentru funcţii mărginite, definite pe intervale mărginite. În cele ce urmează vom da un sens unor integrale de forma $\int_a^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ sau $\int_a^{b} f(x)\mathrm{d}x$, unde b este finit şi f este nemărginită pe $[a, b]$. Vom trata ambele cazuri unitar.

Definiţia 3.1.1 *Fie $f : [a, b) \to \Upsilon$, b finit sau nu. Presupunem că f este integrabilă pe intervalul compact $[a, u]$, oricare $a < u < b$. Dacă există* $\lim\limits_{u \nearrow b} \int_a^u f(x)\mathrm{d}x$ *şi e finită, spunem că* $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ *este convergentă şi notăm cu* $(v)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{u \nearrow b}\int_a^u f(x)\mathrm{d}x$. *În caz contrar, dacă limita nu există sau e infinită, spunem că* $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ *este divergentă.*

Exemplul 3.1.1 Să se studieze convergenta integralei $\int_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^{\alpha}}$. Avem

$$\int_1^u \frac{\mathrm{d}x}{x^{\alpha}} = \begin{cases} \ln u & \text{dacă } \alpha = 1 \\ \dfrac{u^{1-\alpha}-1}{1-\alpha} & \text{dacă } \alpha \neq 1. \end{cases}$$

Observăm că dacă $\alpha > 1$, atunci $(v)\int_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^{\alpha}} = \frac{-1}{1-\alpha}$, deci $\int_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^{\alpha}}$ este convergentă şi dacă $\alpha \le 1$, atunci $\lim\limits_{u\to\infty}\int_1^u \frac{\mathrm{d}x}{x^{\alpha}} = \infty$, deci $\int_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^{\alpha}}$ este divergentă. În particular, $\int_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^{2}}$ este convergentă şi $(v)\int_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^{2}} = 1$, în timp ce $\int_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$ este divergentă.

Exemplul 3.1.2 Să se studieze convergența integralei: $\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(b-x)^\alpha}$ unde b este finit.

$$\int_a^u \frac{\mathrm{d}x}{(b-x)^\alpha} = \begin{cases} \ln\frac{b-u}{b-a} & \text{dacă } \alpha=1 \\ \frac{1}{1-\alpha}\left[(b-u)^{1-\alpha}-(b-a)^{1-\alpha}\right] & \text{dacă } \alpha \neq 1. \end{cases}$$

Observăm că dacă $\alpha < 1$ atunci

$$(v)\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(b-x)^\alpha} = \lim_{u \nearrow b}\int_a^u \frac{\mathrm{d}x}{(b-x)^\alpha} = \frac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha},$$

iar dacă $\alpha \geq 1$, $\lim\limits_{u \nearrow b}\int_a^u \frac{\mathrm{d}x}{(b-x)^\alpha} = -\infty$. Aşadar, $\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(b-x)^\alpha}$ este convergentă pentru $\alpha < 1$ şi divergentă pentru $\alpha \geq 1$.

În particular, $\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{b-x}}$ este convergentă şi $\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(b-x)\sqrt{b-x}}$ este divergentă.

Observația 3.1.1 Fie $f : (a, b] \to \Upsilon$, a finit sau nu. Presupunem că f este integrabilă pe intervalul $[u, b]$, oricare ar fi $a < u < b$. Notăm cu $(v)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x =$ $= \lim\limits_{u \searrow a}\int_u^b f(x)\mathrm{d}x$, dacă această limită există şi e finită, şi spunem că $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ este convergentă. În caz contrar, $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ este divergentă. Procedând ca în exemplul 3.1.2 rezultă că $\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^\alpha}$, unde a este finit, este convergentă pentru $\alpha < 1$ şi divergentă pentru $\alpha \geq 1$. De exemplu $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$ este convergentă şi $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x}$ este divergentă.

Teorema 3.1.1 *Fie* $f : [a, b) \to \Upsilon$, *b finit sau nu. Dacă f este integrabilă pe* $[a, u]$ *oricare ar fi* $a < u < b$, *atunci* $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ *este convergentă dacă şi numai dacă* $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ a < \delta_\varepsilon < b$ *astfel încât* $\left|\int_{u'}^{u''} f(x)\mathrm{d}x\right| < \varepsilon$ *pentru orice* $u', u'' \in (\delta_\varepsilon, b)$.

Demonstrație.

Pentru orice $a < u < b$ notăm cu $F(u) = \int_a^u f(x)\mathrm{d}x$. Conform Definiției 3.1.1, $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ este convergentă dacă şi numai dacă există $L = \lim_{u \to b} F(u)$ şi e finită. Pe de altă parte, din Teorema Cauchy-Balzano rezultă că existența acestei limite finite este echivalentă cu faptul că $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists$ o vecinătate V_ε a lui b astfel încât $|F(u') - F(u'')| < \varepsilon$ pentru orice $u', u'' \in V_\varepsilon \cap [a,b)$. Dacă b este finit, putem presupune că V_ε este de forma $(b - \eta_\varepsilon, b + \eta_\varepsilon)$ unde $a < b - \eta_\varepsilon < b$ şi alegem $\delta_\varepsilon = b - \eta_\varepsilon$. Dacă $b = +\infty$ putem presupune că V_ε este de forma $(\delta_\varepsilon, \infty)$ unde $a < \delta_\varepsilon < b$. În ambele situații, dacă $u', u'' \in (\delta_\varepsilon, b)$ rezultă că $u', u'' \in V_\varepsilon \cap [a,b)$, deci că $|F(u') - F(u'')| < \varepsilon$. Pe de altă parte, se observă imediat că

$$|F(u') - F(u'')| = \left|\int_a^{u'} f(x)\mathrm{d}x - \int_a^{u''} f(x)\mathrm{d}x\right| = \left|\int_{u'}^{u''} f(x)\mathrm{d}x\right|.$$

Aşadar, $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ este convergentă, dacă şi numai dacă pentru $\varepsilon > 0$, $\exists\ a < \delta_\varepsilon < b$ astfel încât pentru orice $u', u'' \in (\delta_\varepsilon, b)$ avem $\left|\int_{u'}^{u''} f(x)\mathrm{d}x\right| < \varepsilon$.

Definiția 3.1.2 *Spunem că* $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ *este absolut convergentă dacă* $\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$ *este convergentă.*

Corolarul 3.1.1 *Dacă* $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ *este absolut convergentă, atunci* $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ *este convergntă.*

Demonstrație.

Afirmația rezultă din Teorema 3.1.1 şi din Observația că $\left|\int_{u'}^{u''} f(x)\mathrm{d}x\right| \leq$ $\leq \int_{u'}^{u''} |f(x)|\mathrm{d}x$.

Teorema 3.1.2 *Fie* $f, g : [a, b) \to \Upsilon_+$, *b finit sau nu. Presupunem că f şi g sunt integrabile pe intervalul* $[a, u]$, *oricare ar fi* $a < u < b$ *şi că* $f(x) \leq g(x)$, $\forall\ x \in [a, b)$. *Atunci*

1) *Dacă* $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ *converge, rezultă că şi* $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ *converge.*

2) *Dacă* $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ *diverge, rezultă că şi* $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ *diverge.*

Demonstraţie.

Fie $F(u)=\int_a^u f(x)\mathrm{d}x$ şi $G(u)=\int_a^u g(x)\mathrm{d}x$, unde $a < u < b$. Din proprietatea de monotonie a integralei rezultă că $0 \le F(u) \le G(u)$, $\forall\ a < u < b$.

F şi G sunt monoton crescătoare, deoarece f şi g iau valori în $\mathbb{R}_+$.

Dacă presupunem că $\int_a^u g(x)\mathrm{d}x$ este convergentă rezultă că $(v)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x = = \lim\limits_{u \to b} G(u)$ există şi e finită şi $G(u) \le (v)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

Cum $F \le G$ rezultă că $F(u) \le (v)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$, $\forall\ a < u < b$. Faptul că F este monoton crescătoare şi mărginită superior pe $[a, b)$ implică că există $\lim\limits_{u \to b} F(u) \le \le (v)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$, deci $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ converge.

Dacă presupunem că $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ este divergentă, rezultă că $\lim\limits_{u \to b} F(u) = +\infty$ şi cu atât mai mult $\lim\limits_{u \to \infty} G(u) = +\infty$, deci $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ diverge.

Exemplul 3.1.3 Să se studieze convergenţa integralei $\int_1^\infty \frac{\cos x}{x\sqrt{x}}\mathrm{d}x$. Deoarece $\left|\frac{\cos x}{x\sqrt{x}}\right| \le \frac{1}{x\sqrt{x}}$, $\forall\ x \in [1, \infty)$ şi $\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x}}$ este convergentă, din Teorema 3.1.2 rezultă că $\int_1^\infty \frac{|\cos x|}{x\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ este convergentă.

Rezultă că $\int_1^\infty \frac{\cos x}{x\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ este absolut convergentă, deci convergentă în virtutea Corolarului 3.1.1.

Observaţia 3.1.2 Fie $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ integrabilă pe fiecare interval compact închis în $[a, b)$ şi fie $a < c < b$. Atunci, $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ este convergentă dacă şi numai dacă $\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$ este convergentă. Într-adevăr, este suficient să observăm că pentru orice $c < u < b$, avem $\int_a^u f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^u f(x)\mathrm{d}x$, iar $\int_a^c f(x)\mathrm{d}x$ este un număr finit, f fiind integrabilă pe $[a, c]$.

Teorema 3.1.3 *Fie* $f : [a, \infty) \to \Upsilon_+$, *integrabilă pe intervalul* $[a, u]$ *pentru orice* $a < u < b$. *Atunci*

1) *Dacă* $\exists\ \alpha > 1$ *astfel încât* $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\alpha} f(x)$ *există şi e finită rezultă că* $\int_a^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ *este convergentă.*

2) *Dacă* $\exists\ \alpha \le 1$ *astfel încât* $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\alpha} f(x)$ *există şi este strict pozitivă, rezultă că* $\int_a^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ *este divergentă.*

Demonstraţie.

Fie $\alpha > 1$ şi fie $l = \lim\limits_{x\to\infty} x^{\alpha} f(x) < \infty$. Din definiţia limitei unei funcţii rezultă că, pentru orice $\varepsilon > 0$, $\exists\ \delta_{\varepsilon} > a$ astfel încât $l - \varepsilon < x^{\alpha} f(x) < l + \varepsilon$ pentru orice $x > \delta_{\varepsilon}$. Aşadar, $f(x) < \dfrac{l+\varepsilon}{x^{\alpha}}$, pentru orice $x > \delta_{\varepsilon}$.

Cum $\int_{\delta_{\varepsilon}}^{\infty} \dfrac{l+\varepsilon}{x^{\alpha}}\mathrm{d}x$ este convergentă în acest caz (Vezi Exemplul 3.1.1), din Teorema 3.1.2 rezultă că $\int_{\delta_{\varepsilon}}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ este convergentă. Ţinând seama şi de Observaţia 3.1.2 rezultă că $\int_a^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ este convergentă.

Presupunem acum că $\exists\ \alpha \le 1$, astfel încât $\exists\ \lim\limits_{x\to\infty} x^{\alpha} f(x) = l$ şi e finită. Deoarece $l > 0$, putem presupune că $0 < \varepsilon < l$. Pentru un astfel de ε, există $\delta_{\varepsilon} > 0$ astfel încât $l - \varepsilon < x^{\alpha} f(x) < l + \varepsilon$ pentru orice $x > \delta_{\varepsilon}$.

În particular avem $\dfrac{l-\varepsilon}{x^{\alpha}} < f(x)$, $\forall\ x > \delta_{\varepsilon}$.

Deoarece $\int_{\delta_{\varepsilon}}^{\infty} \dfrac{l-\varepsilon}{x^{\alpha}}\mathrm{d}x$ este divergentă (Vezi exemplul 3.1.1), din Teorema 3.1.2 rezultă că $\int_{\delta_{\varepsilon}}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ este divergentă. În sfârşit, din Observaţia 3.1.2 rezultă că $\int_a^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ este divergentă.

Dacă $\exists\ \alpha \le 1$ astfel încât $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\alpha} f(x) = +\infty$, atunci $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ \delta_{\varepsilon} > a$ astfel încât $x^{\alpha} f(x) > \varepsilon$ pentru orice $x \in (\delta_{\varepsilon}, \infty)$. Aşadar, $f(x) > \dfrac{\varepsilon}{x^{\alpha}}$, $\forall\ x > \delta_{\varepsilon}$. Cum

$\int_{\delta_\varepsilon}^{\infty} \frac{\varepsilon}{x^\alpha} \mathrm{d}x$ este divergentă în acest caz, rezultă că $\int_{\delta_\varepsilon}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ este divergentă, deci $\int_a^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ este divergentă.

Exemplul 3.1.4 Să se studieze convergența integralei $\int_a^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\mathrm{d}x$, unde P şi Q sunt polinoame, $\mathrm{gr}P \le \mathrm{gr}Q - 2$ şi $Q(x) \neq 0$, $\forall\, x > a$.

Deoarece $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 \frac{|P(x)|}{|Q(x)|}$ este finită, din Teorema 3.1.3 rezultă că $\int_a^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\mathrm{d}x$ este absolut convergentă, deci convergentă conform Corolarului 3.1.1.

Teorema 3.1.4 *Fie* $f : [a, b) \to \Upsilon_+$, *integrabilă pe intervalul* $[a, u]$ *pentru orice* $a < u < b < \infty$. Atunci

1) *Dacă* $\exists\ \alpha < 1$ *astfel încât* $\lim\limits_{x\nearrow b} (b-x)^\alpha f(x)$ *există şi e finită, rezultă că* $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ *este convergentă.*

2) *Dacă* $\exists\ \alpha \ge 1$ *astfel încât există* $\lim\limits_{x\nearrow b} (b-x)^\alpha f(x) > 0$, *atunci* $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ *diverge.*

Demonstrația este asemănătoare cu demonstrația Teoremei 3.1.3, ținându-se seama de faptul că $\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(b-x)^\alpha}$ este convergentă pentru $\alpha < 1$ şi divergentă pentru $\alpha \ge 1$ (Exemplul 3.1.2).

Exemplul 3.1.5 $\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(2-x)}}$ este convergentă deoarece

$\lim\limits_{x\nearrow 2} (2-x)^{1/2} \frac{1}{\sqrt{x(2-x)}} = \frac{1}{\sqrt{2}} < \infty$, în timp ce $\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x+1)(2-x)^3}}$ este divergentă, deoarece $\lim\limits_{x\nearrow 2} (2-x)^3 \frac{1}{\sqrt{(x+1)(2-x)^3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} > 0$.

Are loc de asemenea, următoarea teoremă:

Teorema 3.1.5 *Fie* $f : (a, b] \to \Upsilon_+$, *integrabilă pe* $[v, b]$ *pentru orice* $-\infty < a < v < b$. *Atunci*:

1) *Dacă* $\exists\ \alpha < 1$ *astfel încât* $\lim\limits_{x \searrow a} \left(x-a\right)^{\alpha} f(x)$ *există şi e finită, rezultă că* $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ *este convergentă.*

2) *Dacă* $\exists\ \alpha \geq 1$ *astfel încât* $\lim\limits_{x \searrow a} \left(x-a\right)^{\alpha} f(x) > 0$, *atunci* $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ *este divergentă.*

Exemplul 3.1.6 $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x\left(x+1\right)}}$ este convergentă, deoarece

$\lim\limits_{x \searrow 0} x^{1/2} \frac{1}{\sqrt{x\left(x+1\right)}} = 1 < \infty$ iar $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^5\left(x+1\right)}}$ este divergentă, deoarece

$\lim\limits_{x \searrow 0} x^{5/2} \frac{1}{\sqrt{x^5\left(x+1\right)}} = 1 > 0$.

Următoarea teoremă este cunoscută sub numele de „Criteriul integral al lui Cauchy”.

Teorema 3.1.6 *Fie* $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}_+$ *o funcţie monoton descrescătoare. Atunci* $\int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ *şi seria* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ *au aceeaşi natură.*

Demonstraţie.

Deoarece $f(n) \leq f(x) \leq f\left(n-1\right)$ pentru orice $x \in \left[n-1, n\right]$ rezultă că $f(n) \leq \int_{n-1}^{n} f(x)\,\mathrm{d}x \leq f\left(n-1\right)$, $\forall\ n \geq 2$ şi mai departe că

$$\sum_{n=2}^{m} f(n) \leq \int_1^m f(x)\,\mathrm{d}x \leq \sum_{n=1}^{m-1} f(n) \text{, pentru orice } m \geq 2 \qquad (1)$$

Dacă presupunem că seria $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f(n)$ este convergentă, rezultă că $\exists\ M > 0$ astfel încât $\sum\limits_{n=1}^{m-1} f(n) < M,\ \forall\ m \geq 2$. Ţinând seama de (1) rezultă că $\int_1^m f(x)\,\mathrm{d}x < M$ pentru orice $m \geq 2$.

Fie $u > 1$ oarecare şi fie $m \in \mathbb{N}^*$, $m > u$. Deoarece $f \geq 0$, rezultă că

$\int_1^u f(x)\,\mathrm{d}x \le \int_1^m f(x)\,\mathrm{d}x < M$. Aşadar, $\exists \lim\limits_{u\to\infty}\int_1^u f(x)\,\mathrm{d}x \le M$, deci $\int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ este convergentă. Dacă presupunem acum că $\sum\limits_{m=1}^{\infty} f(n)$ este divergentă, rezultă că $\lim\limits_{m\to\infty}\sum\limits_{m\to\infty}^{m} f(n) = \infty$ şi deci că $\lim\limits_{m\to\infty}\int_1^m f(x)\,\mathrm{d}x = +\infty$. De unde deducem că $\int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ este divergentă.

Exemplul 3.1.7 $\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{n^\alpha}$ are aceeaşi natură cu suma $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$, deci este convergentă dacă $\alpha > 1$ şi este divergentă dacă $\alpha \le 1$.

Teorema 3.1.7 (Criteriul Dirichlet)

Fie f,g : $[a, b) \to$, *unde b este finit sau nu. Presupunem că f este continuă şi că există* $M > 0$ *astfel încât* $\left|F(u)\right| \le M$, $\forall\ a < u < b$, *unde am notat cu* $F(u) = \int_a^u f(x)\,\mathrm{d}x$. *Despre funcţia g presupunem că este monoton descrescătoare, de clasă* C^1 *şi nenegativă pe* $[a, b)$. *În plus* $\lim\limits_{x\to b} g(x) = 0$. *Atunci* $\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ *este convergentă.*

Demonstraţie.

Demonstraţia se bazează pe Teorema 3.1.1. Pentru orice $u', u'' \in (a,b)$ avem

$$\int_{u'}^{u''} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \int_{u'}^{u''} F'(x)g(x)\,\mathrm{d}x = F(x)g(x)\Big|_{u'}^{u''} - \int_{u'}^{u''} F(x)g'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Pe de altă parte, g fiind descrescătoare rezultă că $g'(x) \le 0$, $\forall\ x \in [a, b]$ şi, conform teoremei de medie există ξ în intervalul de capete u' şi u'' astfel încât

$$\int_{u'}^{u''} F(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = F(\xi)\int_{u'}^{u''} g'(x)\,\mathrm{d}x = F(\xi)\left[g(u'') - g(u')\right]$$

Aşadar, avem: $\int_{u'}^{u''} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = F(u'')g(u'') - F(u')g(u') - F(\xi)\left[g(u'') - g(u')\right]$.

Ţinând seama că $\left|F(u)\right| \le M$, $\forall\ u \in (a, b)$ rezultă:

$$\left|\int_{u'}^{u''} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right| \le 2M\left[g(u'') + g(u')\right].$$

Prin ipoteză $\lim\limits_{x\to b} g(x) = 0$, deci pentru $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ \alpha < \delta_\varepsilon < b$ astfel încât $\left|g(x)\right| < \frac{\varepsilon}{4M}$ pentru orice $x \in (\delta_\varepsilon, b)$. Aşadar, dacă u' şi $u'' \in (\delta_\varepsilon, b)$, rezultă că:

$\left|\int_{u'}^{u''} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right| \le 2M\left(\dfrac{\varepsilon}{4M}+\dfrac{\varepsilon}{4M}\right)=\varepsilon$, deci $\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ este convergentă conform Teoriei 3.1.1.

Exemplul 3.1.8 $\int_1^\infty \dfrac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ este convergentă.

Într-adevăr, fie $f(x)=\sin x$ şi $g(x)=\dfrac{1}{x}$, $x \in [1, \infty)$. Constatăm imediat că funcţiile f şi g satisfac condiţiile Teoremei 3.1.5, deci $\int_1^\infty \dfrac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ este convergentă.

Observaţia 3.1.3 Fie $f : [a, b) \to \mathbb{R}$, integrabilă pe $[a, u]$, $\forall\ a < u < b < \infty$. Dacă există $\lim\limits_{x \nearrow b} f(x)$ şi e finită, atunci $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ este convergentă.

Într-adevăr, $\lim\limits_{x \nearrow b}(b-x)^{\frac{1}{2}}\,|f(x)|=0$, deci $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ este convergentă în virtutea Teoremei 3.1.4. Aşadar, $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ este absolut convergentă, deci convergentă conform Corolarului 3.1.1.

Exemplul 3.1.9 Integrala lui Dirichlet $\int_0^\infty \dfrac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ este convergentă.

Într-adevăr, $\int_0^\infty \dfrac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x=\int_0^1 \dfrac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x+\int_1^\infty \dfrac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$. Deoarece $\lim\limits_{x \searrow 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$, rezultă că $\int_0^1 \dfrac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ este convergentă. Pe de altă parte, în Exemplul 3.1.8 am arătat că $\int_1^\infty \dfrac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ este convergentă.

Definiţia 3.1.3 *Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, integrabilă pe fiecare interval compact $[v, u] \subset \mathbb{R}$. Spunem că $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ este convergentă dacă există $\lim\limits_{\substack{u\to\infty\\ v\to-\infty}} \int_v^u f(x)\,\mathrm{d}x$ şi este finită. Se numeşte valoare principală* (*în sensul lui Cauchy*) *următoarea limită* (v.p.) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{u\to\infty}\int_{-u}^{u} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Se poate întâmpla ca o integrală $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ să fie divergentă, dar valoarea sa principală să fie finită.

Exemplul 3.1.10 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\,\mathrm{d}x}{1+x^2}$.

Deoarece $\lim\limits_{\substack{u\to\infty \\ v\to-\infty}} \int_{v}^{u} \frac{x\,\mathrm{d}x}{1+x^2} = \lim\limits_{\substack{u\to\infty \\ v\to-\infty}} \frac{1}{2}\ln\frac{1+u^2}{1+v^2}$ nu există, rezultă că $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\,\mathrm{d}x}{1+x^2}$ este divergentă. Pe de altă parte (v.p.) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\,\mathrm{d}x}{1+x^2} = \lim\limits_{u\to\infty} \int_{-u}^{u} \frac{x\,\mathrm{d}x}{1+x^2} = 0$.

În mod asemănător, dacă $f : [a, c) \cup (c, b] \to \mathbb{R}$, spunem că $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ este convergentă dacă există $\lim\limits_{\substack{\varepsilon\to 0_+ \\ \eta\to 0_+}} \left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{c+\eta}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x \right)$ şi e finită. De asemenea notăm cu (v.p.) $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{\varepsilon\to 0_+} \left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x \right)$ şi o numim valoarea principală în sensul lui Cauchy.

Exemplul 3.1.11 $\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{x}$ este divergentă deoarece

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0_+ \\ \eta\to 0_+}} \left(\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{\mathrm{d}x}{x} + \int_{\eta}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{x} \right) = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0_+ \\ \eta\to 0_+}} \ln\frac{\varepsilon}{\eta} \text{ nu există.}$$

Pe de altă parte

$$\text{(v.p.)} \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{x} = \lim_{\varepsilon\to 0_+} \left(\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{\mathrm{d}x}{x} + \int_{\varepsilon}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{x} \right) = \lim_{\varepsilon\to 0} \left(\ln\varepsilon - \ln\varepsilon \right) = 0 .$$

Următoarea teoremă este cunoscută sub numele de teorema schimbării de variabilă pentru integrale generalizate.

Teorema 3.1.8 *Fie $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ continuă şi fie $\varphi : [\alpha, \beta) \to [a, b)$ o funcţie de clasă C^1, strict crescătoare astfel încât $\varphi(\alpha) = a$ şi $\lim\limits_{t\nearrow\beta} \varphi(t) = b$. Atunci, dacă una din integralele: $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, respectiv $\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$ este convergentă, atunci şi cealaltă este convergentă şi are loc egalitatea*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,\mathrm{d}t .$$

Demonstrație.

Fie $a < u < b$. Deoarece φ este strict crescătoare şi continuă, rezultă că $\varphi : [\alpha, \beta) \to [a, b)$ este bijectivă, deci $\exists\ \alpha < \tau < \beta$ astfel încât $\varphi(\tau) = u$. Din Teorema schimbării de variabilă pe un interval compact avem:

$$\int_a^u f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\tau f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Să presupunem, de exemplu, că $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ este convergentă. Atunci rezultă că $\exists \lim\limits_{\tau \nearrow \beta} \int_\alpha^\tau f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \lim\limits_{u \nearrow b} \int_a^u f(x)\,\mathrm{d}x = (v)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x < \infty$. Aşadar, $\int_\alpha^\beta f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$ este convergentă şi $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$.

3.2. INTEGRALE CU PARAMETRU

Fie $D = [a, b] \times [c, d]$ şi $f : D \to \mathbb{R}$. Dacă pentru orice $t \in [c, d]$, funcția $x \to f(x, t) : [a, b] \to \mathbb{R}$ este integrabilă pe $[a, b]$, atunci $\int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}x$ va depinde de t. Se poate defini astfel o funcție $F : [c, d] \to \mathbb{R}$ astfel:

$$F(t) = \int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}x\,,\ \forall\ t \in [c, d].$$

Se poate considera o situație mai generală, în care parametrul t intervine şi în limitele integralei. Mai precis avem:

Definiția 3.2.1 *Fie* $f : D \to \mathbb{R}$ *şi fie* $\alpha, \beta : [c, d] \to [a, b]$. *Dacă pentru orice* $t \in [c, d]$, *funcția* $x \to f(x, t) : [a, b] \to \mathbb{R}$ *este integrabilă, atunci funcția* $F : [c, d] \to \mathbb{R}$ *definită prin*:

$$F(t) = \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(x,t)\,\mathrm{d}x\,,\ \forall\ t \in [c, d] \tag{1}$$

se numeşte integrală cu parametru.

În continuare, vom analiza în ce condiții funcția F este continuă, derivabilă, integrabilă etc.

Teorema 3.2.1 *Dacă* $f : D \to \mathbb{R}$ *este continuă şi* $\alpha, \beta : [c, d] \to [a, b]$ *sunt continue, atunci* $F : [c, d] \to \mathbb{R}$, *definită prin* $F(t) = \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(x,t)\,\mathrm{d}x\,,\ \forall\ t \in [c, d]$ *este continuă pe* $[c, d]$.

Demonstrație.

Fie $t_0 \in [c, d]$ un punct oarecare fixat.

Să evaluăm diferența $F(t)-F(t_0)=\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(x,t)\,\mathrm{d}x-\int_{\alpha(t_0)}^{\beta(t_0)} f(x,t_0)\,\mathrm{d}x$.

Ținând seama de descompunerea $\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)}=\int_{\alpha(t)}^{\alpha(t_0)}+\int_{\alpha(t_0)}^{\beta(t_0)}+\int_{\beta(t_0)}^{\beta(t)}$ avem:

$$F(t)-F(t_0)=\int_{\alpha(t_0)}^{\beta(t_0)}\left[f(x,t)-f(x,t_0)\right]\mathrm{d}x+\int_{\beta(t_0)}^{\beta(t)} f(x,t)\,\mathrm{d}x-\int_{\alpha(t_0)}^{\alpha(t)} f(x,t)\,\mathrm{d}x \quad (2)$$

Deoarece *f* este continuă pe mulțimea compactă *D*, rezultă că *f* este mărginită pe *D*, deci există $M>0$ astfel încât $\left|f(x,t)\right|<M$, $\forall\ (x,t)\in D$.

În continuare avem:

$$\left|F(t)-F(t_0)\right| \le \left|\int_{\alpha(t_0)}^{\beta(t_0)}\left|f(x,t)-f(x,t_0)\right|\mathrm{d}x\right|+M\left|\beta(t)-\beta(t_0)\right|+M\left|\alpha(t)-\alpha(t_0)\right|.$$

Cum *f* este continuă pe mulțimea compactă *D*, rezultă că *f* este uniform continuă pe *D*, deci $\forall\ \varepsilon>0$, $\exists\ \delta'_\varepsilon>0$ astfel încât $\forall\ (x',t')\in D$, $\forall\ (x'',t'')\in D$ cu proprietatea $\left|x'-x''\right|<\delta'_\varepsilon$, $\left|t'-t''\right|<\delta'$ avem

$$\left|f(x',t')-f(x'',t'')\right|<\frac{\varepsilon}{3(b-a)} \quad (3)$$

Pe de altă parte, din continuitatea funcțiilor α și β rezultă că $\exists\ \delta''_\varepsilon>0$ astfel încât $\forall\ t\in[c,d]$ cu $\left|t-t_0\right|<\delta''_\varepsilon$ avem:

$$\left|\alpha(t)-\alpha(t_0)\right|<\frac{\varepsilon}{3M} \quad \text{și} \quad \left|\beta(t)-\beta(t_0)\right|<\frac{\varepsilon}{3M} \quad (4)$$

Fie $\delta_\varepsilon=\min(\delta'_\varepsilon;\delta''_\varepsilon)$ și fie $t\in[c,d]$ cu $\left|t-t_0\right|<\delta_\varepsilon$. Ținând seama de (3) și (4), rezultă:

$$F(t)-F(t_0)\le\frac{\varepsilon}{3(b-a)}\left|\beta(t_0)-\alpha(t_0)\right|+M\frac{\varepsilon}{3M}+M\frac{\varepsilon}{3M}\le$$

$$\le\frac{\varepsilon}{3(b-a)}(b-a)+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.$$

Așadar, pentru $\forall\ \varepsilon>0$, $\exists\ \delta_\varepsilon>0$ astfel încât pentru orice $t\in[c,d]$ cu $\left|t-t_0\right|<\delta_\varepsilon$ avem $\left|F(t)-F(t_0)\right|<\varepsilon$, deci *F* este continuă în t_0. Cum t_0 a fost arbitrar în $[c,d]$, rezultă că *F* este continuă pe $[c,d]$.

Observația 3.2.1 Concluzia Teoremei 3.2.1 se poate formula și astfel:

$$\lim_{t\to t_0}\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(x,t)\,\mathrm{d}x=\int_{\alpha(t_0)}^{\beta(t_0)} f(x,t_0)\,\mathrm{d}x.$$

Exemplul 3.2.1 Să se calculeze $\lim\limits_{\alpha\to 0}\int_0^2 x^2\cos\alpha x\,\mathrm{d}x$.

Folosind Teorema 3.2.1 rezultă imediat că

$$\lim_{\alpha\to 0}\int_0^2 x^2\cos\alpha x\,\mathrm{d}x=\int_0^2\lim_{\alpha\to 0}x^2\cos\alpha x\,\mathrm{d}x=\int_0^2 x^2\mathrm{d}x=\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^2=\frac{8}{3}.$$

Teorema 3.2.2 *Fie $f: D\to\mathbb{R}$ continuă. Presupunem în plus că există $\dfrac{\partial f}{\partial t}$ şi e continuă pe D, iar funcţiile α, $\beta:[c,d]\to[a,b]$ sunt derivabile pe $[c,d]$. Atunci rezultă că funcţia $F:[c,d]\to\mathbb{R}$, definită prin $F(t)=\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)}f(x,t)\,\mathrm{d}x$, $t\in[c,d]$ este derivabilă pe $[c,d]$ şi*

$$F'(t)=\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)}\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,\mathrm{d}x+\beta'(t)f\left[\beta(t),t\right]-\alpha'(t)f\left[\alpha(t),t\right]\qquad(5)$$

(Formula (5) este cunoscută sub numele de formula lui Leibniz de derivare a integralei cu parametru).

Demonstraţie.

Fie $t_0\in[c,d]$ fixat şi $t\in[c,d]$, $t\neq t_0$. Ţinând seama de descompunerea (2) rezultă:

$$\frac{F(t)-F(t_0)}{t-t_0}=\int_{\alpha(t_0)}^{\beta(t_0)}\frac{f(x,t)-f(x,t_0)}{t-t_0}\mathrm{d}x+\frac{1}{t-t_0}\int_{\beta(t_0)}^{\beta(t)}f(x,t)\,\mathrm{d}x-$$
$$-\frac{1}{t-t_0}\int_{\alpha(t_0)}^{\alpha(t)}f(x,t)\,\mathrm{d}x.$$

Conform teoremei de medie există ξ între $\beta(t_0)$ şi $\beta(t)$ şi η între $\alpha(t_0)$ şi $\alpha(t)$ astfel încât să avem:

$$\frac{F(t)-F(t_0)}{t-t_0}=\int_{\alpha(t_0)}^{\beta(t_0)}\frac{f(x,t)-f(x,t_0)}{t-t_0}\mathrm{d}x+f(\xi,t)\frac{\beta(t)-\beta(t_0)}{t-t_0}-$$
$$-f(\eta,t)\frac{\alpha(t)-\alpha(t_0)}{t-t_0}.$$

Pe de altă parte, din Teorema Lagrange rezultă că există θ în intervalul deschis de capete t_0 şi t astfel încât $f(x,t)-f(x,t_0)=\dfrac{\partial f}{\partial t}(x,\theta)(t-t_0)$. Aşadar, avem:

$$\frac{F(t)-F(t_0)}{t-t_0}=\int_{\alpha(t_0)}^{\beta(t_0)}\frac{\partial f}{\partial t}(x,\theta)\,\mathrm{d}x+f(\xi,t)\frac{\beta(t)-\beta(t_0)}{t-t_0}-f(\eta,t)\frac{\alpha(t)-\alpha(t_0)}{t-t_0}.\qquad(6)$$

În continuare, ținând seama de Teorema 3.2.1 şi de faptul că f şi $\dfrac{\partial f}{\partial t}$ sunt continue pe D, iar α şi β sunt derivabile pe $[c, d]$, rezultă că membrul drept al egalității (6) are limită, deci $\exists$

$$\lim_{t\to t_0}\frac{F(t)-F(t_0)}{t-t_0}=\int_{\alpha(t_0)}^{\beta(t_0)}\frac{\partial f}{\partial t}(x,t_0)\,\mathrm{d}x+\beta'(t_0)f\left[\beta(t_0),t_0\right]-$$
$$-\alpha'(t_0)f\left[\alpha(t_0),t_0\right].$$

Aşadar, F este derivabilă în punctul t_0 şi

$$F'(t_0)=\int_{\alpha(t_0)}^{\beta(t_0)}\frac{\partial f}{\partial t}(x,t_0)\,\mathrm{d}x+\beta'(t_0)f\left[\beta(t_0),t_0\right]-\alpha'(t_0)f\left[\alpha(t_0),t_0\right].$$

Cum t_0 a fost arbitrar, rezultă că F este derivabilă pe $[c, d]$ şi are loc formula (5).

Exemplul 3.2.2 Fie integralele eliptice:

$$E(k)=\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,\mathrm{d}\varphi \quad\text{şi}\quad K(k)=\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},\ 0<k<1.$$

Să se arate că $\dfrac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}k}=\dfrac{E-K}{k}$ şi $\dfrac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}k}=\dfrac{E}{k\left(1-k^2\right)}-\dfrac{K}{k}$. Verificăm prima egalitate. Într-adevăr, din Teorema 3.2.2 rezultă că

$$\frac{\mathrm{d}E(k)}{k}=\int_0^{\pi/2}\frac{-k\sin^2\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\mathrm{d}\varphi=\frac{1}{k}\int_0^{\pi/2}\frac{1-k^2\sin^2\varphi-1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\mathrm{d}\varphi=$$
$$=\frac{1}{k}\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,\mathrm{d}\varphi-\frac{1}{k}\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}=\frac{E(k)-K(k)}{k},\ \ 0<k<1.$$

Exemplul 3.2.3 Să se arate că funcția $y(x)=\int_0^{\pi}\cos\left(n\alpha-x\sin\alpha\right)\mathrm{d}\alpha$, $x\in\Upsilon$ verifică ecuația lui Bessel:

$$x^2y''+xy'+\left(x^2-n^2\right)y=0 \tag{7}$$

Într-adevăr, din Teorema 3.2.2 avem:

$$y'(x)=\int_0^{\pi}\sin\alpha\cdot\sin\left(n\alpha-x\sin\alpha\right)\mathrm{d}\alpha\ \text{ şi}$$
$$y''(x)=\int_0^{\pi}-\sin^2\alpha\cdot\cos\left(n\alpha-x\sin\alpha\right)\mathrm{d}\alpha\,.$$

Înlocuind în ecuația (7) obținem:

$$\int_0^{\pi}\left[\left(-x^2\sin^2\alpha+x^2-n^2\right)\cos\left(n\alpha-x\sin\alpha\right)+x\sin\alpha\cdot\sin\left(n\alpha-x\sin\alpha\right)\right]\mathrm{d}\alpha=$$

$$=\int_0^{\pi}\left[\left(x^2\cos^2\alpha-n^2\right)\cos\left(n\alpha-x\sin\alpha\right)+x\sin\alpha\cdot\sin\left(n\alpha-x\sin\alpha\right)\right]\mathrm{d}\alpha=$$

$$=-\int_0^{\pi}\left[\left(n+x\cos\alpha\right)\sin\left(n\alpha-x\sin\alpha\right)\right]'\mathrm{d}\alpha=\left(n+x\cos\alpha\right)\sin\left(n\alpha-x\sin\alpha\right)\Big|_0^{\pi}=0\,.$$

Exemplul 3.2.4 Să se calculeze $F(\alpha)=\int_0^{\pi/2}\ln\left(\alpha^2-\sin^2 x\right)\mathrm{d}x$, $\alpha>1$. Funcția $f(x,\alpha)=\ln\left(\alpha^2-\sin^2 x\right)$, $x\in[0,\pi/2]\times(1,\infty)$ satisface condițiile Teoremei 3.2.2 pe orice mulțime compactă $D=[0,\pi/2]\times[c,d]\subset[0,\pi/2]\times(1,\infty)$. Rezultă că avem:

$$F'(\alpha)=\int_0^{\pi/2}\frac{2\alpha}{\alpha^2-\sin^2 x}\mathrm{d}x\,,\ \forall\ \alpha>1.$$

Dacă facem schimbarea de variabilă tg $x=t$ rezultă:

$$F'(\alpha)=\int_0^{\pi/2}\frac{2\alpha\,\mathrm{d}x}{\alpha^2-\sin^2 x}=\int_0^{\infty}\frac{2\alpha\,\mathrm{d}t}{\left(\alpha^2-\dfrac{t^2}{1+t^2}\right)\left(1+t^2\right)}=\frac{2\alpha}{\alpha^2-1}\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^2+\dfrac{\alpha^2}{\alpha^2-1}}=$$

$$=\frac{2}{\alpha^2-1}\cdot\sqrt{\alpha^2-1}\,\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{\alpha^2-1}}{\alpha}t\Bigg|_0^{\infty}=\frac{\pi}{\sqrt{\alpha^2-1}}\,.$$

Aşadar, avem: $F(\alpha)=\pi\ln\left(\alpha+\sqrt{\alpha^2-1}\right)+C$, $\alpha>1$.

Pe de altă parte, avem

$$C=\lim_{\alpha\to\infty}\left[\int_0^{\pi/2}\ln\left(\alpha^2-\sin^2 x\right)\mathrm{d}x-\pi\ln\left(\alpha+\sqrt{\alpha^2-1}\right)\right]=$$

$$=\lim_{\alpha\to\infty}\left[\int_0^{\pi/2}\ln\alpha^2\left(1-\frac{\sin^2 x}{\alpha^2}\right)\mathrm{d}x-\pi\ln\left(\alpha+\sqrt{\alpha^2-1}\right)\right]=$$

$$=\lim_{\alpha\to\infty}\left[\int_0^{\pi/2}\left(2\ln\alpha+\ln\left(1-\frac{\sin^2 x}{\alpha^2}\right)\right)\mathrm{d}x-\pi\ln\left(\alpha+\sqrt{\alpha^2-1}\right)\right]=$$

$$=\lim_{\alpha\to\infty}\pi\ln\frac{\alpha}{\alpha+\sqrt{\alpha^2-1}}+\lim_{\alpha\to\infty}\int_0^{\pi/2}\ln\left(1-\frac{\sin^2 x}{\alpha^2}\right)\mathrm{d}x=\pi\ln\frac{1}{2}\,.$$

În final avem: $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\ln\left(\alpha^2-\sin^2 x\right)\mathrm{d}x=\pi\ln\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2-1}}{2}$, $\forall\ \alpha>1$.

Teorema 3.2.3 *Dacă* $f : [a, b] \times [c, d] \to \Upsilon$ *este continuă, atunci funcția* $F : [c, d] \to \Upsilon$, $F(t) = \int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}x$, $t \in [c, d]$, *este continuă pe* $[c, d]$ *și*

$$\int_c^d F(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,t)\,\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}x,$$

relație echivalentă cu $\int_c^d \left(\int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}t = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,t)\,\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}x$.

Demonstrație.

Pentru orice $u \in [a, b]$ notăm cu

$$g(u,t) = \int_a^u f(x,t)\,\mathrm{d}x \quad \text{şi} \quad G(u) = \int_c^d g(u,t)\,\mathrm{d}t$$

$$h(x) = \int_c^d f(x,t)\,\mathrm{d}t \quad \text{şi} \quad H(u) = \int_a^u h(x)\,\mathrm{d}x.$$

Din Teorema 3.2.2, funcțiile $g(u,t)$ şi $\dfrac{\partial g}{\partial u} = f$ fiind continue, rezultă $G'(u) = \int_c^d \dfrac{\partial g}{\partial u}(u,t)\,\mathrm{d}t = \int_c^d f(u,t)\,\mathrm{d}t$ şi $H'(u) = h(u) = \int_c^d f(u,t)\,\mathrm{d}t$. Aşadar, $G'(u) = H'(u)$, $\forall\ u \in [a, b]$. Rezultă că cele două funcții diferă printr-o constantă, deci există $c \in \Upsilon$ astfel încât

$$G(u) = H(u) + c,\ \forall\ u \in [a, b].$$

Deoarece $G(a) = H(a) = 0$, rezultă că $c = 0$, deci $G(u) = H(u)$, $\forall\ u \in [a, b]$. În particular, pentru $u = b$ avem: $G(b) = H(b)$ adică

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}t = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,t)\,\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}x.$$

3.3. INTEGRALE GENERALIZATE CU PARAMETRU

Definiția 3.3.1 *Fie* $f : [a, b) \times [c, d] \to \Upsilon$, *b finit sau nu. Dacă pentru orice* $t \in [c, d]$, $\int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}x$ *este convergentă, spunem că* $\int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}x$ *este punctual (simplu) convergentă pe intervalul* $[c, d]$.

Ținând seama de Teorema 3.1.1 rezultă:

Observația 3.3.1 Fie $f : [a, b) \times [c, d] \to \Upsilon$, b finit sau nu. Atunci $\int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}x$ este punctual convergentă pe $[c, d]$ dacă şi numai dacă $\forall\ t \in [c, d]$ şi $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ a < \delta_{t,\varepsilon} < b$ astfel încât $\forall\ u', u'' \in (\delta_{t,\varepsilon}, b)$ avem $\left| \int_{u'}^{u''} f(x,t)\,\mathrm{d}x \right| < \varepsilon$.

Există şi un alt tip de convergentă, cu proprietăţi mai bune decât convergenţa punctuală, în care δ depinde numai de ε şi nu depinde de t. Acest tip de convergenţă se numeşte convergenţă uniformă. Mai precis avem:

Definiţia 3.3.2 *Fie* $f : [a, b) \times [c, d] \to \Upsilon$, *b finit sau nu. Spunem că* $\int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}x$ *este uniform convergentă pe* $[c, d]$, *dacă* $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ a < \delta_\varepsilon < b$ *astfel încât,* $\forall\ u', u'' \in (\delta_\varepsilon, b)$ *şi* $\forall\ t \in [c, d]$ *avem* $\left|\int_{u'}^{u''} f(x,t)\,\mathrm{d}x\right| < \varepsilon$.

Din Definiţia 3.3.2 şi Observaţia 3.3.1 rezultă imediat că:

Observaţia 3.3.2 Convergenţa uniformă implică convergenţa punctuală.

Teorema 3.3.1 *Fie* $f : [a, b) \times [c, d] \to \Upsilon$, *b finit sau nu.*
Dacă $\exists\ \varphi : [a, b) \to \Upsilon_+$ *cu proprietăţile*:

1) $|f(x,t)| \le \varphi(x)$, $\forall\ (x,t) \in [a, b) \times [c, d]$.
2) $\int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x$ *este convergentă, atunci* $\int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}x$ *este uniform convergentă pe* $[c, d]$.

Demonstraţie.

Deoarece $\int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x$ este convergentă, rezultă că $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ a < \delta_\varepsilon < b$ astfel încât $\left|\int_{u'}^{u''} \varphi(x)\,\mathrm{d}x\right| < \varepsilon$, $\forall\ u', u'' \in (\delta_\varepsilon, b)$.

Cum $\left|\int_{u'}^{u''} f(x,t)\,\mathrm{d}x\right| \le \left|\int_{u'}^{u''} |f(x,t)|\,\mathrm{d}x\right| \le \left|\int_{u'}^{u''} \varphi(x)\,\mathrm{d}x\right| < \varepsilon$, pentru orice $u', u'' \in (\delta_\varepsilon, b)$ şi $\forall\ t \in [c, d]$, rezultă că $\int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}x$ este uniform convergentă pe $[c, d]$.

Exemplul 3.3.1 $\int_0^\infty e^{-x} \sin t\,\mathrm{d}x$, $t \in \Upsilon$ este uniform convergentă pe Υ. Într-adevăr, $\left|e^{-x} \sin t\, x\right| \le e^{-x}$, $\forall\ x \in [0, \infty)$ şi $\forall\ t \in \Upsilon$. Cum $\int_0^\infty e^{-x}\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{u \to \infty} \int_0^u e^{-x}\,\mathrm{d}x = 1$, este convergentă, rezultă că $\int_0^\infty e^{-x} \sin t\, x\,\mathrm{d}x$ este

uniform convergentă pe Υ .

În continuare, prezentăm fără demonstrație, un alt criteriu de convergență uniformă.

Teorema 3.3.2 (Abel-Dirichlet)

Fie f, g : $[a, b) \times [c, d] \to \Upsilon$. *Considerăm următoarele condiții*:

(α_1) $\exists\, M > 0$ *astfel încât* $\left|\int_a^u f(x,t)\,\mathrm{d}x\right| < M$, $\forall\ a < u < b$, $\forall\ t \in [c, d]$.

(β_1) *Pentru orice* $t \in [c, d]$, *funcția* $x \to g(x, t)$: $[a, b) \to \Upsilon$ *este monotonă și* $\lim\limits_{x \to b} g(x,t) = 0$, *uniform în raport cu t (adică,* $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ a < \delta_\varepsilon < b$ *astfel încât* $|g(x,t)| < \varepsilon$, $\forall\ x \in (\delta_\varepsilon, b)$ *și* $\forall\ t \in [c, d)$).

(α_2) $\int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}x$ *este uniform convergentă pe* $[c, d]$..

(β_2) *Pentru orice* $t \in [c, d]$, *funcția* $x \to g(x, t)$: $[a, b) \to \Upsilon$ *este monotonă și* $\exists\ M > 0$ *astfel încât* $|g(x,t)| < M$, $\forall\ x \in [a, b)$ *și* $\forall\ t \in [c, d]$.

Atunci, dacă sunt îndeplinite condițiile α_1) și β_1), respectiv α_2) și β_2), rezultă că $\int_a^b f(x,t)\,g(x,t)\,\mathrm{d}x$ este uniform convergentă pe $[c, d]$.

Exemplul 3.3.2 $\int_0^\infty e^{-tx}\dfrac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ este uniform convergentă pe $[0, \infty)$. Fie

$$f(x,t) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & , x \neq 0 \\ 1 & , x = 0 \end{cases}$$

și $g(x,t) = e^{-tx}$, $x \in [0, \infty)$, $t \in [0, \infty)$. Deoarece $\int_0^\infty \dfrac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ este convergentă (Vezi Exemplul 3.1.9) și nu depinde de t, rezultă că $\int_0^\infty \dfrac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ este uniform convergentă pe $[0, \infty)$.

Pe de altă parte, $|g(x,t)| = e^{-tx} \le 1$, $\forall\ x \in [0, \infty)$, $\forall\ t \in [0, \infty)$ deci g satisface condiția β_2). Din Teorema 3.3.2 rezultă că $\int_0^\infty e^{-tx}\dfrac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ este uniform convergentă pe $[0, \infty)$.

Lema 3.3.1 *Fie* f : $[a, b) \times [c, d] \to \Upsilon$, *fie* $\{b_n\}$ *cu* $a < b_n < b$ *un șir cu proprietatea că* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ *și fie* $F_n(t) = \int_a^{b_n} f(x,t)\,\mathrm{d}x$, $t \in [c, d]$. *Dacă*

$\int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}x$ *este uniform convergentă pe* [*c*, *d*], *atunci şirul de funcţii* $\{F_n\}$ *converge uniform pe* [*c*, *d*] *la funcţia F, unde*

$$F(t) = (v)\int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}x = \lim_{u \nearrow b} \int_a^u f(x,t)\,\mathrm{d}x\,,\ \forall\ t \in [c, d].$$

Demonstraţie.

Deoarece $\int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}x$ este uniform convergentă pe [*c*, *d*] rezultă că $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ a < \delta_\varepsilon < b$ astfel încât pentru orice $u', u'' \in (\delta_\varepsilon, b)$ şi $\forall\ t \in [c, d]$ avem

$$\left|\int_{u'}^{u''} f(x,t)\,\mathrm{d}x\right| < \varepsilon \tag{1}$$

Cum $b_n \to b$, $\exists\ n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $b_n \in (\delta_\varepsilon, b)$ pentru orice $n \ge n_\varepsilon$. dacă presupunem acum că $n \ge n_\varepsilon$ şi $m \ge n_\varepsilon$, din (1) rezultă că:

$$\left|F_n(t) - F_m(t)\right| = \left|\int_{b_n}^{b_m} f(x,t)\,\mathrm{d}x\right| < \varepsilon \tag{2}$$

Aşadar, şirul $\{F_n\}$ este uniform fundamental, deci uniform convergent pe [*c*, *d*]. Pe de altă parte, este evident că pentru orice $t \in [c, d]$ avem

$$\lim_{m\to\infty} F_m(t) = \lim_{m\to\infty} \int_a^{b_m} f(x,t)\,\mathrm{d}x = F(t)\,.$$

Trecând la limită în (2) după $m \to \infty$ obţinem

$\left|F_n(t) - F(t)\right| \le \varepsilon$, $\forall\ t \in [c, d]$, deci $F_n \xrightarrow{u} F$ pe [*c*, *d*].

Teorema 3.3.3 *Dacă* $f : [a, b) \times [c, d] \to \Upsilon$ *este continuă, şi dacă* $\int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}x$ *este uniform convergentă pe* [*c*, *d*], *atunci funcţia* $F : [c, d] \to \Upsilon$, *definită prin* $F(t) = (v)\int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}x$, $\forall\ t \in [c, d]$, *este continuă pe* [*c*, *d*].

Demonstraţie.

Fie $a < b_n < b$, $b_n \to b$ şi fie $F_n(t) = \int_a^{b_n} f(x,t)\,\mathrm{d}x$, $t \in [c, d]$. Din Teorema 3.1.1 rezultă că F_n este continuă pe [*c*, *d*], $\forall\ n$. Pe de altă parte, Lema 3.3.1 implică faptul că $F_n \xrightarrow{u} F$ pe [*c*, *d*]. Din Teorema referitoare la continuitatea limitei unui şir de funcţii (vezi [9] Teorema 2.1.2) rezultă că *F* este continuă pe [*c*, *d*].

Teorema 3.3.4 *Fie* $D = [a, b) \times [c, d]$ *şi* $f : D \to \Upsilon$, *cu proprietăţile*:

(i) *f și* $\dfrac{\partial f}{\partial t}$ *sunt continue pe D.*

(ii) $\int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}x$ *este punctual convergentă pe* $[c, d]$.

(iii) $\int_a^b \dfrac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,\mathrm{d}x$ *este uniform convergentă pe* $[c, d]$.

Atunci, funcția $F : [c, d] \to \Upsilon$, definită prin $F(t) = (v) \int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}x$, $\forall\ t \in [c, d]$, este derivabilă pe $[c, d]$ și $F'(t) = (v)\int_a^b \dfrac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,\mathrm{d}x$, $\forall\ t \in [c, d]$.

Demonstrație.

Fie $a < b_n < b$, $b_n \to b$ și fie $F_n(t) = \int_a^{b_n} f(x,t)\,\mathrm{d}x$, $t \in [c, d]$. Este evident că șirul $\{F_n\}$ converge punctual pe $[c, d]$ la funcția F. Pe de altă parte, din Teorema 3.1.2 rezultă că F_n este derivabilă pe $[c, d]$ și $F_n'(t) = \int_a^b \dfrac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,\mathrm{d}x$. Observăm de asemenea, că dacă notăm cu $G(t) = (v)\int_a^b \dfrac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,\mathrm{d}x$, $\forall\ t \in [c, d]$, atunci din Lema 3.3.1 rezultă că $F_n' \xrightarrow{u} G$ pe $[c, d]$. Conform teoremei de derivabilitate a limitei unui șir de funcții ([9] teorema 2.1.4) rezultă că F este derivabilă și $F'(t) = G(t)$, $\forall\ t \in [c, d]$ și cu aceasta, teorema este demonstrată.

Exemplul 3.3.3 Să se calculeze integrala lui Dirichlet: $\int_0^\infty \dfrac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$.

Fie $F(t) = \int_0^\infty e^{-t\,x}\dfrac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$, $t \in [0, \infty)$.

Așa cum am văzut în Exemplul 3.3.2 $\int_0^\infty e^{-t\,x}\dfrac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ este uniform convergentă pe $[0, \infty)$. Cum funcția de sub integrală este continuă, din Teorema 3.3.3 rezultă că F este continuă pe $[0, \infty)$, deci $\int_0^\infty \dfrac{\sin x}{x}\mathrm{d}x = F(0) = \lim\limits_{t \to 0} F(t)$.

Pe de altă parte, avem: $\int_0^\infty \dfrac{\partial}{\partial t}\left(e^{-t\,x}\dfrac{\sin x}{x}\right)\mathrm{d}x = -\int_0^\infty e^{-t\,x}\sin x\,\mathrm{d}x$. Fie $a > 0$ oarecare. Deoarece $\left|e^{-t\,x}\sin x\right| \le e^{-ax}$, $\forall\ x \in [0, \infty)$ și $\int_0^\infty e^{-ax}\,\mathrm{d}x$ este convergentă, rezultă că $-\int_0^\infty e^{-t\,x}\sin x\,\mathrm{d}x$ este uniform convergentă pe $[a, \infty]$, $\forall\ a > 0$.

Din Teorema 3.3.4 rezultă că pentru orice $t > 0$ avem

$$F'(t) = -\int_0^{\infty} e^{-tx}\sin x\,\mathrm{d}x = \left.\frac{e^{-tx}\sin x}{t}\right|_0^{\infty} - \frac{1}{t}\int_0^{\infty} e^{-tx}\cos x\,\mathrm{d}x =$$

$$= -\frac{1}{t}\left(-\left.\frac{\cos x\, e^{-tx}}{t}\right|_0^{\infty} - \frac{1}{t}\int_0^{\infty} e^{-tx}\sin x\,\mathrm{d}x \right) = -\frac{1}{t^2} + \frac{1}{t^2}\int_0^{\infty} e^{-tx}\sin x\,\mathrm{d}x\,.$$

Mai departe avem $\left(1+\frac{1}{t^2}\right)F'(t) = -\frac{1}{t^2}$, deci $F'(t) = -\frac{1}{1+t^2}$, $t > 0$. Aşadar,

$$F(t) = -\operatorname{arctg} t + C\,,\ \forall\ t > 0 \tag{3}$$

Pe de altă parte, $\left|F(t)\right| \le \int_0^{\infty} e^{-tx}\mathrm{d}x = \frac{1}{t}$, $\forall\ t > 0$, deci

$$\lim_{t\to\infty} F(t) = 0\,. \tag{4}$$

Din (3) şi (4) deducem $0 = \lim\limits_{t\to\infty} F(t) = -\frac{\pi}{2} + C$, deci $C = \frac{\pi}{2}$. Folosind din nou (3) obţinem $F(0) = C$.

Cum $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x = F(0)$ deducem că $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$.

Teorema 3.3.5 *Fie* $f : [a, b) \times [c, d] \to \Upsilon$, *continuă. Dacă* $\int_a^b f(x,t)\mathrm{d}x$ *este uniform convergentă pe* $[c, d]$, *atunci funcţia* $F : [c, d] \to \Upsilon$, *definită prin* $F(t) = (v)\int_a^b f(x,t)\mathrm{d}x$, $t \in [c, d]$ *este continuă (deci integrabilă) pe* $[c, d]$ *şi*

$$\int_c^d F(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,t)\,\mathrm{d}t \right)\mathrm{d}x,$$

relaţie echivalentă cu

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x,t)\mathrm{d}x \right)\mathrm{d}t = (v)\int_a^b \left(\int_c^d f(x,t)\,\mathrm{d}t \right)\mathrm{d}x\,.$$

Demonstraţie.

Fie $a < b_n < b$, $b_n \to b$ şi fie $F_n(t) = \int_a^{b_n} f(x,t)\mathrm{d}x$, $t \in [c, d]$. Din Teorema 3.2.3 rezultă că $\int_c^d F_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^{b_n}\left(\int_c^d f(x,t)\,\mathrm{d}t \right)\mathrm{d}x$. Pe de altă parte, din Lema 3.3.1, rezultă că $F_n \xrightarrow{u} F$ pe $[c, d]$, de unde deducem că $\lim\limits_{n\to\infty} \int_c^d F_n(t)\,\mathrm{d}t =$ $= \int_c^d F(t)\,\mathrm{d}t$. Aşadar, avem:

$$\int_c^d F(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty} \int_c^d F_n(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty} \int_a^{b_n}\left(\int_c^d f(x,t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x .$$

Rezultă că $\exists \lim\limits_{\substack{u\to b\\ u<b}} \int_a^u\left(\int_c^d f(x,t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x = \int_c^d f(t)\,\mathrm{d}t$ (finită), deci

$\int_a^b\left(\int_c^d f(x,t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x$ este convergentă şi

$$(v)\int_a^b\left(\int_c^d f(x,t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x = \int_c^d F_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_c^d\left(\int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t .$$

3.4. Integralele lui Euler

Definiția 3.4.1 *Se numeşte funcția* ***beta*** *sau* ***integrala lui Euler de prima speță****, următoarea integrală generalizată cu parametri* :

$$B(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,\mathrm{d}x ,\ \ a > 0,\, b > 0. \tag{1}$$

Se observă că dacă $a < 1$, funcția de sub integrală nu este definită în 0 şi nu este mărginită pe (0, 1], iar dacă $b < 1$, atunci această funcție nu e definită în 1 şi nu e mărginită pe [0, 1).

Pentru început, vom arăta că integrala (1) este convergentă pentru $a > 0$ şi $b > 0$. Pentru aceasta vom descompune integrala în suma a două integrale $\int_0^1 = \int_0^{1/2} + \int_{1/2}^1$. Dacă $a \geq 1$, atunci $\int_0^{1/2} x^{a-1}(1-x)^{b-1}\mathrm{d}x$ este o integrală obişnuită deoarece funcția de sub integrală este continuă pe $\left[0,\frac{1}{2}\right]$, deci nu se pune problema convergenței.

Dacă $0 < a < 1$, atunci $1 - a < 1$ şi deoarece $\lim\limits_{x \searrow 0}\left[x^{1-a}x^{a-1}(1-x)^{b-1}\right] = 1$, din Teorema 3.1.5 rezultă că $\int_0^{1/2} x^{a-1}(1-x)^{b-1}\mathrm{d}x$ este convergentă. Dacă $b \geq 1$, atunci $\int_{1/2}^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\mathrm{d}x$ este o integrală obişnuită, deci nu se pune problema convergenței.

Dacă $0 < b < 1$, atunci $1 - b < 1$ şi deoarece

$$\lim_{x \nearrow 1}\left[(1-x)^{1-b}x^{a-1}(1-x)^{b-1}\right] = 1,$$

din Teorema 3.1.4, rezultă că $\int_{1/2}^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\mathrm{d}x$ este convergentă. Aşadar, funcția B este convergentă pentru orice $a > 0$ şi orice $b > 0$.

Teorema 3.4.1 *Funcţia beta are următoarele proprietăţi*:

(i) $B(a,b)=B(b,a)$, $a>0$, $b>0$.

(ii) *Dacă* $a>1$, *atunci are loc următoarea relaţie de recurenţă:*

$$B(a,b)=\frac{a-1}{a+b-1}B(a-1,\,b). \tag{2}$$

În particular, pentru $m, n \in \infty^*$, $m \geq 2$ *avem*

$$B(m,n)=\frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!} \tag{3}$$

(iii)
$$B(a,b)=\int_0^\infty \frac{t^{a-1}}{(1+t)^{a+b}}\,\mathrm{d}t \tag{4}$$

Demonstraţie.

Afirmaţia (i) rezultă imediat, dacă facem schimbarea de variabilă $x = 1 - t$.

Integrând prin părţi, pentru $a>1$ şi $b>0$ avem:

$$B(a,b)=-\frac{1}{b}x^{a-1}(1-x)^b\Big|_0^1+\frac{a-1}{b}\int_0^1 x^{a-2}(1-x)^b\,\mathrm{d}x=$$

$$=\frac{a-1}{b}\int_0^1 x^{a-2}\left[(1-x)^{b-1}-(1-x)^{b-1}x\right]\mathrm{d}x=\frac{a-1}{b}B(a-1,b)-\frac{a-1}{b}B(a,b).$$

Mai departe avem:

$$\left(1+\frac{a-1}{b}\right)B(a,b)=\frac{a-1}{b}B(a-1,b) \quad \text{sau} \quad B(a,b)=\frac{a-1}{a+b-1}B(a-1,b).$$

În mod asemănător se arată că dacă $b>1$, atunci

$$B(a,b)=\frac{a-1}{a+b-1}B(a,b-1).$$

Deoarece $B(a,1)=\frac{1}{a}$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ rezultă:

$$B(a,n)=\frac{n-1}{a+n-1}\cdot\frac{n-2}{a+n-2}\cdots\frac{n-(n-1)}{a+n-(n-1)}B(a,1)=\frac{(n-1)!}{a(a+1)\ldots(a+n-1)};$$

În particular, pentru $m,n\in\mathbb{N}^*$, $m>1$ avem: $B(m,n)=\frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!}$.

(iii) Considerăm schimbarea de variabilă $x=\frac{t}{1+t}$ şi obţinem

$$B(a,b)=\int_0^\infty \frac{t^{a-1}}{(1+t)^{a-1}(1+t)^{b-1}}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{(1+t)^2}=\int_0^\infty \frac{t^{a-1}}{(1+t)^{a+b}}\cdot\mathrm{d}t.$$

Definiţia 3.4.2 *Se numeşte funcţia* ***gama****, sau* ***funcţia lui Euler de speţa a doua****, următoarea integrală generalizată cu parametru* :

$$\Gamma(a)=\int_0^{\infty} e^{-x}x^{a-1}\,\mathrm{d}x\,,\ a>0. \tag{5}$$

Pentru a arăta că integrala (5) este convergentă, pentru orice $a > 0$, descompunem integrala în suma a două integrale: $\int_0^{\infty}=\int_0^1+\int_1^{\infty}$.

Dacă $a \geq 1$, $\int_0^1 e^{-x}x^{a-1}\mathrm{d}x$ este o integrală obişnuită, deoarece funcţia de sub integrală este continuă pe [0, 1], deci nu se pune problema convergenţei.

Dacă $0 < a < 1$, atunci $1 - a < 1$ şi deoarece $\lim\limits_{x\square 0}\left(x^{1-a}e^{-x}x^{a-1}\right)=1$, din Teorema 3.1.5, rezultă că $\int_0^1 e^{-x}x^{a-1}\mathrm{d}x$ este convergentă.

Pe de altă parte, observăm că $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^2e^{-x}x^{a-1}\right)=0$. Din Teorema 3.1.4, rezultă că $\int_1^{\infty} e^{-x}x^{a-1}\mathrm{d}x$ este convergentă. Aşadar, $\int_0^{\infty} e^{-x}x^{a-1}\mathrm{d}x$ este convergentă, pentru orice $a > 0$.

Teorema 3.4.2 *Funcţia* Γ *are următoarele proprietăţi*:

(i) $\Gamma(1) = 1$

(ii) $\Gamma(a + 1) = a\Gamma(a)$, $a > 0$. *În particular* $\Gamma(n + 1) = n!$, $n \in \infty^*$.

(iii) $B(a,b)=\dfrac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$, $a > 0, b > 0$.

Demonstraţie.

(i) $\Gamma(1)=\int_0^{\infty} e^{-x}\,\mathrm{d}x=-e^{-x}\Big|_0^{\infty}=1$.

(ii) $\Gamma(a+1)=\int_0^{\infty} e^{-x}x^a\,\mathrm{d}x=-e^{-x}x^a\Big|_0^{\infty}+\int_0^{\infty} e^{-x}x^{a-1}\,\mathrm{d}x=a\Gamma(a)$.

În particular, pentru $n \in \infty^*$ avem:

$\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)=n(n-1)\Gamma(n-1)=\ldots=n(n-1)\ldots 2\Gamma(1)$

Cum $\Gamma(1)=1$, rezultă $\Gamma(n+1)=n!$

Aşadar, observăm că funcţia Γ generalizează funcţia factorial, funcţie care are sens numai pentru numere naturale.

(iii) Pentru început observăm că dacă facem schimbarea de variabilă $x = ty$, $t > 0$ obţinem:

$$\Gamma(a)=t^a\int_0^{\infty} y^{a-1}e^{-ty}\,\mathrm{d}\,y \tag{6}$$

Înlocuind în (6) pe a cu $a + b$ şi pe t cu $t + 1$ obţinem:

$$\frac{\Gamma(a+b)\cdot t^{a-1}}{(1+t)^{a+b}} = t^{a-1}\int_0^{\infty} y^{a+b-1}e^{-(1+t)y}\,\mathrm{d}\,y\,.$$

Ținând seama acum de formula (4), deducem

$$\Gamma(a+b)B(a,b) = \int_0^{\infty}\frac{\Gamma(a+b)t^{a-1}}{(1+t)^{a+b}}\mathrm{d}\,t = \int_0^{\infty}\left(t^{a-1}\int_0^{\infty} y^{a+b-1}e^{-(1+t)y}\,\mathrm{d}\,y\right)\mathrm{d}\,t =$$

$$= \int_0^{\infty}\left(t^{a-1}\int_0^{\infty} y^{a+b-1}e^{-(1+t)y}\,\mathrm{d}\,t\right)\mathrm{d}\,y = \int_0^{\infty} y^{a+b-1}e^{-y}\left(\int_0^{\infty} t^{a-1}e^{-ty}\,\mathrm{d}\,y\right)\mathrm{d}\,t\,.$$

Ținând seama din nou de (6) rezultă:

$$\Gamma(a+b)B(a,b) = \int_0^{\infty} y^{a+b-1}e^{-y}\cdot\frac{1}{y^a}\Gamma(a)\,\mathrm{d}\,y = \int_0^{\infty} y^{b-1}e^{-y}\,\mathrm{d}\,y = \Gamma(a)\Gamma(b)\,.$$

Aşadar, $B(a,b) = \dfrac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$.

CAPITOLUL 4

INTEGRALE CURBILINII

4.1. DRUMURI PARAMETRIZATE

Definiția 4.1.1 *Prin drum parametrizat în* $\mathbb{R}^3\left(\mathbb{R}^2\right)$ *se înțelege orice funcție vectorială continuă definită pe un interval I din* $\mathbb{R}$ *cu valori în* $\mathbb{R}^3\left(\mathbb{R}^2\right)$. *Dacă notăm cu x, y şi z componentele scalare ale lui r, atunci* $r(t)=\left(x(t),\ y(t),\ z(t)\right)$, $\forall\ t \in I$.

Ecuațiile $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $t \in I$ se numesc ecuațiile parametrice ale drumului *r*, sau o reprezentare a drumului, iar *t* se numeşte parametru. Imaginea directă *r*(*I*) a intervalului *I* prin funcția vectorială *r*, adică mulțimea $\left\{\left(x(t),\ y(t),\ z(t)\right);\ t \in I\right\}$ se numeşte suportul (urma, hodograful, traiectoria) drumului *r*. Dacă *I* este un interval compact [*a*, *b*], atunci suportul său este o mulțime compactă şi conexă din $\mathbb{R}^3\left(\mathbb{R}^2\right)$. În acest caz, punctele *r*(*a*) şi *r*(*b*) se numesc capetele (extremitățile) drumului. Dacă *r*(*a*) = *r*(*b*) drumul se numeşte închis.

Exemplul 4.1.1 Fie drumul $r : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ definit prin:
$r(t)=\left(R\cos t, R\sin t\right)$, $t \in [0, 2\pi]$. Ecuațiile parametrice sunt:

$$\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t,\ t \in \left[0, 2\pi\right]. \end{cases}$$

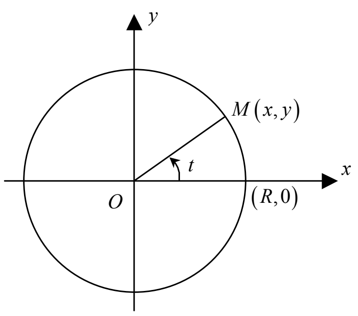


Fig. 1

Observăm că pentru orice $t \in \left[0, 2\pi\right]$, punctul $\left(x(t),\ y(t)\right)$ verifică ecuația $x^2 + y^2 = R^2$. Rezultă că suportul acestui drum este cercul cu centrul în origine şi de rază *R*. Parametrul *t* are în acest caz o interpretare geometrică evidentă şi anume, este unghiul dintre raza corespunzătoare punctului *M*(*x*, *y*) şi direcția pozitivă a axei *Ox*. deoarece $r(0) = r(2\pi) = (R, 0)$, drumul este închis.

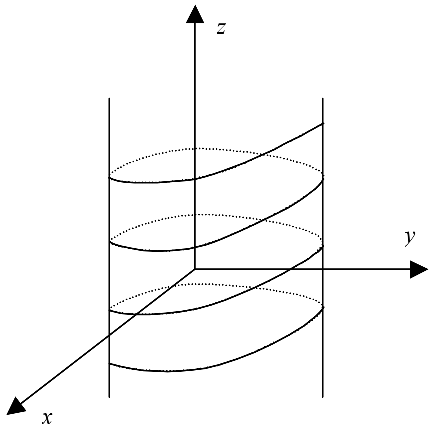


Fig. 2

Exemplul 4.1.2 Fie drumul $r : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ definit astfel: $r(t) = \left(R\cos t,\ R\sin t,\ ht\right)$, $t \in [0, 2\pi]$.
Ecuațiile parametrice sunt:

$$\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \\ z = ht\ , \quad t \in [0, 2\pi]. \end{cases}$$

Suportul acestui drum este elicea circulară de pas h.

Definiția 4.1.2 *Dacă funcția vectorială r este injectivă, spunem că drumul este simplu* (*fără puncte multiple*). *În cazul unui drum închis, acesta este simplu dacă egalitatea* $r(t_1) = r(t_2)$ *implică sau* $t_1 = t_2$ *sau cel puțin unul din numerele* t_1 *şi* t_2 *este egal cu a şi celălalt cu b, unde cu a şi b am notat capetele intervalului I.*

Drumurile prezentate în Exemplul 4.1.1. şi 4.1.2 sunt simple. Un exemplu de drum care are puncte multiple este faliul lui Descartes:

Exemplul 4.1.3 Considerăm ecuațiile parametrice:

$$\begin{cases} x = \dfrac{3at}{1+t^2} \\ y = \dfrac{3at^2}{1+t^2}\ , \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Suportul acestui drum este reprezentat în Fig. 3. Se observă că originea O este punct multiplu.

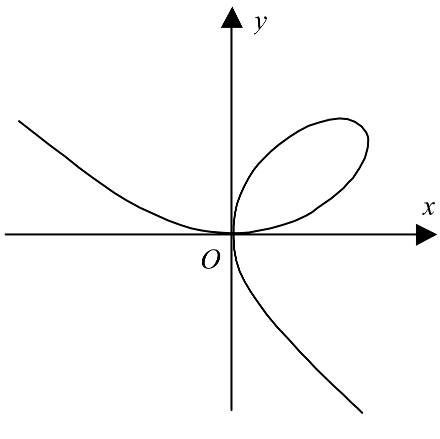


Fig. 3

Definiția 4.1.3 *Un drum* $r = (x, y, z) : I \to \mathbb{R}^3$ *se numeşte neted dacă x, y, z, sunt de clasă* C^1 *pe I şi* $x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t) > 0$, $\forall\ t \in I$. *Un astfel de drum are proprietatea că în orice punct al suportului său admite tangentă.*

Un drum care nu este neted, se spune că are puncte singulare. Un punct $t_0 \in I$ *se numeşte singular dacă* $x'(t_0) = y'(t_0) = z'(t_0) = 0$. *Dacă* $t_0 \in I$ *este un*

punct singular, atunci în punctul $M_0\left[x(t_0),y(t_0),z(t_0)\right]$ *de pe suport, tangenta nu este definită.*

Un drum se consideră orientat în sensul creşterii parametrului.

Definiția 4.1.4 *Două drumuri* $r_1 : I_1 \to \mathbb{R}^3$ *şi* $r_2 : I_2 \to \mathbb{R}^3$ *se numesc echivalente şi se notează acest lucru cu* $r_1 \sim r_2$, *dacă există o funcție* $\lambda : I_1 \to I_2$ *bijectivă, strict monotonă, de clasă* C^1 *cu* $\lambda'(t_1) \neq 0$, $\forall\ t_1 \in I_1$, *astfel încât* $r_1(t_1) = r_2\left[\lambda(t_1)\right]$, $\forall\ t_1 \in I_1$.

O astfel de funcție λ se numeşte şi schimbare de parametru. Din definiție rezultă că dacă λ este o schimbare de parametru, atunci $\lambda'(t_1) > 0$, $\forall\ t_1 \in I$ sau $\lambda'(t_1) < 0$, $\forall\ t_1 \in I$.

Dacă $\lambda' > 0$ pe *I*, deci λ este strict crescătoare, atunci spunem că drumurile r_1 şi r_2 sunt echivalente cu aceeaşi orientare. În caz contrar, spunem că r_1 şi r_2 sunt echivalente cu orientare schimbată.

Este evident că două drumuri echivalente au acelaşi suport.

Exemplul 4.1.4 *Fie drumurile* $r_i : I_i \to \mathbb{R}^2$, *i* = 1,2, *definite astfel:*

$r_1(t_1) = (R\sin t_1, R\cos t_1)$, $\forall\ t_1 \in I_1 = \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, *respectiv*

$r_2(t_2) = \left(t_2, \sqrt{R^2 - t_2^2}\right)$, $\forall\ t_2 \in I_2 = (0, R)$.

Aceste drumuri au acelaşi suport şi anume arcul $\overset{\frown}{AB}$ al cercului cu centrul în origine şi de rază *R*. (Fig. 4).

Observăm că funcția $\lambda : I_1 \to I_2$ definită prin $\lambda(t_1) = R\sin t_1$, $\forall\ t_1 \in I_1$ este bijectivă, de clasă C^1 şi

$\lambda'(t_1) = R\cos t_1 > 0$, $\forall\ t_1 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Mai mult, observăm că

$r_2(\lambda(t_1)) = \left(\lambda(t_1), \sqrt{R^2 - \lambda^2(t_1)}\right) =$

$= \left(R\sin t_1,\ R\cos t_1\right) = r_1(t_1)$, $\forall\ t_1 \in I_1$.

Rezultă că λ este o schimbare de parametru şi deci că cele două drumuri sunt echivalente cu aceeaşi orientare.

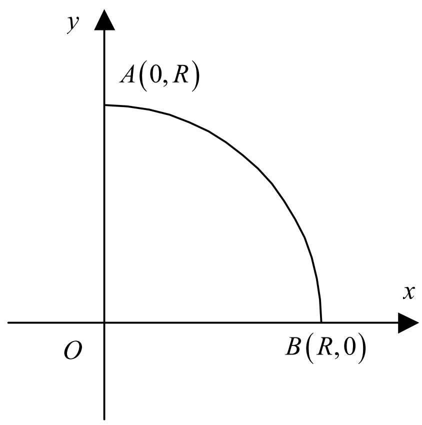


Fig. 4

Considerăm acum drumul $r_3 : I_3 \to \mathbb{R}^2$, $r_3(t_3) = (R\cos t_3, R\sin t_3)$,
$\forall\ t_3 \in I_3 = \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Observăm, ca mai sus, că funcția $\mu : I_3 \to I_2$ definit prin $\mu(t_3) = R\cos t_3$,
$\forall\ t_3 \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ este o schimbare de parametru. Cum $\mu'(t_3) = -R\sin t_3 < 0$,
$\forall\ t_3 \in I_3$, rezultă că μ este strict descrescătoare.

Drumurile r_3 și r_2 (respectiv r_3 și r_1) sunt echivalente cu orientări diferite. Orientarea drumurilor r_1 și r_2, orientare dată de sensul creșterii parametrului, este de la *A* către *B*, în timp ce orientarea drumului r_3 este de la *B* către *A*.

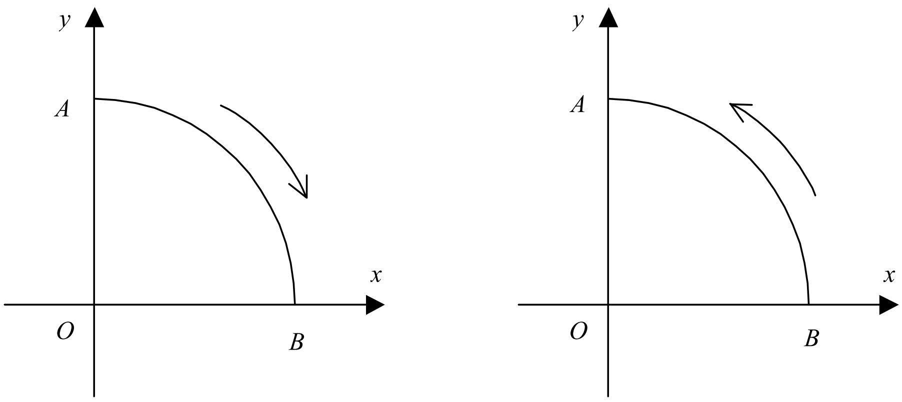


Fig. 5

Definiția 4.1.5 *Se numește curbă parametrizată orice clasă de drumuri parametrizate echivalente.*

Așadar, γ este curbă parametrizată dacă există un drum parametrizat
$r : I \to \mathbb{R}^3\left(\mathbb{R}^2\right)$ astfel încât: $\gamma = \left\{\rho : J \to \mathbb{R}^3\left(\mathbb{R}^2\right) \text{ drum parametrizat} \,\middle|\, \rho \sim r\right\}$.

Cum $r \sim r$ rezultă că $r \in \gamma$.

O curbă parametrizată este simplă (închisă, netedă) dacă drumul care o determină este simplu (închis sau neted). O curbă simplă se consideră că este orientată pozitiv, dacă drumul care o definește este orientat în sensul creșterii parametrului și negativ în caz contrar.

Fie γ o curbă parametrizată simplă și netedă, și fie $r : I \to \mathbb{R}^3\left(\mathbb{R}^2\right)$ drumul parametrizat care o definește, orientat în sensul creșterii parametrului. Vom nota cu γ_+ mulțimea tuturor drumurilor parametrizate echivalente cu *r* și care au aceeași

orientare cu *r*. Evident, $r \in \gamma_+$. Vom nota cu γ_- mulțimea tuturor drumurilor parametrizate echivalente cu *r* care au orientare opusă lui *r*.

Suportul unei curbe parametrizate *γ* este suportul drumului care o defineşte şi evident, acesta coincide cu suportul oricărui reprezentant al curbei *γ*.

Fie *γ* curba parametrizată definită de drumul r_1. Suportul său este arcul $\overset{\frown}{AB}$ din Fig. 4. Suportul curbei γ_+ este arcul $\overset{\frown}{AB}$ (orientat de la *A* către *B*), în timp ce suportul curbei γ_- este arcul $\overset{\frown}{BA}$. Evident $r_2 \in \gamma_+$ şi $r_3 \in \gamma_-$. În continuare, vom nota cu $\{\gamma\}$ suportul curbei *γ*. De asemenea, ori de câte ori nu sunt prilejuri de confuzie, vom identifica o curbă cu unul din reprezentanții săi.

Definiția 4.1.6 *Fie* $r_1 : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ *şi* $r_2 : [b,c] \to \mathbb{R}^3$ *două drumuri parametrizate cu proprietatea că* $r_1(b) = r_2(b)$. *Se numeşte justapunerea drumurilor* r_1 şi r_2 *şi se notează cu* $r_1 \cup r_2$ *următorul drum*:

$$\left(r_1 \cup r_2\right)(t) = \begin{cases} r_1(t) & \text{dacă} \quad t \in [a,b] \\ r_2(t) & \text{dacă} \quad t \in [b,c]. \end{cases}$$

Dacă γ_i este curba definită de r_i, *i* = 1,2, atunci $\gamma_1 \cup \gamma_2$ este curba definită de drumul $r_1 \cup r_2$. O curbă se numeşte netedă pe porțiuni dacă este justapunerea unui număr finit de curbe netede.

4.2. CURBE RECTIFICABILE

Noțiunea de curbă (drum) introdusă în § 4.1 este destul de generală şi de aceea, în anumite cazuri (în special în cazul curbelor care admit puncte multiple), suportul unei curbe poate să difere esențial față de imaginea intuitivă pe care o avem despre o curbă. Giuseppe Peano a arătat că se pot defini două funcții continue $x = x(t)$, $y = y(t)$ pe intervalul [0, 1], deci un drum, astfel încât, atunci când parametrul *t* parcurge intervalul [0, 1], punctul corespunzător $(x(t), y(t))$ porneşte din punctul (0, 0) care corespunde valorii $t = 0$, trece prin toate punctele pătratului $[0, 1] \times [0, 1]$ şi ajunge în vârful (1, 1) care corespunde valorii $t = 1$. Cu alte cuvinte, suportul acestui drum umple un pătrat. Este clar că noțiunea de lungime pentru un asemenea drum nu are sens.

În cele ce urmează vom introduce noțiunea de drum rectificabil (care are lungime) şi vom arăta cum se calculează lungimea unui drum rectificabil cu ajutorul integralei definite.

Fie $r : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ un drum şi fie $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $t \in [a, b]$ ecuațiile sale parametrice. Considerăm o diviziune oarecare Δ a intervalului [*a*, *b*],

$\Delta\ : a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{i-1} < t_i < \ldots < t_n = b$ şi notăm cu M_i punctul de coordonate $\left(x(t_i), y(t_i), z(t_i)\right)$, $i = \overline{0,n}$. Fie $L_\Delta(r) = \sum\limits_{i=1}^{n} \|M_{i-1}M_i\|$ lungimea liniei poligonale obținută prin unirea suucesivă, prin segmente de dreaptă, a punctelor M_i.

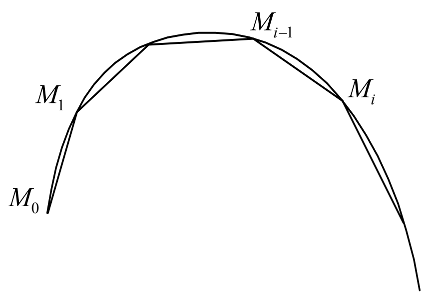


Fig. 6

Este evident că dacă $\Delta' \prec \Delta''$, atunci $L_{\Delta'}(r) \le L_{\Delta''}(r)$.

Mulțimea $\left\{L_\Delta(r)\right\}_\Delta$, când Δ parcurge toate diviziunile posibile ale intervalului [*a*, *b*] este o mulțime de numere pozitive, care poate fi mărginită superior sau nu.

Definiția 4.2.1 *Spunem că drumul r este rectificabil dacă mulțimea* $\left\{L_\Delta(r)\right\}_\Delta$ *este majorată. Pentru un drum rectificabil se numeşte lungimea sa următorul număr*: $L(r) = \sup\limits_{\Delta}\left\{L_\Delta(r)\right\}_\Delta < \infty$.

Lema 4.2.1 *Pentru orice 4 numere reale* a_1, a_2, b_1, b_2, *are loc inegalitatea*:

$$\left|\sqrt{a_1^2 + a_2^2} - \sqrt{b_1^2 + b_2^2}\right| \le |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| \tag{1}$$

Demonstrație.

Amplificând cu conjugata şi ținând seama de inegalitatea triunghiului obținem

$$\begin{aligned} \left|\sqrt{a_1^2 + a_2^2} - \sqrt{b_1^2 + b_2^2}\right| &= \frac{\left|a_1^2 + a_2^2 - b_1^2 - b_2^2\right|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} + \sqrt{b_1^2 + b_2^2}} \le \\ &\le \frac{|a_1 - b_1||a_1 + b_1| + |a_2 - b_2||a_2 + b_2|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} + \sqrt{b_1^2 + b_2^2}} \end{aligned} \tag{2}$$

Pe de altă parte avem: $|a_1 + b_1| \le |a_1| + |b_1| \le \sqrt{a_1^2 + a_2^2} + \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$ şi analog $|a_2 + b_2| \le |a_2| + |b_2| \le \sqrt{a_1^2 + a_2^2} + \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$.

Ținând seama de aceste inegalități în (2) rezultă

$\left|\sqrt{a_1^2 + a_2^2} + \sqrt{b_1^2 + b_2^2}\right| \le |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2|$.

Observația 4.2.1 Inegalitatea (1) rămâne valabilă pentru orice $2n$ numere reale $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1,n}$. De exemplu pentru $n = 3$ avem

$$\left|\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} - \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}\right| \le |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + |a_3 - b_3| \tag{3}$$

Demonstrația este practic aceeaşi cu demonstrația lemei.

Teorema 4.2.1 *Fie* $r : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ *un drum parametrizat definit astfel*: $r(t) = \left(x(t), y(t), z(t)\right)$, $t \in [a, b]$. *Dacă r este neted, atunci r este rectificabil şi lungimea sa este* $L(r) = \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\,\mathrm{d}t$.

Demonstrație.

Fie $\Delta : a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{i-1} < t_i < \ldots < t_n = b$ o diviziune oarecare a intervalului [*a*, *b*], şi fie $L_\Delta(r)$ lungimea liniei poligonale înscrise în suportul drumului *r*. Avem:

$$L_\Delta(r) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\left(x(t_i) - x(t_{i-1})\right)^2 + \left(y(t_i) - y(t_{i-1})\right)^2 + \left(z(t_i) - z(t_{i-1})\right)^2} .$$

Din teorema Lagrange rezultă că există $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ în intervalul deschis (t_{i-1}, t_i), astfel încât

$$L_\Delta(r) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{x'^2(\alpha_i) + y'^2(\beta_i) + z'^2(\gamma_i)}\,(t_i - t_{i-1}) \tag{4}$$

Funcția g : [*a*, *b*] $\to \mathbb{R}$ definită prin: $g(t) = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}$, $t \in$ [*a*, *b*], este o funcție continuă, deoarece funcțiile x', y', z' sunt continue prin ipoteză.

Considerăm suma Riemann

$$\sigma_\Delta(g,\alpha) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{x'^2(\alpha_i) + y'^2(\alpha_i) + z'^2(\alpha_i)}\,(t_i - t_{i-1}) \tag{5}$$

Deoarece g este integrabilă pe [*a*, *b*], rezultă că $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ \delta'_\varepsilon > 0$ astfel încât $\forall\ \Delta$ cu $\|\Delta\| < \delta'_\varepsilon$ şi oricare ar fi punctele intermediare $\alpha = (\alpha_i)$ avem

$$\left|\sigma_\Delta(g,\alpha) - \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t\right| < \varepsilon \tag{6}$$

Pe de altă parte, din inegalitatea (3) şi inegalitatea generalizată a triunghiului, rezultă:

$$\left|L_\Delta(r) - \sigma_\Delta(g,\varepsilon)\right| \le \sum_{i=1}^{n} \left(\left|y'(\beta_i) - y'(\alpha_i)\right| + \left|z'(\gamma_i) - z'(\alpha_i)\right|\right)(t_i - t_{i-1}) \tag{7}$$

Cum y' şi z' sunt uniform continue pe $[a, b]$, rezultă că există $\delta''_\varepsilon > 0$ cu proprietatea că $\forall\ t', t''$ în $[a, b]$ cu distanța $|t' - t''| < \delta''_\varepsilon$ avem

$$\left|y'(t') - y'(t'')\right| < \frac{\varepsilon}{b-a} \text{ şi } \left|z'(t') - z'(t'')\right| < \frac{\varepsilon}{b-a} \tag{8}$$

Dacă alegem acum diviziunea Δ astfel încât $\|\Delta\| < \delta''_\varepsilon$, atunci $|\beta_i - \gamma_i| \le \le t_i - t_{i-1} \le \|\Delta\| < \delta''_\varepsilon$ şi analog $|\gamma_i - \alpha_i| < \delta''_\varepsilon$ şi conform (8) avem

$$\left|y'(\beta_i) - y'(\alpha_i)\right| < \frac{\varepsilon}{b-a}, \ \left|z'(\gamma_i) - z'(\alpha_i)\right| < \frac{\varepsilon}{b-a} \tag{9}$$

Ținând seama de (9) în (7) rezultă:

$$\left|L_\Delta(r) - \sigma_\Delta(g,\alpha)\right| < \frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{i=1}^{n}(t_i - t_{i-1}) = \varepsilon .$$

Aşadar, am demonstrat că $\forall\ \Delta$ cu $\|\Delta\| < \delta''_\varepsilon$ avem

$$\left|L_\Delta(r) - \sigma_\Delta(g,\alpha)\right| < \varepsilon \tag{10}$$

Cum g este mărginită pe $[a, b]$, rezultă că $\sigma_\Delta(g,\alpha)$ este mărginită pentru orice Δ şi orice α şi, ținând seama de (10) că mulțimea $\{L_\Delta(r)\}_\Delta$ este mărginită. Prin urmare am demonstrat că drumul r este rectificabil.

Fie $L(r) = \sup\limits_{\Delta} L_\Delta(r)$. Din definiția marginii superioare rezultă că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ există o diviziune Δ_n a intervalului $[a, b]$ astfel încât

$$L(r) - \frac{1}{n} < L_{\Delta_n}(r) \le L(r) \tag{11}$$

Mai mult, putem presupune că $\|\Delta_n\| < \frac{1}{n}$, pentru că în caz contrar, rafinăm această diviziune până obținem o diviziune $\Delta'_n \succ \Delta_n$ cu această proprietate. Cum $L_{\Delta'_n}(r) \ge L_{\Delta_n}(r)$ rezultă că $L_{\Delta'_n}(r)$ satisface (11).

Considerăm acum o diviziune Δ_n a intervalului $[a, b]$ cu proprietatea $\|\Delta_n\| < \min\left(\frac{1}{n}; \sigma'_\varepsilon; \sigma''_\varepsilon\right)$ şi pentru care sunt adevărate inegalitățile (11). Din (6), (10) şi (11) rezultă

$$\begin{aligned}\left|L(r) - \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t\right| &\le \left|L(r) - L_{\Delta_n}(r)\right| + \left|L_{\Delta_n}(r) - \sigma_{\Delta_n}(g,\alpha)\right| + \\ &+ \left|\sigma_{\Delta_n}(g,\alpha) - \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t\right| < \frac{1}{n} + 2\varepsilon\end{aligned} \tag{12}$$

Cum inegalitatea (12) are loc pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ şi orice $\varepsilon > 0$ rezultă că

$$L(r) = \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\,\mathrm{d}t$$

şi cu aceasta teorema este demonstrată.

Observaţia 4.2.2 Fie r un drum parametrizat în $\mathbb{R}^2$ definit prin $r(t) = \left(x(t), y(t)\right)$, $t \in [a, b]$. Dacă r este neted, atunci r are lungime şi aceasta este $L(r) = \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\, \mathrm{d}t$.

Observaţia 4.2.3 Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcție de clasă C^1. Lungimea graficului acestei funcții este egală cu $L(r) = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\, \mathrm{d}x$.

Într-adevăr, funcția f defineşte un drum neted şi anume $r(t) = \left(t, f(t)\right)$, $t \in [a, b]$. Graficul lui f coincide cu suportul acestui drum. Afirmația rezultă acum din Observația 4.2.2.

Observaţia 4.2.4 Dacă r este un drum rectificabil, atunci orice alt drum echivalent cu r este rectificabil şi are aceeaşi lungime ca r.

Într-adevăr, fie $r_i : \left[a_i, b_i\right] \to \mathbb{R}^3$, $i = 1{,}2$ două drumuri echivalente şi fie $\lambda : \left[a_1, b_1\right] \to \left[a_2, b_2\right]$, bijectivă, strict monotonă de clasă C^1 cu proprietatea $r_2\left[\lambda(t)\right] = r_1(t)$, $\forall\ t \in \left[a_1, b_1\right]$.

Dacă $\Delta_1 = \{t_i\}$ este o diviziune oarecare a intervalului $\left[a_1, b_1\right]$, atunci $\Delta_2 = \lambda\left(\Delta_1\right) = \left\{\lambda\left(t_i\right)\right\}$ este o diviziune a intervalului $\left[a_2, b_2\right]$ şi reciproc, orice diviziune Δ_2 a intervalului $\left[a_2, b_2\right]$ este de acest tip. Cum $L_{\Delta_1}\left(r_1\right) = L_{\Delta_2}\left(r_2\right)$ rezultă că $L\left(r_1\right) = \sup\limits_{\Delta_1} L_{\Delta_1}\left(r_1\right) = \sup\limits_{\Delta_2} L_{\Delta_2}\left(r_2\right)$.

Definiția 4.2.2 *O curbă este rectificabilă dacă este o clasă de echivalență a unui drum rectificabil. Lungimea unei curbe rectificabile este lungimea oricărui drum din această clasă de echivalență.*

Exemplul 4.2.1 *Lungimea cercului*

O reprezentare parametrică a cercului este $x = R\cos t$, $y = R\sin t$, $t \in [0, 2\pi]$. Conform Teoremei 4.2.1 avem:

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\, \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} R\, \mathrm{d}t = 2\pi R.$$

Exemplul 4.2.2 *Lungimea unei ramuri de cicloidă*

Cicloida este curba parametrizată definită de drumul

$x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $t \in [0, \pi]$.

Observăm că

$$x'^2(t) + y'^2(t) = 2a^2(1 - \cos t) = = 4a^2 \sin^2 \frac{t}{2}.$$ Rezultă că

$$L = \int_0^{2\pi} 2a \sin \frac{t}{2} \mathrm{d}t = = -4a \cos \frac{t}{2} \Big|_0^{2\pi} = 8a.$$

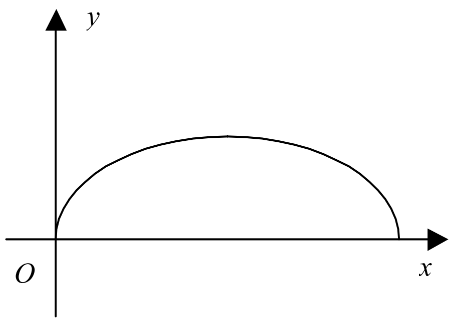


Fig. 7

Exemplul 4.2.3 Lungimea lănțişorului

Lănțişorul este graficul funcției

$f(x) = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$, $x \in [a, b]$.

Din Observația 4.2.3 deducem

$$L = \int_0^b \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 \frac{x}{a}} \mathrm{d}x =$$

$$= \int_0^b \operatorname{ch} \frac{x}{a} \mathrm{d}x = a \operatorname{sh} \frac{x}{a} \Big|_0^b = a \operatorname{sh} \frac{b}{a}.$$

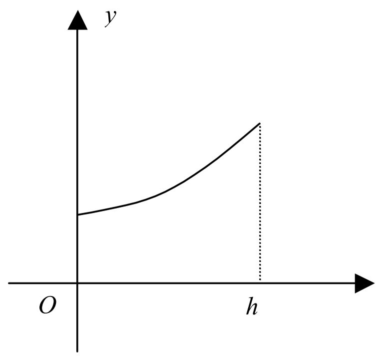


Fig. 8

Exemplul 4.2.4 *Lungimea elipsei*

O reprezentare parametrică a elipsei de ecuație $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ este : $x = a \sin t$, $y = b \cos t$, $t \in 0, 2\pi]$.

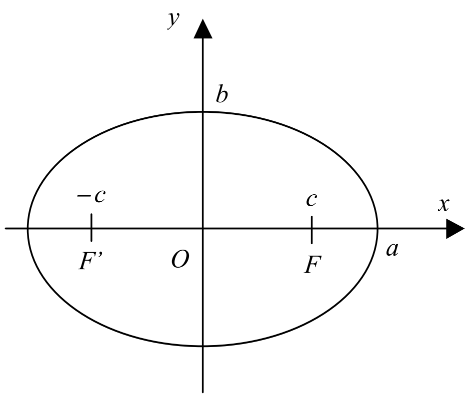


Fig. 9

Este suficient să calculăm un sfert din lungimea elipsei. Avem:

$$\frac{L}{4} = \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t} \, \mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2)\sin^2 t} \, \mathrm{d}t.$$

Dacă notăm cu c distanța focală şi cu ε excentricitatea, atunci

$a^2 - b^2 = c^2$ şi $\varepsilon = \frac{c}{a} < 1$.

În continuare rezultă

$\dfrac{L}{4} = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\varepsilon^2 \sin^2 t}\,\mathrm{d}t$, unde

$0 < \varepsilon < 1$. Suntem conduşi astfel la calculul integralei:

$\int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\varepsilon^2 \sin^2 t}\,\mathrm{d}t$, $0 < \varepsilon < 1$.

Din păcate, primitiva acestei funcții nu este o funcție elementară şi deci calculul acestei integrale nu se poate face cu formula Leibniz-Newton.

Încercarea de a calcula lungimea elipsei ne-a condus la o integrală ce nu poate fi calculată exact. O asemenea integrală se numeşte integrală eliptică.

Se cunosc următoarele tipuri de integrale eliptice:

a) Integrala eliptică de primul tip:

$$K(\kappa) = \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{1-\kappa^2 \sin^2 \varphi}}, \quad \kappa \in (0,1)$$

b) Integrala eliptică de tipul doi:

$$E(\kappa) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\kappa^2 \sin^2 \varphi}\,\mathrm{d}\varphi, \quad \kappa \in (0,1)$$

c) Integrala eliptică de tipul trei:

$$F(\kappa, h) = \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\varphi}{\left(1+h\sin^2 \varphi\right)\sqrt{1-\kappa^2 \sin^2 \varphi}}$$

, $\kappa \in (0,1)$.

Calculul acestor integrale se face cu metode aproximative şi s-au întocmit tabele cu valorile lor (aproximative) pentru diferite valori ale parametrilor κ, respectiv κ şi *h*.

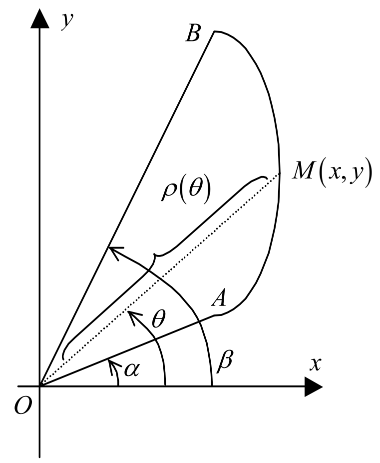


Fig. 10

Observația 4.2.5 Fie $\rho = \rho(\theta)$, $\theta \in [\alpha, \beta]$ o funcție de clasă C^1 şi fie drumul $r : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2$ definit de: $r(\theta) = \left(\rho(\theta)\cos\theta, \rho(\theta)\sin\theta\right)$, $\forall\ \theta \in [\alpha, \beta]$. Drumul r este rectificabil şi lungimea sa este:

$L(r) = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2(\theta) + \rho'^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta$.

Într-adevăr, o reprezentare parametrică a drumului *r* este:

$$x = \rho(\theta)\cos\theta,\ y = \rho(\theta)\sin\theta,\ \theta \in [\alpha, \beta].$$

Suportul acestui drum este arcul $\overset{\frown}{AB}$, reprezentat în Fig. 10.

Conform Teoremei 4.2.1 avem:

$$L(r) = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\rho'\cos\theta - \rho\sin\theta\right)^2 + \rho'\sin\theta - \rho\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\rho'^2(\theta) + \rho^2(\theta)\right)}\,\mathrm{d}\theta\,.$$

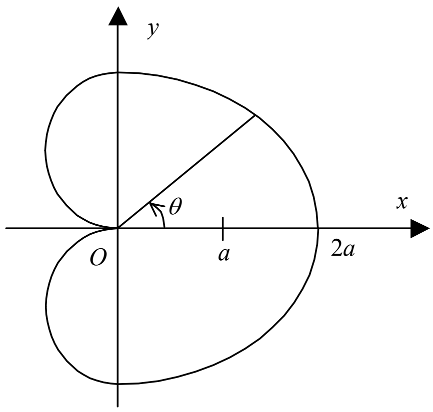


Fig. 11

Exemplul 4.2.5 *Lungimea cardioidei*

Fie $\rho(\theta) = a\left(1+\cos\theta\right)$, $\theta \in [0,2\pi]$.

Suportul drumului determinat de această funcție este reprezentat în Fig. 11. Din motive de simetrie, este suficient să calculăm jumătate din lungimea acestui drum. Avem

$$\frac{L}{2} = \int_0^\pi \sqrt{a^2\left(a+\cos\theta\right)^2 + a^2\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta =$$

$$= \int_0^\pi \sqrt{2a^2\left(a+\cos\theta\right)}\,\mathrm{d}\theta =$$

$$= 2a\int_0^\pi \cos\frac{\theta}{2}\,\mathrm{d}\theta = 4a.$$

Aşadar, lungimea cardioidei este $L = 8a$.

Observația 4.2.6 Din Teorema 4.2.1 rezultă că dacă $r_1 : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ şi $r_2 : [b,c] \to \mathbb{R}^3$ sunt două drumuri parametrizate netede şi dacă $r = r_1 \cup r_2$ este drumul obținut prin justapunerea lor, atunci r este rectificabil şi

$$L(r) = L\left(r_1\right) + L\left(r_2\right).$$

Mai mult, orice curbă netedă pe porțiuni este rectificabilă şi lungimea sa este suma lungimilor porțiunilor sale netede.

4.3. REPREZENTAREA NORMALĂ A UNEI CURBE RECTIFICABILE

Fie $r : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ un drum parametrizat neted, definit prin $r(t) = \left(x(t), y(t), z(t)\right)$. Conform Teoremei 4.2.1 acest drum este rectificabil şi lungimea sa este:

$$L = L(r) = \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\,\mathrm{d}t\,.$$

Pentru orice $t \in [a, b]$ notăm cu

$$s = \lambda(t) = \int_a^t \sqrt{x'^2(u) + y'^2(u) + z'^2(u)}\,\mathrm{d}u\,.$$

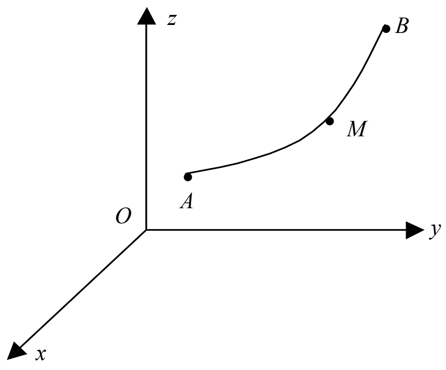


Fig. 12

Dacă M este punctul de coordonate $\left(x(t), y(t), z(t)\right)$, atunci $s = \lambda(t)$ reprezintă lungimea arcului $\overset{\frown}{AM}$.

Deoarece $\lambda'(t) = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} > 0$, $\forall$ $t \in [a, b]$, $\lambda(a) = 0$ şi $\lambda(b) = L$, rezultă că $\lambda : [a, b] \to [0, L]$ este o funcţie de clasă C^1, strict crescătoare şi bijectivă. Inversa sa $\lambda^{-1} : [0, L] \to [a, b]$ este de asemenea de clasă C^1.

Considerăm funcţia vectorială $\rho : [0, L] \to \Upsilon^3$ definită prin
$\rho(s) = r\left[\lambda^{-1}(s)\right]$, $s \in [0, L]$.

Este clar că drumurile r şi ρ sunt echivalente şi că funcţia λ este o schimbare de parametru.

Dacă notăm cu $\tilde{x}(s) = x\left[\lambda^{-1}(s)\right]$, $\tilde{y}(s) = y\left[\lambda^{-1}(s)\right]$ şi $\tilde{z}(s) = z\left[\lambda^{-1}(s)\right]$, $\forall$ $s \in [0, L]$, atunci $x = \tilde{x}(s)$, $y = \tilde{y}(s)$, $z = \tilde{z}(s)$, $s \in [0, L]$ constituie o reprezentare parametrică a drumului ρ şi deci a lui r (deoarece $\rho \sim r$).

Definiţia 4.3.1 *reprezentarea parametrică* $x = \tilde{x}(s)$, $y = \tilde{y}(s)$, $z = \tilde{z}(s)$, $s \in [0, L]$ *poartă numele de reprezentarea parametrică* ***normală*** *a drumului r.*

În reprezentarea parametrică normală, parametrul s reprezintă lungimea arcului $\overset{\frown}{AM}$ unde $A\left(\tilde{x}(0), \tilde{y}(0), \tilde{z}(0)\right)$ şi $M\left[\tilde{x}(s), \tilde{y}(s), \tilde{z}(s)\right]$.

O proprietate importantă a reprezentării normale este următoarea $\left\|\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}s}\right\| = 1$.

Într-adevăr, $\rho = r\left[\lambda^{-1}(s)\right]$, $s \in [0, L]$. Ţinând seama de regulile de derivare a funcţiilor compuse şi inverse, şi de faptul că $\lambda'(t) = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}$, rezultă:

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}s} = \frac{dr\left[\lambda^{-1}(s)\right]}{d\left[\lambda^{-1}(s)\right]} \cdot \frac{d\left(\lambda^{-1}(s)\right)}{ds} = \frac{dr(t)}{dt} \cdot \frac{1}{\lambda'(t)} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}}\left(x'(t), y'(t), z'(t)\right), \text{ unde } t = \lambda^{-1}(s).$$

Aşadar, avem

$$\left\|\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}s}\right\| = \frac{1}{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}}\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} = 1.$$

Din punct de vedere geometric $\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}s}$ reprezintă versorul tangentei la curbă, orientată în sensul creşterii parametrului *s*, adică de la *A* către *B*.

Exemplul 4.3.1 Fie drumul $r:\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R}^2$ definit prin $r(t)=\left(R\sin t, R\cos t\right)$, $t\in\left[0,\pi/2\right]$. Avem:

$L=L(s)=\int_0^{\pi/2}\sqrt{r^2\cos^2 t+R^2\sin^2 t}\,\mathrm{d}t=R\cdot\pi/2$ şi

$s=\lambda(t)=\int_0^t\sqrt{R^2\cos^2 u+R^2\sin^2 u}\,\mathrm{d}u=R\cdot t$, $t\in\left[0,\pi/2\right]$. Funcția inversă este: $t=\lambda^{-1}(s)=\frac{s}{R}$, $s\in\left[0,\frac{R\pi}{2}\right]$.

Reprezentarea normală este:

$\tilde{x}(s)=R\sin\frac{s}{R}$, $\tilde{y}(s)=R\cos\frac{s}{R}$, $s\in\left[0,\frac{R\pi}{2}\right]$.

Drumul $\rho=\rho(s)=\left(\tilde{x}(s),\tilde{y}(s)\right)$, $s\in\left[0,\frac{R\pi}{2}\right]$ este echivalent cu drumul *r* şi are aceeaşi orientare cu acesta.

Dacă notăm cu γ_+ curba determinată de drumul *r* orientat în sensul creşterii parametrului *t*, atunci $\rho\in\gamma_+$.

Exemplul 3.4.2 Fie $r:[0,2\pi]\to\mathbb{R}^3$ drumul parametrizat definit prin $r(t)=\left(R\cos t, R\sin t, ht\right)$, $t\in[0,2\pi]$. Avem

$L=\int_0^{2\pi}\sqrt{R^2\sin^2 t+R^2\cos^2 t+h^2}\,\mathrm{d}t=2\pi\sqrt{R^2+h^2}$;

$s=\lambda(t)=\int_0^t\sqrt{R^2\sin^2 u+R^2\cos^2 u+h^2}\,\mathrm{d}u=t\sqrt{R^2+h^2}$, $t\in[0,2\pi]$.

Funcția inversă este $t=\lambda^{-1}(s)=\frac{s}{\sqrt{R^2+h^2}}$, $s\in\left[0,2\pi\sqrt{R^2+h^2}\right]$ şi reprezentarea normală este $\tilde{x}(s)=R\cos\frac{s}{\sqrt{R^2+h^2}}$, $\tilde{y}(s)=R\sin\frac{s}{\sqrt{R^2+h^2}}$, $\tilde{z}(s)=\frac{hs}{\sqrt{R^2+h^2}}$, $s\in\left[0,2\pi\sqrt{R^2+h^2}\right]$.

4.4. INTEGRALE CURBILINII DE PRIMA SPEȚĂ

Fie γ o curbă netedă şi fie $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $t \in [a, b]$ o reprezentare parametrică a sa. O astfel de curbă este rectificabilă şi lungimea sa este $L = \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\,\mathrm{d}t$. Fie de asemenea, $x = \tilde{x}(s)$, $y = \tilde{y}(s)$, $z = \tilde{z}(s)$, $s \in [0, L]$ reprezentarea normală a curbei γ şi fie f o funcție reală definită pe suportul curbei γ sau pe o mulțime din $\mathbb{R}^3$ care conține acest suport.

Definiția 4.4.1. *Se numeşte integrala curbilinie de prima speță a funcției f pe curba γ, următoarea integrală definită:* $\int_0^L \left[\tilde{x}(s), \tilde{y}(s), \tilde{z}(s)\right] \mathrm{d}s$, *dacă aceasta există. Pentru integrala curbilinie de prima speță se foloseşte notația:* $\int\limits_\gamma f\left(x, y, z\right) \mathrm{d}s$. *Aşadar avem:*

$$\int\limits_\gamma f\left(x, y, z\right) \mathrm{d}s \overset{\text{def}}{=} \int_0^L \left[\tilde{x}(s), \tilde{y}(s), \tilde{z}(s)\right] \mathrm{d}s \tag{1}$$

Reamintim că am notat cu s elementul de arc, anume

$$s = \lambda(t) = \int_0^t \sqrt{x'^2(u) + y'^2(u) + z'^2(u)}\,\mathrm{d}u \tag{2}$$

Exemplul 4.4.1. Să se calculeze $\int\limits_\gamma \left(x + y + z\right) \mathrm{d}s$, unde γ este elicea circulară $x = R\cos t$, $y = R\sin t$, $z = ht$, $t \in [0, 2\pi]$.

Aşa cum am arătat în Exemplul 3.4.2 reprezentarea normală a elicei circulare este: $\tilde{x}(s) = R\cos\dfrac{s}{\sqrt{R^2 + h^2}}$, $\tilde{y}(s) = R\sin\dfrac{s}{\sqrt{R^2 + h^2}}$, $\tilde{z}(s) = \dfrac{hs}{\sqrt{R^2 + h^2}}$, $s \in \left[0, 2\pi\sqrt{R^2 + h^2}\right]$. Rezultă

$$\int\limits_\gamma f\left(x, y, z\right) \mathrm{d}s = \int_0^{2\pi\sqrt{R^2+h^2}} \left(R\cos\frac{s}{\sqrt{R^2 + h^2}} + R\sin\frac{s}{\sqrt{R^2 + h^2}} + \frac{hs}{\sqrt{R^2 + h^2}} \right) \mathrm{d}s =$$

$$= \left(R\sqrt{R^2 + h^2}\sin\frac{s}{\sqrt{R^2 + h^2}} - R\sqrt{R^2 + h^2}\cos\frac{s}{\sqrt{R^2 + h^2}} + \frac{h}{\sqrt{R^2 + h^2}} \cdot \frac{s^2}{2} \right) \Bigg|_0^{2\pi\sqrt{R^2+h^2}} =$$

$$= 2h\pi^2\sqrt{R^2 + h^2}\,.$$

Dacă am cunoaşte reprezentarea normală a oricărei curbe, atunci formula (1) ar fi suficientă pentru calculul integralei curbilinii de prima speță. De regulă, o

curbă se dă printr-o reprezentare parametrică în care parametrul t este oarecare, iar reprezentarea sa normală nu se cunoaşte. Teorema următoare permite calculul integralei curbilinii de prima speţă în cazul când reprezentarea parametrică este oarecare.

Teorema 4.4.1. *Fie γ o curbă netedă şi fie $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $t \in [a, b]$ o reprezentare parametrică a sa. Dacă $A \subset \mathbb{R}^3$ este o mulţime care conţine suportul curbei γ şi $f : A \to \mathbb{R}$ este continuă, atunci există integrala curbilinie de prima speţă a funcţiei f pe curba γ şi*

$$\int_\gamma f(x,y,z)\,\mathrm{d}s = \int_a^b f[x(t),y(t),z(t)]\,\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\,\mathrm{d}t \tag{3}$$

Demonstraţie.

Deoarece f este continuă şi funcţiile x, y, z sunt de clasă C^1 pe $[a, b]$, rezultă că integrala din membrul drept există. Pe de altă parte, funcţiile $\tilde{x} = x \circ \lambda^{-1}$, $\tilde{y} = y \circ \lambda^{-1}$, $\tilde{z} = z \circ \lambda^{-1}$ sunt de asemenea de clasă C^1 pe intervalul $[0, L]$, deci şi integrala din membrul stâng există. Conform Definiţiei 4.4.1 avem:

$$\int_\gamma f(x,y,z)\,\mathrm{d}s = \int_0^L f[\tilde{x}(s),\tilde{y}(s),\tilde{z}(s)]\,\mathrm{d}s\,.$$

Dacă facem schimbarea de variabilă $s = \lambda(t)$, $t \in [a,b]$, rezultă $\tilde{x} \circ \lambda = x$, $\tilde{y} \circ \lambda = y$, $\tilde{z} \circ \lambda = z$, $ds = \lambda'(t)\mathrm{d}t = \sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}$ $\mathrm{d}t$ şi mai departe:

$$\int_\gamma f(x,y,z)\,\mathrm{d}s = \int_0^L f[\tilde{x}(s),\tilde{y}(s),\tilde{z}(s)]\,\mathrm{d}s = \int_{\lambda^{-1}(0)}^{\lambda^{-1}(L)} f[x(t),y(t),z(t)]\,\lambda'(t)\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int_a^b f[x(t),y(t),z(t)]\,\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\,\mathrm{d}t\,.$$

Reluând exemplul 4.4.1 şi ţinând seama de Teorema 4.4.1 obţinem:

$$\int_\gamma (x+y+z)\,\mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} (R\cos t + R\sin t + ht)\sqrt{R^2\sin^2 t + R^2\cos^2 t + h^2}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \sqrt{R^2+h^2}\left(R\sin t - R\cos t + h\frac{t^2}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi} = 2\pi^2 h\,\sqrt{R^2+h^2}\,.$$

Observaţia 4.4.1. În cazul unei curbe plane formula (3) devine

$$\int_\gamma f(x,y)\,\mathrm{d}s = \int_a^b f[x(t)],y(t)\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,\mathrm{d}t\,.$$

Exemplul 4.4.2. Să se calculeze $\int\limits_{\gamma} xy\,\mathrm{d}s$, unde γ este porțiunea din primul cadran a elipsei $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$. O reprezentare parametrică a curbei γ este:

$x=a\cos t$, $y=b\sin t$, $t\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Conform Teoremei 4.4.1 avem

$$\int\limits_{\gamma} xy\,\mathrm{d}s=\int_0^{\pi/2} ab\sin t\cos t\,\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}\,\mathrm{d}t.$$

Dacă facem schimbarea de variabilă $u=a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t$, $t\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ atunci rezultă $du=2\left(a^2-b^2\right)\sin t\cos t\,\mathrm{d}t$ şi mai departe,

$$\int\limits_{\gamma} xy\,\mathrm{d}s=\frac{ab}{2\left(a^2-b^2\right)}\int_{b^2}^{a^2}\sqrt{u}\,\mathrm{d}u=\frac{ab}{3\left(a^2-b^2\right)}u^{3/2}\Big|_{b^2}^{a^2}=\frac{ab\left(a^2+ab+b^2\right)}{3(a+b)}.$$

Observația 4.4.2. Dacă γ este o curbă netedă pe porțiuni (este o justapunere de curbe netede) atunci avem:

$$\int\limits_{\gamma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}s=\sum_{i=1}^{P}\int\limits_{\gamma_i} f(x,y,z)\,\mathrm{d}s,\ \text{unde}\ \ \gamma=\gamma_1\cup\gamma_2\cup\ldots\cup\gamma_p.$$

Observația 4.4.3. Integrala curbilinie de prima speță nu depinde de orientarea curbei. Într-adevăr, funcțiile $x=\tilde{x}(L-s)$, $y=\tilde{y}(L-s)$, $z=\tilde{z}(L-s)$, $s\in[0,L]$ formează o reprezentare parametrică a curbei γ_-. Dacă notăm cu $u=L-s$ rezultă:

$$\int\limits_{\gamma_-} f(x,y,z)\mathrm{d}s=\int_0^L f\left[\tilde{x}(L-s),\tilde{y}(L-s),\tilde{z}(L-s)\right]\mathrm{d}s=$$

$$=-\int_L^0 f\left[\tilde{x}(u),\tilde{y}(u),\tilde{z}(u)\right]\mathrm{d}u=\int_0^L f\left[\tilde{x}(u),\tilde{y}(u),\tilde{z}(u)\right]\mathrm{d}u=\int\limits_{\gamma_+} f(x,y,z)\mathrm{d}s.$$

În continuare prezentăm interpretarea fizică a integralei curbilinii de prima speță. Într-adevăr, să presupunem că un fir material de grosime neglijabilă are forma curbei γ netedă. Fie $x=\tilde{x}(s),\ y=\tilde{y}(s),\ z=\tilde{z}(s),\ s\in[0,L]$, reprezentarea normală a curbei γ. Notăm cu $\overset{\frown}{AB}$ suportul curbei γ şi cu $\rho:\overset{\frown}{AB}\to\mathbb{R}_+$ funcția (continuă) care exprimă densitatea firului material.

Fie Δ: $0=s_0<s_i<\ldots<s_{i-1}<s_i<\ldots<s_n=L$ o diviziune oarecare a intervalului [0, L] şi fie $M_i\in\overset{\frown}{AB}$ punctul de coordonate $\left(\tilde{x}(s_i),\tilde{y}(s_i),\tilde{z}(s_i)\right)$.

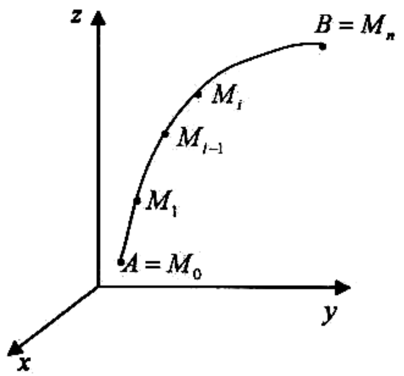


Fig. 1

Precizăm că s_i reprezintă lungimea arcului $\overset{\frown}{AM_i}$. Dacă diviziunea Δ este suficient de fină, putem presupune că pe porțiunea $\overset{\frown}{M_{i-1},M_i}$ densitatea firului este constantă şi anume este egală, de exemplu, cu valoarea funcției ρ într-unul din capete. Aşadar, presupunem că $\rho(M) = \rho(M_i)$, $\forall\ M \in \overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$. Rezultă că masa porțiunii $\overset{\frown}{M_{i-1},M_i}$ a firului material este aproximativ egală cu produsul $\rho(M_i)(s_i - s_{i-1})$, iar masa întregului fir $\overset{\frown}{AB}$, se aproximează cu suma $\sum_{i=1}^{n} \rho(M_i)(s_i - s_{i-1})$. Valoarea exactă a masei firului material va fi $\mu = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \rho(M_i)(s_i - s_{i-1}) = \int_\gamma \rho(x,y,z)\,\mathrm{d}s$, sensul exact fiind următorul: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\ \delta_\varepsilon > 0$ astfel încât, oricare ar fi diviziunea Δ a intervalului [0, L], cu $\|\Delta\| < \delta_\varepsilon$ avem $\left| \mu - \sum_{i=1}^{n} \rho(M_i)(s_i - s_{i-1}) \right| < \varepsilon$.

În concluzie, $\int_\gamma \rho(x,y,z)\,\mathrm{d}s$ reprezintă masa unui fir material de grosime neglijabilă, care are forma curbei γ de suport $\overset{\frown}{AB}$ şi de densitate $\rho = \rho(x,y,z)$, $\forall\ (x,y,z) \in \overset{\frown}{AB}$.

Dacă notăm cu x_G, y_G şi z_G coordonatele centrului de greutate ale firului material, atunci, procedând ca mai înainte, se arată că:

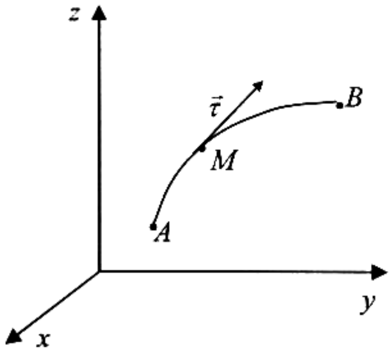
$$x_G = \frac{\int_\gamma x\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}s}{\int_\gamma \rho(x,y,z)\,\mathrm{d}s},\quad y_G = \frac{\int_\gamma y\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}s}{\int_\gamma \rho(x,y,z)\,\mathrm{d}s},\quad z_G = \frac{\int_\gamma z\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}s}{\int_\gamma \rho(x,y,z)\,\mathrm{d}s}.$$

În cazul unui fir omogen ($\rho(M) = \kappa$, $\forall\ M \in \overset{\frown}{AB}$), rezultă:

$$x_G = \frac{\int_\gamma x\,\mathrm{d}s}{\int_\gamma \mathrm{d}s},\quad y_G = \frac{\int_\gamma y\,\mathrm{d}s}{\int_\gamma \mathrm{d}s},\quad z_G = \frac{\int_\gamma z\,\mathrm{d}s}{\int_\gamma \mathrm{d}s}.$$

4.5. INTEGRALA CURBILINIE DE SPEȚA A DOUA

Fie γ o curbă netedă de suport $\overset{\frown}{AB}$ şi fie $x=\tilde{x}(s)$, $y=\tilde{y}(s)$, $z=\tilde{z}(s)$, $s\in[0,L]$, reprezentarea sa normală. Vom nota cu $\vec{\tau}=\vec{\tau}(M)$ versorul tangentei la



curba γ într-un punct curent $M\left[\tilde{x}(s),\tilde{y}(s),\tilde{z}(s)\right]\in\overset{\frown}{AB}$, orientat în sensul creşterii parametrului s. Se ştie că $\vec{\tau}=\left(\frac{d\tilde{x}}{ds},\frac{d\tilde{y}}{ds},\frac{d\tilde{z}}{ds}\right)$. Considerăm de asemenea o funcție vectorială $\vec{F}=(P,Q,R)$ definită pe o mulțime $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ ce conține suportul $\overset{\frown}{AB}$ al curbei γ, cu valori în $\mathbb{R}^3$. În notația vectorială, în care identificăm orice punct din $\mathbb{R}^3$ cu vectorul său de poziție, avem:

$\vec{\tau}=\frac{d\tilde{x}}{ds}\vec{i}+\frac{d\tilde{y}}{ds}\vec{j}+\frac{d\tilde{z}}{ds}\vec{k}=\cos\alpha\vec{i}+\cos\beta\vec{j}+\cos\gamma\vec{k}$, unde α, β şi γ sunt unghiurile pe care le face $\vec{\tau}$ cu Ox, Oy şi Oz.

$$\vec{F}(x,y,z)=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}\ ,\ \forall\ (x,y,z)\in\Omega.$$

Definiția 4.5.1. *Se numeşte integrala curbilinie de speța a doua a funcției* $\vec{F}=(P,Q,R)$ *pe curba* γ_+, *următoarea integrală definită*:

$$\int_0^L\vec{F}\cdot\vec{\tau}\,\mathrm{d}s=$$
$$=\int_0^L\left(P\left[\tilde{x}(s),\tilde{y}(s),\tilde{z}(s)\right]\cdot\tilde{x}'(s)+Q\left[\tilde{x}(s),\tilde{y}(s),\tilde{z}(s)\right]\cdot\tilde{y}'(s)+R\left[\tilde{x}(s),\tilde{y}(s),\tilde{z}(s)\right]\cdot\tilde{z}'(s)\right)\mathrm{d}s$$

Pentru integrala curbilinie de speța a doua se foloseşte notația

$\int_\gamma P(x,y,z)\mathrm{d}x+Q(x,y,z)\mathrm{d}y+R(x,y,z)\mathrm{d}z$. Aşadar avem:

$$\begin{aligned}&\int_\gamma P(x,y,z)\mathrm{d}x+Q(x,y,z)\mathrm{d}y+R(x,y,z)\mathrm{d}z\overset{\text{def}}{=}\int_0^L\vec{F}\cdot\vec{\tau}\,\mathrm{d}s=\\&=\int_0^L\left(P\left[\tilde{x}(s),\tilde{y}(s),\tilde{z}(s)\right]\tilde{x}'(s)+Q\left[\tilde{x}(s),\tilde{y}(s),\tilde{z}(s)\right]\tilde{y}'(s)+R\left[\tilde{x}(s),\tilde{y}(s),\tilde{z}(s)\right]\tilde{z}'(s)\right)\mathrm{d}s\end{aligned}\tag{1}$$

Următoarea teoremă permite calculul integralei curbilinii de speța a doua când reprezentarea parametrică a curbei este oarecare.

Teorema 4.5.1. *Fie γ o curbă netedă şi fie* $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $t \in [a,b]$ *o reprezentare parametrică a sa. Notăm cu γ_+ curba γ orientată în sensul creşterii parametrului t. Dacă $\Omega \in \mathbb{R}^3$ este o mulțime ce conține suportul $\overset{\frown}{AB}$ al curbei γ şi $F = (P,Q,R) : A \to \mathbb{R}^3$ este o funcție vectorială continuă, atunci există integrala curbilinie de spețа a doua pe curba γ_+ şi*

$$\begin{aligned}&\int_{\gamma_+} P(x,y,z)\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\mathrm{d}y + R(x,y,z)\mathrm{d}z = \\ &= \int_a^b \big(P[x(t),y(t),z(t)]x'(t) + Q[x(t),y(t),z(t)]y'(t) + R[x(t),y(t),z(t)]z'(t)\big)\mathrm{d}t\end{aligned} \tag{2}$$

Demonstrație.

Deoarece γ este netedă, rezultă că $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ şi $\tilde{z}$ sunt de clasă C^1 pe [0, L], deci $\vec{\tau} : \overset{\frown}{AB} \to \mathbb{R}^3$ este o funcție vectorială continuă. Cum şi $\vec{F}$ este continuă, deducem că $\int_0^L \vec{F} \cdot \vec{\tau}\,\mathrm{d}s$ există, deci integrala din membrul stâng are sens. Este evident că şi integrala din membrul drept există, deoarece x, y şi z sunt de clasă C^1 pe [a, b] şi P, Q, R sunt continue pe $\overset{\frown}{AB}$.

Conform definiției 4.5.1 $\int_{\gamma_+} P(x,y,z)\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\mathrm{d}y + R(x,y,z)\mathrm{d}z$ este egală cu integrala din membrul drept al egalității (1). Vom face în această integrală schimbarea de variabilă $s = \lambda(t)$, $t \in [a,b]$ şi obținem $\tilde{x}[\lambda(t)] = x\left[\lambda^{-1}(\lambda(t))\right] = x(t)$ şi analog $\tilde{y}[\lambda(t)] = y(t)$, $\tilde{z}[\lambda(t)] = z(t)$. De asemenea, ținând seama de regulile de derivare a funcțiilor compuse şi inverse, avem

$$\begin{aligned}\tilde{x}'(s)\,\mathrm{d}s &= \frac{d}{ds}\left[x\left(\lambda^{-1}(s)\right)\right]\mathrm{d}s = \frac{dx\left[\lambda^{-1}(s)\right]}{d\left[\lambda^{-1}(s)\right]} \cdot \frac{d\left[\lambda^{-1}(s)\right]}{ds}\mathrm{d}s = \\ &= x'(t)\frac{1}{\lambda'(t)} \cdot \lambda'(t)\,\mathrm{d}t = x'(t)\,\mathrm{d}t\,.\end{aligned}$$

În mod asemănător avem $\tilde{y}'(s)\,\mathrm{d}s = y'(t)\,\mathrm{d}t$, $\tilde{z}'(s)\,\mathrm{d}s = z'(t)\,\mathrm{d}t$. În urma acestei schimbări de variabilă rezultă:

$$\begin{aligned}&\int_0^L \big(P[\tilde{x}(s),\tilde{y}(s),\tilde{z}(s)] \cdot \tilde{x}'(s) + Q[\tilde{x}(s),\tilde{y}(s),\tilde{z}(s)] \cdot \tilde{y}'(s) + R[\tilde{x}(s),\tilde{y}(s),\tilde{z}(s)] \cdot \tilde{z}'(s)\big)\mathrm{d}s = \\ &= \int_a^b \big(P[x(t),y(t),z(t)]x'(t) + Q[x(t),y(t),z(t)]y'(t) + R[x(t),y(t),z(t)]z'(t)\big)\mathrm{d}t\,.\end{aligned}$$

Cu aceasta, teorema este demonstrată.

Observația 4.5.1. Integrala curbilinie de speța a doua depinde de orientarea curbei. Într-adevăr, versorul tangentă la curba γ_- într-un punct curent $M \in \overset{\frown}{AB}$ este egal cu $-\vec{\tau}$, de unde rezultă că:

$$\int_{\gamma_-} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z = \int_0^L \vec{F}\cdot(-\vec{\tau})\,\mathrm{d}s = -\int_0^L \vec{F}\cdot\vec{\tau}\,\mathrm{d}s = -\int_{\gamma_+} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z .$$

Exemplul 4.5.1. Să se calculeze $\int_{\gamma+} y\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}y + x\,\mathrm{d}z$, unde

$$\gamma_+ : x = \frac{R}{2}(1+\cos t),\, y = \frac{R}{2}(1-\cos t),\, z = \frac{R}{\sqrt{2}}\sin t,\ t \in [0, 2\pi].$$

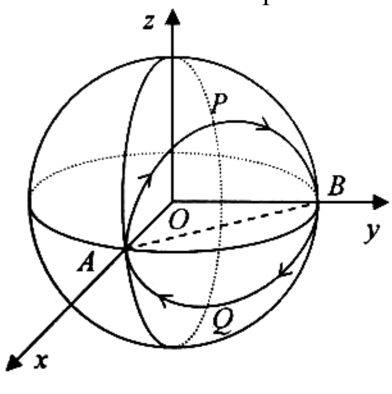
Conform Teoremei 4.5.1 avem:

$$\int_{\gamma+} y\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}y + x\,\mathrm{d}z =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{R}{2}(1+\cos t)\left(-\frac{R}{2}\sin t\right) + \frac{R}{\sqrt{2}}\sin t\left(\frac{R}{2}\sin t\right) + \frac{R}{2}(1+\cos t)\frac{R}{\sqrt{2}}\cos t \right)\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{\pi R^2}{\sqrt{2}} .$$

Observăm că din punct de vedere geometric, suportul curbei γ este cercul



$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \\ x + y = R. \end{cases}$$

Acest cerc se află în planul $x + y = R$ care este paralel cu axa Oz şi trece prin punctele $A(R,0,0)$ şi $B(0,R,0)$; segmentul [AB] este un diametru al său. Cercul are centrul în punctul $\left(\frac{R}{2},\frac{R}{2},0\right)$ şi raza $\frac{R}{\sqrt{2}}$. Dacă notăm cu $P\left(\frac{R}{2},\frac{R}{2},\frac{R}{\sqrt{2}}\right)$ şi cu $Q\left(\frac{R}{2},\frac{R}{2},-\frac{R}{\sqrt{2}}\right)$ alte două puncte ale cercului, constatăm că punctul A corespunde valorii $t = 0$, a parametrului, P corespunde valorii $t = \frac{\pi}{2}$, B corespunde valorii $t = \pi$ şi Q corespunde valorii $t = \frac{3\pi}{2}$. Aşadar, curba γ_+ este cercul din planul $x + y = R$, de centru $\left(\frac{R}{2},\frac{R}{2},0\right)$ şi raza $\frac{R}{\sqrt{2}}$, orientat în sensul $APBQA$.

Observația 4.5.2. Dacă curba γ este dată printr-o reprezentare parametrică, γ_+ reprezintă curba γ orientată în sensul creşterii parametrului. Dacă însă curba γ este o curbă închisă şi este dată ca o intersecție de două suprafețe, atunci orientarea curbei nu este evidentă şi trebuie indicată prin enunț. De exemplu, în cazul cercului de mai sus, se poate specifica faptul că acesta este parcurs în sensul acelor unui ceasornic dacă privim din punctul O, originea sistemului de axe. Faptul că este vorba de o curbă închisă, se poate marca printr-un cerc pe semnul integralei. Exemplul 4.5.1 se poate reformula astfel: Să se calculeze $\oint\limits_{\gamma_+} y\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}y + x\,\mathrm{d}z$ unde γ_+ este cercul $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=R^2 \\ x+y=R \end{cases}$ parcurs în sensul acelor unui ceasornic dacă privim din centrul sferei.

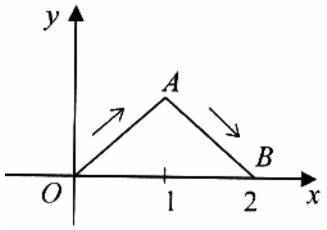
Observația 4.5.3. Dacă γ este netedă pe porțiuni (este o justapunere de curbe netede: $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \ldots \cup \gamma_p$, atunci

$$\int\limits_{\gamma_+} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z = \sum_{i=1}^{p} \int\limits_{(\gamma_i)_+} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z .$$

Observația 4.5.4. În cazul unei curbe plane, formula (2) devine:

$$\int\limits_{\gamma_+} P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_a^b \big(P(x(t),y(t))\,x'(t) + Q(x(t),y(t))\,y'(t)\big)\mathrm{d}t .$$

Exemplul 4.5.2. Să se calculeze $\int\limits_{\gamma_+} (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x + (x^2-y^2)\,\mathrm{d}y$, unde γ_+ este graficul curbei $y = 1-|1-x|$, $x \in [0, 2]$. Explicitând modulul obținem:



$$y = \begin{cases} x & \text{dacă} \quad x \in [0,1] \\ 2-x & \text{dacă} \quad x \in [1,2] \end{cases}$$

Cum $\gamma_+ = \overline{OA} \cup \overline{AB}$ rezultă $\int\limits_{\gamma_+} = \int\limits_{\overline{OA}} + \int\limits_{\overline{AB}}$.

Deoarece $x = t$, $y = t$, $t \in [0,1]$ este o reprezentare parametrică a segmentului $\overline{OA}$, din Observația 4.5.4 deducem:

$$\int\limits_{\overline{OA}} (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x + (x^2-y^2)\,\mathrm{d}y = \int_0^1 2t^2\,\mathrm{d}t = \frac{2}{3}.$$

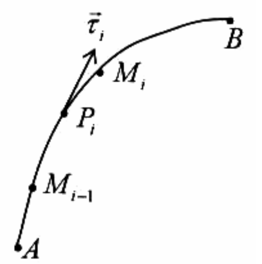
Pe de altă parte, o reprezentare parametrică a segmentului $\overline{AB}$ este $x = t$, $y = 2 - t$, $t \in [1,2]$. Rezultă:

$$\int\limits_{\overline{AB}} \left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}x+\left(x^2-y^2\right)\mathrm{d}y=\int_0^1\left[\left(t^2+(2-t)^2\right)(1)+\left(t^2-(2-t)^2\right)(-1)\right]\mathrm{d}t=$$

$$=2\int_1^2(2-t)^2\mathrm{d}t=\frac{2}{3}.$$

Aşadar, $\displaystyle\int\limits_{\gamma_+}\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}x+\left(x^2-y^2\right)\mathrm{d}y=\frac{4}{3}$.

Pentru interpretarea fizică a integralei curbilinii de speţa a doua, considerăm o curbă netedă γ, de suport $\overset{\frown}{AB}$. Fie $x=\tilde{x}(s)$, $y=\tilde{y}(s)$ şi $z=\tilde{z}(s)$, $s\in[0,L]$ repre-
zentarea normală a curbei γ_+, fie $\vec{F}=(P,Q,R):\overset{\frown}{AB}\subset\mathbb{R}^3$ o funcţie vectorială continuă şi fie $\Delta:0=s_0<s_1<\ldots<s_{i-1}<s_i<\ldots<s_n=L$ o diviziune oarecare a intervalului [0, L]. Notăm cu M_i punctul de coordonate $\left(\tilde{x}(s_i),\tilde{y}(s_i),\tilde{z}(s_i)\right)$. Lungimea arcului $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$ este egală cu s_i-s_{i-1}. Fie $\xi_i\in[s_{i-1},s_i]$ un punct arbitrar, fie $P_i\left[\tilde{x}(\xi_i),\tilde{y}(\xi_i),\tilde{z}(\xi_i)\right]$ punctul corespunzător de pe arcul $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$ şi fie $\vec{\tau}_i$ versorul tangentei în P_i la curba γ_+.



Dacă diviziunea Δ este suficient de fină, putem presupune că funcţia vectorială $\vec{F}=(P,Q,R)$ pe care o interpretăm ca o forţă, este constantă pe arcul $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$ şi anume este egală cu valoarea sa în punctul P_i. În aceste condiţii, lucrul mecanic efectuat pentru deplasarea unui punct material pe arcul $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$ sub acţiunea forţei $\vec{F}$ se poate aproxima cu $\vec{F}(P_i)\cdot\vec{\tau}_i(s_i-s_{i-1})$, unde cu $\vec{F}(P_i)\cdot\vec{\tau}_i$ am notat produsul scalar al celor doi vectori. Lucrul mecanic efectuat pentru deplasarea unui punct material pe arcul $\overset{\frown}{AB}$ sub acţiunea forţei variabile $\vec{F}$ se aproximează cu suma $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\vec{F}(P_i)\cdot\vec{\tau}_i(s_i-s_{i-1})$. Valoarea exactă a lucrului mecanic va fi egal cu:

$$\lim_{\|\Delta\|\to0}\sum_{i=1}^{n}\vec{F}(P_i)\cdot\vec{\tau}_i(s_i-s_{i-1})=\int\limits_{\gamma_+}P(x,y,z)\mathrm{d}x+Q(x,y,z)\mathrm{d}y+R(x,y,z)\mathrm{d}z.$$

În consecință $\int\limits_{\gamma_+} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z$ reprezintă lucrul mecanic efectuat pentru deplasarea unui punct material pe curba γ_+ sub acțiunea forței variabile $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$.

4.6 INDEPENDENȚA DE DRUM A INTEGRALEI CURBILINII DE SPEȚA A DOUA

În acest paragraf vom analiza cazul când integrala curbilinie de speța a doua depinde numai de extremitățile curbei şi nu depinde de curba însăşi. Acest caz este interesant atât din punct de vedere matematic, deoarece calculul unei astfel de integrale este mai simplu, cât şi din punct de vedere practic, deoarece are aplicații în termodinamică.

Definiția 4.6.1. *Fie $A \subset \mathbb{R}^3$ o mulțime deschisă și fie P, Q, R : $A \to \mathbb{R}$, trei funcții oarecare. Se numeşte formă diferențială de gradul întâi pe mulțimea A, de coeficienți P, Q și R, următoarea expresie:* $\omega = P(x,y,z)\,\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\,\mathrm{d}y + R(x,y,z)\,\mathrm{d}z$, $\forall\ (x,y,z) \in A$. *Dacă, în plus P, Q și R sunt de clasă C^P pe A, atunci ω se numeşte formă diferențială de gradul întâi, de clasă C^P .*

Exemplul 4.6.1. Dacă $f : A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ este diferențiabilă pe *A*, atunci diferențiala sa de ordinul întâi: $df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$ este o formă diferențială de gradul întâi pe *A*, de coeficienți $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ şi $\frac{\partial f}{\partial z}$.

Formele diferențiale de tipul celui din Exemplul 4.6.1 se numesc exacte. Mai precis:

Definiția 4.6.2. *Forma diferențială de gradul întâi* $\omega = P(x,y,z)\,\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\,\mathrm{d}y + R(x,y,z)\,\mathrm{d}z$, $\forall\ (x,y,z) \in A$ *se numeşte exactă, dacă există o funcție $f \in C^1(A)$ astfel încât $\omega = df$, ceea ce revine la următoarele egalități pe A*:
$$P = \frac{\partial f}{\partial x},\ Q = \frac{\partial f}{\partial y},\ R = \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Observația 4.6.1. Dacă considerăm câmpul vectorial $\vec{v} : A \to \mathbb{R}^3$, $\vec{v}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$, $\forall\ (x,y,z) \in A$, atunci forma diferențială ω , de coeficienți *P*, *Q* şi *R*, este exactă pe *A*, dacă $\vec{v}$ este un câmp de

potențial, adică dacă $\exists \ f \in C^1(A)$ astfel încât $\vec{v} =$ grad f (Vezi [10], Definiția 4.14.4).

Teorema 4.6.1. *Fie* $D \subset \mathbb{R}^3$ *un domeniu şi fie P, Q, şi R trei funcții reale, continue pe D. Următoarele afirmații sunt echivalente:*

(i) *Forma diferențială* $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$ *este exactă pe D*;

(ii) $\int\limits_{\gamma} Pdx + Qdy + Rdz = 0$, *pentru orice curbă închisă γ, netedă pe porțiuni, al cărui suport este inclus în D*;

(iii) $\int\limits_{\gamma} Pdx + Qdy + Rdz$ *nu depind de drum în domeniul D, în sensul următor: oricare ar fi două puncte A, B ∈ D şi oricare ar fi două curbe netede pe porțiuni,* γ_1 *şi* γ_2 *care au suporturile incluse în D şi au aceleaşi capete A şi B avem:*

$$\int\limits_{\gamma_1} Pdx + Qdy + Rdz = \int\limits_{\gamma_2} Pdx + Qdy + Rdz$$

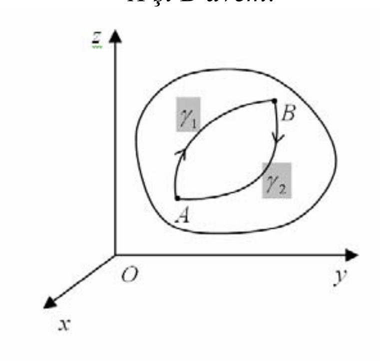


Fig. 1

Demonstrație. (i) $\Rightarrow$ (iii). Prin ipoteză, există $f \in C^1(D)$ astfel încât:

$$P = \frac{\partial f}{\partial x},\ Q = \frac{\partial f}{\partial y},\ R = \frac{\partial f}{\partial z} \tag{1}$$

Fie A şi B două puncte oarecare din D şi fie γ o curbă netedă pe porțiuni, al cărui suport $\overset{\frown}{AB}$ este inclus în D. Dacă $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t), t \in [a,b]$, este o reprezentare parametrică a curbei γ, atunci A are coordonatele $(x(a), y(a), z(a))$ iar B are coordonatele $(x(b), y(b), z(b))$.

Fie F: $[a, b] \to$ P, funcția compusă definită astfel:

$F(t) = f\left[x(t), y(t), z(t)\right]$, $t \in [a, b]$.

Ținând seama de formulele de derivare ale funcțiilor compuse şi de egalitățile (1) rezultă:

$$\begin{aligned} F'(t) &= \frac{\partial f}{\partial x}\left[x(t), y(t), z(t)\right]x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}\left[x(t), y(t), z(t)\right]y'(t) + \frac{\partial f}{\partial z}\left[x(t), y(t), z(t)\right]z'(t) = \\ &= P\left[x(t), y(t), z(t)\right]x'(t) + Q\left[x(t), y(t), z(t)\right]y'(t) + R\left[x(t), y(t), z(t)\right]z'(t) \end{aligned} \tag{2}$$

Egalitatea (2) este valabilă pentru orice punct $t \in [a, b]$ cu excepția unui număr finit de puncte şi anume, acele puncte $t \in [a, b]$ care corespund punctelor de justapunere a curbelor ce compun γ. Cum egalitatea (2) este adevărată pe $[a, b]$ cu excepția unei mulțimi neglijabile rezultă:

$$\int_{\gamma_+} Pdx + Qdy + Rdz =$$

$$= \int_a^b \left(P[x(t), y(t), z(t)]x'(t) + Q[x(t), y(t), z(t)]y'(t) + R[x(t), y(t), z(t)]z'(t)\right)dt =$$

$$= \int_a^b F'(t)dt = F(b) - F(a) = f(B) - f(A)$$

Aşadar, valoarea integralei nu depinde de forma curbei γ şi depinde numai de capetele sale.

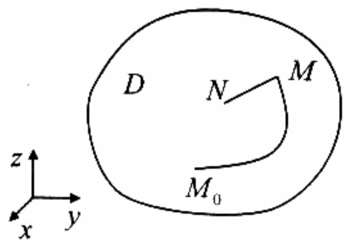


Fig. 2

(*iii*) $\Rightarrow$ (*i*) Fie $M_0(x_0, y_0, z_0) \in D$ un punct fixat, fie $M(x, y, z) \in D$ un punct oarecare şi fie γ o curbă netedă pe porţiuni, al cărui suport $\overset{\frown}{M_0M}$ este inclus în *D*.

Deoarece prin ipoteză, integrala nu depinde de drum în domeniul *D*, rezultă că putem defini o funcţie $f : D \to$ P, astfel:

$$f(x, y, z) = \int_{\overset{\frown}{M_0M}} Pdx + Qdy + Rdz, \quad \forall M(x, y, z) \in D.$$

Fie $N(x+h, y, z) \in D$ şi fie $x = t$, $y = y$, $z = z$, $t \in [x, x+h]$ o reprezentare parametrică a segmentului de drepte $\overline{MN}$. Avem:

$$f(x+h, y, z) = \int_{\overset{\frown}{M_0M} \cup \overline{MN}} Pdx + Qdy + Rdz =$$

$$= \int_{\overset{\frown}{M_0M}} Pdx + Qdy + Rdz + \int_{\overline{MN}} Pdx + Qdy + Rdz.$$

Ţinând seama de Corolarul 2.4.3 de la Teorema de medie rezultă:

$$\frac{f(x+h, y, z) - f(x, y, z)}{h} = \frac{\int_{\overline{MN}} Pdx + Qdy + Rdz = \int_x^{x+h} P(t, y, z)dt}{h \qquad\qquad h} = \frac{P(\xi, y, z)h}{h},$$

unde ξ este un punct cuprins între *x* şi *x* + *h*. Folosind din nou faptul că *P* este continuă, rezultă că există $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h, y, z) - f(x, y, z)}{h} = P(x, y, z)$.

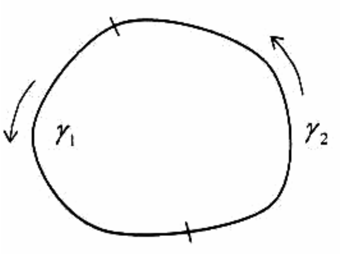
Aşadar, $\frac{\partial f}{\partial x} = P$.

În mod asemănător, înlocuind segmentul $\overline{MN}$ cu un segment paralel cu axa *Oy* (respectiv *Oz*) se arată că $\frac{\partial f}{\partial y} = Q$ şi $\frac{\partial f}{\partial z} = R$, deci ω este exactă.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Fie γ_1, γ_2 curbele din Figura 1 şi fie $\gamma = \gamma_1 \cup (\gamma_2)_-$. Evident γ este o curbă închisă, netedă pe porţiuni, al cărui suport este inclus în *D*. Din (*iii*) rezultă că $\oint_\gamma Pdx + Qdy + Rdz = 0$. Dar $\oint_\gamma = \int_{\gamma_1} + \int_{(\gamma_2)_-} = \int_{\gamma_1} - \int_{\gamma_2} = 0$.

Aşadar $\int_{\gamma_1} = \int_{\gamma_2}$, adică (*ii*).

$(iii) \Rightarrow (ii)$ Fie γ o curbă închisă, netedă pe porţiuni, al cărui suport este inclus în *D*, fie $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in [a, b]$ reprezentare parametrică a sa şi fie $a < c < b$ oarecare. Notăm cu γ_1 curba a cărei reprezentare parametrică este $r = r(t)$, $t \in [a, c]$ şi cu γ_2 curba $r = r(t)$, $t \in [c, b]$. Evident $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$. Prin ipoteză $\int_{(\gamma_1)_+} = \int_{(\gamma_2)_-}$, de unde rezultă $\int_\gamma = \int_{(\gamma_1)_+} + \int_{(\gamma_2)_-} = 0$.



Definiţia 4.6.3. *O formă diferenţială de ordinul întâi* $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$ *se numeşte închisă pe domeniul* $D \subset \mathbb{R}^3$, *dacă P, Q, R sunt de clasă* C^1 *pe D şi dacă* $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial z} = \dfrac{\partial R}{\partial z}$, $\dfrac{\partial R}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial z}$.

Observaţia 4.6.2. Dacă considerăm câmpul vectorial $\vec{v} : D \to \mathbb{R}^3$,

$$\vec{v}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k},\ \forall\ (x,y,z) \in D$$

atunci ω este închisă dacă şi numai dacă câmpul $\vec{v}$ este irotaţional, adică dacă

$$\text{rot } \vec{v} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k} = \vec{0}.$$

Teorema 4.6.2. *Dacă* $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$ *este exactă şi este de clasă* C^1 *pe D, atunci* ω *este închisă pe D.*

Demonstraţie. Prin ipoteză există $f \in C^2(D)$ astfel încât $P = \dfrac{\partial f}{\partial x}$, $Q = \dfrac{\partial f}{\partial y}$, $R = \dfrac{\partial f}{\partial z}$. Deoarece, în acest caz, derivatele de ordinul doi ale lui *f* sunt continue, rezultă că derivatele mixte sunt egale. Avem:

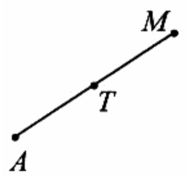
$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x},\ \frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z}=\frac{\partial R}{\partial y},\ \frac{\partial R}{\partial x}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z}=\frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial x}=\frac{\partial P}{\partial z}.$$

Definiția 4.6.4. *O mulțime $S \subset \mathbb{R}^3$ se numeşte stelată dacă există un punct $A \in S$ cu proprietatea că $\forall\ M \in S$, segmentul de dreaptă de capete A şi M, pe care-l notăm $[A,M]$ este inclus în S. Reamintim că*
$[A,M]=\{(1-t)\,A+t\,B \mid t\in[0,1]\}$.

Observația 4.6.3. Orice mulțime convexă este stelată, în timp ce afirmația reciprocă nu este în general adevărată. De exemplu mulțimea $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0);\ x>0\}$ este stelată (în raport cu $O(0,0)$) dar nu exte convexă.

Teorema 4.6.3. *Dacă $D \subset \mathbb{R}^3$ esteo mulțime stelată şi deschisă, atunci orice formă diferențială închisă pe D este exactă pe D.*

Demonstrație. Prin ipoteză, există $A \in D$ astfel încât $[A,M]\subset D$, $\forall\ M \in D$.



Să presupunem că A are coordonatele (a, b, c) iar M are coordonatele (x, y, z). Fie $t \in [0,1]$ oarecare şi fie
$T=(1-t)\,A+t\,B=\big((1-t)\,a+t\,x,\ (1-t)\,b+t\,y,\ (1-t)\,c+t\,z\big)$,
punctul corespunzător de pe segmentul $[A,M]$. Definim o funcție $f : D \to$ P, astfel:

$$f(x,y,z)=\int_0^1\big[P(T)(x-a)+Q(T)(y-b)+R(T)(z-c)\big]\mathrm{d}t$$
.

Ținând seama de teorema de derivare a integralei cu parametru (Teorema 3.2.2) rezultă:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\int_0^1\left(\frac{\partial P}{\partial x}(T)\frac{\partial T}{\partial x}(x-a)+P(T)+\frac{\partial Q}{\partial x}(T)\frac{\partial T}{\partial x}(y-b)+\frac{\partial R}{\partial x}(T)\frac{\partial T}{\partial x}(z-c)\right)\mathrm{d}t=$$
$$=\int_0^1\left(\frac{\partial P}{\partial x}(T)t(x-a)+P(T)+\frac{\partial Q}{\partial x}(T)t(y-b)+\frac{\partial R}{\partial x}(T)t(z-c)\right)\mathrm{d}t.$$

Pe de altă parte, prin ipoteză avem $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$ şi $\dfrac{\partial R}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial z}$, deci

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\int_0^1\left(\frac{\partial P}{\partial x}(T)t(x-a)+\frac{\partial P}{\partial y}(T)t(y-b)+\frac{\partial P}{\partial z}(T)t(z-c)+P(T)\right)\mathrm{d}t=$$
$$=\int_0^1\frac{d}{dt}\big(tP(T)\big)\mathrm{d}t=tP(T)\Big|_0^1=1\cdot P(M)-0\cdot P(A)=P(M)=P(x,y,z).$$

Aşadar, $\frac{\partial f}{\partial x}=P$ şi analog $\frac{\partial f}{\partial y}=Q$, $\frac{\partial f}{\partial z}=R$, deci ω este exactă.

Exemplul 4.6.2. Să se calculeze $\int_{(1,2,3)}^{(6,1,1)} yzdx+zxdy+xydz$. Dacă notăm cu $P(x,y,z)=yz$, $Q(x,y,z)=zx$ şi $R(x,y,z)=xy$, atunci forma diferenţială $\omega=Pdx+Qdy+Rdz$ este închisă pe $\mathbb{R}^3$ deoarece $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=z$; $\frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial y}=x$; $\frac{\partial R}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial z}=y$. Din Teorema 4.6.3. rezultă că ω este exactă, iar din Teorema 4.6.1 că integrala nu depinde de drum. Aşadar, problema are sens. Deoarece integrala nu depinde de drum, calculul său se poate face alegând un drum avantajos şi anume alegem linia frântă determinată de punctele $A(1,2,3)$, $B(6.2.3)$, $C(6,1,3)$, $D(6,1,1)$.

$$\int_{(1,2,3)}^{(6,1,1)} yzdx+zxdy+xydz=\int_{\overline{AB}}+\int_{\overline{BC}}+\int_{\overline{CD}}=\int_1^6 2\cdot 3dt+\int_2^1 6\cdot 3dt+\int_3^1 6\cdot 1dt=$$
$$=30-18-12=0.$$

O soluţie mai simplă se poate da, dacă observăm că $\omega = df$, unde $f(x,y,z)=xyz$. Atunci $\int_{(1,2,3)}^{(6,1,1)} yzdx+zxdy+xydz=xyz\Big|_{(1,2,3)}^{(6.1.1)}=6-6=0$.

Observaţia 4.6.4. În plan, o formă diferenţială $\omega=Pdx+Qdy$ este închisă, dacă $P,Q\in C^1$ şi $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$.

Exemplul 4.6.2. Să se calculeze $\oint_\gamma (2y^2-4y+x)dx+4x(y-1)dy$, unde γ este cercul $x^2+y^2-2y=0$.

Dacă norăm cu $P(x,y)=2y^2-4y+x$ şi cu $Q(x,y)=4x(y-1)$, atunci $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=4(y-1)$. Rezultă că $\omega=Pdx+Qdy$ este închisă în $\mathbb{R}^2$, deci este exactă în $\mathbb{R}^2$. Cum γ este o curbă închisă, din Teorema 4.6.1 rezultă că valoarea integralei este 0, deci nu e necesar nici un calcul.

CAPITOLUL 5

INTEGRALE MULTIPLE

5.1. ARIA UNEI MULȚIMI PLANE

În cele ce urmează, prin mulțime plană poligonală, vom înțelege orice mulțime din plan mărginită de un poligon. În particular, prin mulțime plană dreptunghiulară (triunghiulară) înțelegem o mulțime plană a cărei frontieră este un dreptunghi (triunghi). Cititorul este familiarizat cu noțiunea de arie a unei mulțimi plane poligonale de la cursul de geometrie elementară. În acest paragraf vom da un sens noțiunii de mulțime care are arie, pentru o clasă de mulțimi mai generală decât clasa mulțimilor poligonale.

Definiția 5.1.1 *Prin mulțime elementară (în plan) înțelegem orice reuniune finită de mulțimi plane dreptunghiulare cu laturile paralele cu axele de coordonate, fără puncte interioare comune.*

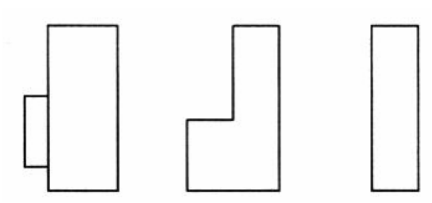


Fig. 1

Facem precizarea că orice reuniune finită de mulțimi dreptunghiulare cu laturile paralele cu axele de coordonate se poate reprezenta ca o mulțime elementară.

Așadar, o mulțime $E \subset \mathbb{R}^2$ este elementară, dacă există un număr finit de dreptunghiuri (pline) $D_i = [a_i, b_i] \times [c_i, d_i]$, $i = \overline{1, p}$ astfel încât $E = \bigcup_{i=1}^{p} D_i$ și $\overset{\circ}{D}_i \cap \overset{\circ}{D}_j = \varnothing$ pentru $i \neq j$. Se știe că aria unui dreptunghi este egală cu produsul lungimilor laturilor, deci $\text{aria}\, D_i = (b_i - a_i)(d_i - c_i)$. Prin definiție, aria mulțimii elementare E este

$$\text{aria}\, E = \sum_{i=1}^{p} \text{aria}\, D_i . \tag{1}$$

În continuare, vom nota cu $\mathcal{E}$ familia mulțimilor elementare din plan. Dacă $A \subset \mathbb{R}^2$ este o mulțime mărginită, atunci vom nota cu:

$S_*(A) = \sup\{\text{aria}\, E;\ E \subset A,\ E \in \mathcal{E}\}$ și

$S^*(A) = \inf\{\text{aria}\, F;\ F = A,\ E \in \mathcal{E}\}$.

În cazul când mulțimea A nu conține nici o mulțime elementară, vom defini $S_*(A) = 0$. Cu această precizare, este evident că cele două margini există şi că $S_*(A) \le S^*(A)$.

Definiția 5.1.2 *Spunem că o mulțime mărginită* $A \subset \mathbb{R}^2$ *este măsurabilă* (*are arie*) *în sensul lui Jordan, dacă* $S_*(A) = S^*(A) = S(A)$. *Valoarea comună* $S(A)$ *se numeşte aria mulțimii A.*

Observația 5.1.1 Orice mulțime elementară are arie în sensul Definiției 5.1.2 şi aceasta coincide cu aria definită în (1), adică cu suma ariilor dreptunghiulare care o compun.

Observația 5.1.2 Orice mulțime poligonală are arie în sensul Definiției 5.1.2 şi aceasta coincide cu aria cunoscută din geometria elementară. Într-adevăr, deoarece orice mulțime poligonală este o reuniune finită de mulțimi triunghiulare şi orice triunghi este reuniunea sau diferența a două triunghiuri dreptunghice, este suficient să arătăm că orice mulțime plană a cărei frontieră este un triunghi dreptunghic are arie. Fie un triunghi dreptunghic *ABC*, $\hat{A} = 90$, $\overline{AB} = a$, $\overline{AC} = b$. Împărțim cateta *AB* în *n* părți egale şi considerăm dreptunghiuri de tipul *MNPQ* unde $\overline{MN} = \frac{a}{n}$ şi *MP* este paralelă cu *AB*. Să presupunem că $\overline{BM} = i \cdot \frac{a}{n}$. Din asemănarea triunghiurilor *BMP* şi *BAC* rezultă $\frac{\overline{BM}}{a} = \frac{\overline{MP}}{b}$, deci $\overline{MP} = i \cdot \frac{b}{n}$. Aşadar, aria dreptunghiului *MPQM* este $i \cdot \frac{ab}{n^2}$. Dacă notăm cu *E* reuniunea acestor dreptunghiuri, atunci $E \in \mathcal{E}$, *E* este inclusă în mulțimea triunghiului *ABC* şi aria $E = \frac{ab}{n^2}\left(1+2+\ldots+(n-1)\right) = \frac{ab(n-1)}{2n}$. În mod analog, dacă notăm cu *F* reuniunea dreptunghiurilor de tipul *MRSN*, atunci *F* este o mulțime elementară care include triunghiul *ABC* şi aria $F = \frac{ab}{n^2}(1+2+\ldots+n) = \frac{ab(n+1)}{2n}$. În continuare avem

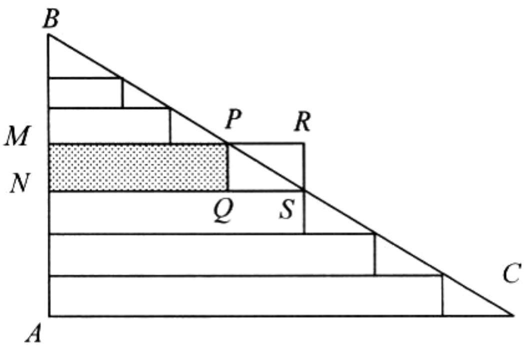


Fig. 2

$$\frac{ab}{2} = \sup_n \frac{ab(n-1)}{2n} \le S_*(\Delta ABC) \le S^*(\Delta ABC) \le \inf_n \frac{ab(n+1)}{n} = \frac{ab}{2},$$

deci $S_*(\Delta ABC) = S^*(\Delta ABC) = \frac{ab}{2}$. Aşadar, mulţimea triunghiulară ABC are arie în sensul Definiţiei 5.1.2 şi aceasta coincide cu aria triunghiului dreptunghic cunoscută din geometria elementară.

Definiţia 5.1.3. *Prin mulţimea elementară poligonală înţelegem orice reuniune finită de mulţimi poligonale care nu au puncte interioare comune.*

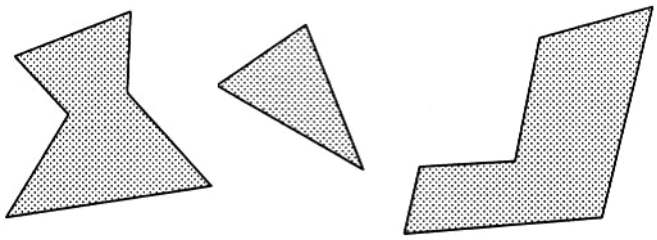


Fig. 3

Propoziţia 5.1.1. *Orice mulţime elementară poligonală este inclusă într-o mulţime elementară de arie cel mult de 8 ori aria mulţimii elementare poligonale iniţială.*

Demonstraţie

Demonstraţia se bazează pe următoarele observaţii:

1) Orice mulţime poligonală este o reuniune finită de mulţimi triunghiulare;
2) Orice triunghi (plin) este reuniunea sau diferenţa a două triunghiuri (pline) dreptunghice;
3) Orice triunghi dreptunghic este inclus într-un dreptunghi de arie de două ori mai mare ca aria sa;
4) Orice dreptunghi este o reuniune finită de pătrate şi un dreptunghi cu raportul laturilor cuprins între 1 şi 2.

Într-adevăr, fie D un dreptunghi de laturi a şi b cu $\frac{a}{b} > 2$.

Fie $r = \frac{m}{n}$ un număr raţional cu proprietatea

$$\frac{a}{b} - 2 < \frac{m}{n} < \frac{a}{b} - 1 \tag{2}$$

şi fie D_1 dreptunghiul de laturi b şi $\frac{m}{n}b$, iar D_2 dreptunghiul de laturi b şi $a - \frac{m}{n}b$.

Evident $D = D_1 \bigcup D_2$. Observăm că dreptunghiul D_1 este reuniunea a $n \times m$ pătrate de latură $\frac{b}{n}$. Pe de altă parte, din (2) rezultă $a - 2b < \frac{m}{n} b < a - b$ şi mai departe $b < a - \frac{m}{n} b < 2b$. Aşadar, avem $1 < \frac{a - \frac{m}{n} b}{b} < 2$, deci raportul laturilor dreptunghiului D_2 este cuprins între 1 şi 2.

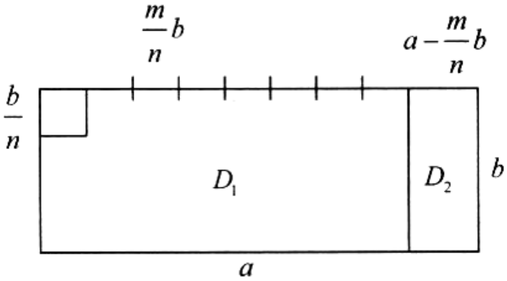


Fig. 4

5) Orice dreptunghi cu raportul laturilor cuprins între 1 şi 2 este inclus într-un pătrat de arie cel mult dublul ariei dreptunghiului inițial.

6) Orice pătrat este inclus într-un pătrat cu laturile paralele cu axele de coordonate şi de arie dublă. Ținând seama şi de 5) rezultă că orice dreptunghi cu raportul laturilor cuprins între 1 şi 2 este inclus într-un pătrat cu laturile paralele cu axele de coordonate şi de arie cel mult de 4 ori aria dreptunghiului inițial.

Din cele de mai sus rezultă că orice mulțime poligonală poate fi inclusă într-o reuniune finită de mulțimi dreptunghiulare cu laturile paralele cu axele de coordonate de arie cel mult de 8 ori aria mulțimii poligonale inițiale.

În sfârşit, să observăm că orice reuniune finită de mulțimi dreptunghiulare cu laturile paralele cu axele de coordonate se poate reprezenta ca o mulțime elementară având aceeaşi arie.

Observație 5.1.3. Există mulțimi plane care nu au arie.

Într-adevăr, fie funcția lui Dirichlet $D(x) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{dacă } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ şi fie $A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \middle| 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le D(x) \right\}$.

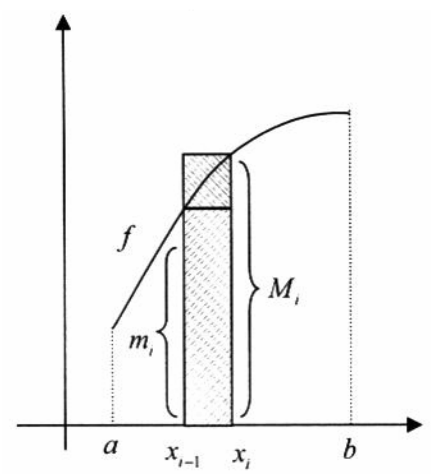
Se observă imediat, în acest caz, că $S_*(A) = 0$ şi $S^*(A) = 1$, deci mulțimea A nu este măsurabilă (nu are arie).

Următoarea propoziție ne furnizează exemple de mulțimi care au arie. Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}_+$ şi fie Γ_f subgraficul său, adică mulțimea $\Gamma_f = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \middle| a \le x \le b,\ 0 \le y \le f(x) \right\}$.

Propoziția 5.1.2 *Dacă f este integrabilă pe* [*a*, *b*], *atunci subgraficul său* Γ_f *are arie şi* aria$\left(\Gamma_f\right) = \int_a^b f(x)dx$.

Demonstrație.

Fie $\Delta : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_n = b$ o diviziune oarecare a intervalului $[a, b]$ şi fie m_i (respectiv M_i) marginea inferioară (superioară) a funcției f pe intervalul $[x_{i-1}, x_i]$. Dacă notăm cu $E_\Delta = \bigcup_{i=1}^{n} [x_{i-1}, x_i] \times [0, m_i]$, atunci $E_\Delta \in \mathcal{E}$, $E_\Delta \subset \Gamma_f$ şi $\text{aria}(E_\Delta) = \sum_{i=1} m_i (x_i - x_{i-1}) = s_\Delta$ unde cu s_Δ am notat suma Darboux inferioară. Rezultă că $s_\Delta \le S_*(\Gamma_f)$.



În mod analog, dacă notăm cu $F_\Delta = \bigcup_{i=1}^{n} [x_{i-1}, x_i] \times [0, M_i]$, atunci $F_\Delta \in \mathcal{E}$, $F_\Delta \supset \Gamma_f$ şi $\text{aria}(F_\Delta) = S_\Delta \ge S^*(\Gamma_f)$.

Fig. 5

Aşadar avem:

$$s_\Delta \le S_*(\Gamma_f) \le S^*(\Gamma_f) \le S_\Delta \tag{3}$$

Faptul că f este integrabilă pe $[a, b]$ implică: $I_* = \sup_\Delta s_\Delta = \inf_\Delta S_\Delta = I^* = \int_a^b f(x)dx$.

În sfârşit, din (3) rezultă $S_*(\Gamma_f) = S^*(\Gamma_f) = \int_a^b f(x)dx$ şi cu aceasta teorema este demonstrată.

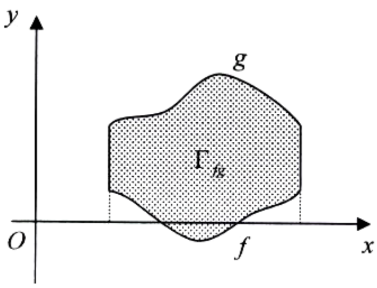


Fig. 6

Fie f, g: $[a, b] \to \mathbb{R}$ două funcții cu proprietatea $f(x) \le g(x)$, $\forall\ x \in [a, b]$ şi fie $\Gamma_{fg} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, a \le x \le b,\ f(x) \le y \le g(x)\right\}$.

Corolarul 5.1.1. *Dacă f şi g sunt integrabile pe $[a, b]$, atunci mulțimea Γ_{fg} are arie şi* $\text{aria}(\Gamma_{fg}) = \int_a^b [g(x) - f(x)]dx$.

Exemplul 5.1.1. Să se calculeze aria elipsei.

Ecuația elipsei este $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$. Din motive de simetrie este suficient să calculăm un sfert din aria elipsei, de exemplu aria mulțimii haşurate în figura 6.

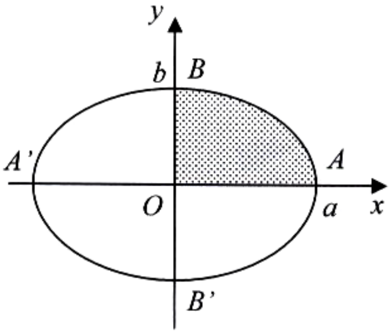


Fig. 7

Arcul $\overset{\frown}{BA}$ este graficul funcției $f(x)=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$, $x\in[0,a]$.

Conform Propoziției 5.1.1 avem:

$$\frac{1}{4}\text{aria}(\text{elipsei}) = f(x) = \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx =$$

$$=\frac{b}{a}\left(\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}\right)\Bigg|_0^a =$$

$$=\frac{b}{a}\cdot\frac{a^2}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi ab}{4}.$$ Aşadar aria elipsei de semiaxe a şi b este egală cu πab.

Teorema 5.1.1. *Fie $A\subset\mathbb{R}^2$ o mulțime mărginită. Condiția necesară şi suficientă ca mulțimea A să aibă arie este ca pentru orice $\varepsilon>0$ să existe două mulțimi elementare E_ε şi F_ε cu proprietățile: $E_\varepsilon\subset A\subset F_\varepsilon$ şi* $\text{aria}(F_\varepsilon)-\text{aria}(E_\varepsilon)<\varepsilon$.

Demonstrație

Necesitatea: Dacă $S_*(A)=S^*(A)=S(A)$, atunci din definiția marginii superioare (inferioare) rezultă că există $E_\varepsilon\in\mathcal{E}$, $E_\varepsilon\subset A$ astfel încât $S(A)-\frac{\varepsilon}{2}<$ $<\text{aria}(E_\varepsilon)$ şi există $F_\varepsilon\in\mathcal{E}$, $F_\varepsilon\supset A$ astfel încât $\text{aria}(F_\varepsilon)<S(A)+\frac{\varepsilon}{2}$. Aşadar, avem $\text{aria}(F_\varepsilon)-\text{aria}(E_\varepsilon)<\varepsilon$.

Suficiența. Dacă pentru orice $\varepsilon>0$, există $E_\varepsilon, F_\varepsilon\in\mathcal{E}$ cu proprietățile: $E_\varepsilon\subset A\subset F_\varepsilon$ şi $\text{aria}(F_\varepsilon)-\text{aria}(E_\varepsilon)<\varepsilon$, atunci avem: $0\le S^*(A)-S_*(A)<\varepsilon$. Cum $\varepsilon>0$ a fost arbitrar, rezultă că $S^*(A)=S_*(A)$, deci A are arie.

Definiția 5.1.4. *Spunem că mulțimea $\Gamma\subset\mathbb{R}^2$ este de arie zero dacă poate fi inclusă într-o mulțime elementară de arie oricât de mică. Cu alte cuvinte, dacă $\forall\ \varepsilon>0$ există o mulțime elementară $F\supset\Gamma$ cu* aria(F) $<\varepsilon$. *În particular avem $S^*(\Gamma)=0$ şi cum $0\le S_*(\Gamma)\le S^*(\Gamma)$ rezultă că Γ are arie şi că* aria(Γ) $=0$. *Cu această definiție Teorema 5.1.1. se poate reformula astfel:*

Teorema 5'.1.1. *Fie $A\subset\mathbb{R}^2$ o mulțime mărginită. Condiția necesară şi suficientă ca mulțimea A să aibă arie este ca frontiera sa Γ să fie de arie zero.*

Demonstrație.

Dacă A are arie, atunci $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ E_\varepsilon, F_\varepsilon \in \mathrm{E}$ cu proprietățile $E_\varepsilon \subset A \subset F_\varepsilon$ și $\text{aria}\left(F_\varepsilon \setminus E_\varepsilon\right) = \text{aria}\left(F_\varepsilon\right) - \text{aria}\left(E_\varepsilon\right) < \varepsilon$. Cum $\Gamma = fr.A \subset F_\varepsilon \setminus \overset{\circ}{E}_\varepsilon$ și $F_\varepsilon \setminus \overset{\circ}{E}_\varepsilon$ este de asemenea o mulțime elementară, rezultă că Γ este de arie zero.

Afirmația reciprocă rezultă din Observația că orice mulțime elementară care conține frontiera Γ a mulțimii A se poate scrie ca diferența a două mulțimi elementare $F \setminus E$ cu $E \subset A \subset F$.

Corolarul 5.1.2. *Graficul oricărei funcții continue* $f : [a, b] \to \mathrm{P}$ *este o mulțime de arie zero.*

Într-adevăr, funcția f fiind continuă, este integrabilă și conform Propoziției 5.1.1 subgraficul său are arie. Afirmația rezultă acum din Teorema 5'.1.1.

Corolarul 5.1.3. *Orice mulțime plană a cărei frontieră este o reuniune finită de grafice de funcții continue, are arie.* (*Afirmația rezultă din Corolarul 5.1.2, din observația că o reuniune finită de mulțimi de arie zero este de asemenea de arie zero și din Teorema 5'.1.1*).

Teorema 5"1.1. *O mulțime mărginită* $A \subset \mathbb{R}^2$ *are arie dacă și numai dacă pentru orice* $\varepsilon > 0$ *există două mulțimi elementare poligonale* P_ε *și* Q_ε *cu proprietățile:* $P_\varepsilon \subset A \subset Q_\varepsilon$ *și* $\text{aria}\, Q_\varepsilon - \text{aria}\, P_\varepsilon < \varepsilon$.

Afirmația rezultă din Propoziția 5.1.1 și din Teorema 5.1.1.

Observația 5.1.4. Orice disc (mulțime plană a cărei frontieră este un cerc) are arie.

Într-adevăr, dacă notăm cu P_n (respectiv Q_n) mulțimea poligonală a cărei frontieră este poligonul regulat cu n laturi înscris (respectiv circumscris) în cerc, atunci $\text{aria}Q_n - \text{aria}P_n$ este oricât de mică pentru n suficient de mare.

În continuare notăm cu (θ, ρ) coordonatele polare în plan.

Propoziția 5.1.3. *Fie* $\rho = \rho(\theta)$, $\theta \in [\alpha, \beta]$ *o funcție continuă și fie*

$$A = \left\{(\theta, \rho) \,\middle|\, \alpha \le \theta \le \beta,\ 0 \le \rho \le \rho(\theta)\right\}.$$ *Atunci A are arie și* $\text{aria}A = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_\alpha^\beta \rho^2(\theta)\, d\theta$.

Demonstrație

Fie $\Delta_n : \alpha = \theta_0 < \theta_1 < \ldots < \theta_{i-1} < \theta_i < \ldots < \theta_n = \beta$ o diviziune echidistantă a intervalului $[\alpha, \beta]$.

Fie m_i (respectiv M_i) marginea inferioară (superioară) a funcției $\rho = \rho(\theta)$, $\theta \in [\theta_{i-1}, \theta_i]$. Aria sectorului de cerc $OR_iP_i = \{(\theta, \rho) | \theta_{i-1} \le \theta \le \theta_i, 0 \le \rho \le \rho(\theta)\}$

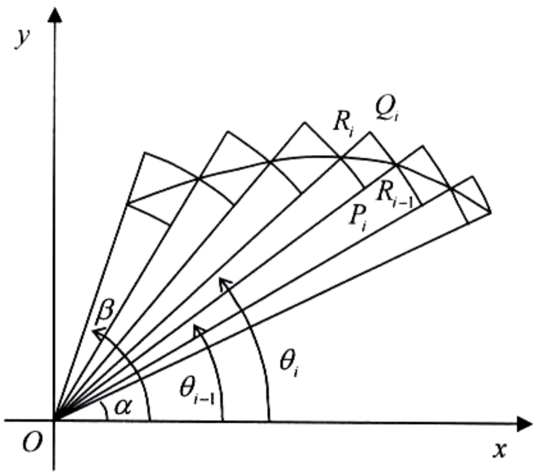


Fig. 8

este egală cu $\frac{1}{2} m_i^2 (\theta_i - \theta_{i-1})$, iar aria sectorului de cerc OQ_iR_{i-1} este egală cu $\frac{1}{2} M_i^2 (\theta_i - \theta_{i-1})$.

Dacă notăm cu P_n (respectiv Q_n) reuniunea celor n sectoare de cerc OR_iP_i (respectiv OQ_iR_{i-1}) atunci $P_n \subset A \subset Q_n$ şi

aria $P_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i^2 (\theta_i - \theta_{i-1})$ iar

aria $Q_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} M_i^2 (\theta_i - \theta_{i-1})$.

Observăm că cele două sume sunt sumele Darboux asociate funcției $\frac{1}{2}\rho^2(\theta)$, $\theta \in [\alpha, \beta]$ şi diviziunii Δ_n. Ținând seama că $\|\Delta_n\| = \frac{\beta - \alpha}{n} \to 0$ şi funcția $\frac{1}{2}\rho^2$ este integrabilă pe $[\alpha, \beta]$, rezultă că există

$$\lim_{n\to\infty} \text{aria } P_n = \lim_{n\to\infty} \text{aria } Q_n = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\theta) d\theta \tag{4}$$

Pe de altă parte, deoarece P_n (respectiv Q_n) are arie pentru $\forall\ \varepsilon > 0$ există o mulțime elementară E_n (respectiv F_n), $E_n \subset P_n \subset A \subset Q_n \subset F_n$ astfel încât aria $P_n -$ aria $E_n < \frac{\varepsilon}{3}$ şi aria $F_n -$ aria $Q_n < \frac{\varepsilon}{3}$. În plus, ținând seama de (4) putem presupune că aria $Q_n -$ aria $P_n < \frac{\varepsilon}{3}$. Aşadar, avem aria $F_n -$ aria $E_n < \varepsilon$, deci mulțimea A are arie şi aria $A = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\theta) d\theta$.

Teorema 5.1.2. *Suportul unei curbe rectificabile este o mulțime de arie zero.*

Demonstrație.

Fie $r : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ drumul parametrizat rectificabil care determină curba γ, definit prin $r(t) = \left(x(t), y(t)\right)$. Fie L lungimea acestui drum şi fie $x = \tilde{x}(s)$, $y = \tilde{y}(s)$, $s \in [0, L]$ reprezentarea sa naturală (Vezi Cap. 4, §4.3).

Fie $\Delta_n : 0 = s_0 < s_1 < \ldots < s_{i-1} < s_i < \ldots < s_n = L$ o diviziune echidistantă a intervalului [0, L] şi fie M_i punctul de coordonate $\left(\tilde{x}(s_i), \tilde{y}(s_i)\right)$ de pe suportul curbei γ. Lungimea arcului $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$ este $\dfrac{L}{n}$. Considerăm un pătrat D_i cu centrul în M_i şi laturile paralele cu axele de coordonate, de latură $\dfrac{2L}{n}$. Este evident că suportul curbei γ (imaginea funcției vectoriale r) este inclus în $\bigcup_{i=0}^{n} D_i$ şi

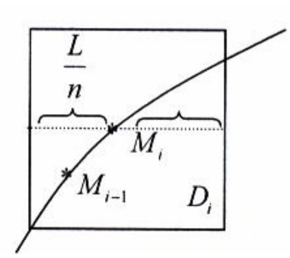


Fig. 9

$\text{aria}\left(\bigcup_{i=0}^{n} D_i\right) \le \sum_{i=0}^{n} \text{aria}\left(D_i\right) = (n+1)\dfrac{4L^2}{n^2}$. Cum $\lim_{n\to\infty} (n+1)\dfrac{4L^2}{n^2} = 0$, pentru n suficient de mare, aria mulțimii $\bigcup_{i=0}^{n} D_i$ este oricât de mică, deci suportul curbei γ este o mulțime de arie zero.

Din Teoremele 5'.1.1 şi 5.1.2 rezultă:

Corolarul 5.1.4. *Orice mulțime plană mărginită a cărei frontieră este o reuniune finită de curbe rectificabilă are arie.*

Corolarul 5.1.5. *Orice mulțime mărginită a cărei frontieră este netedă pe porțiuni are arie.*

Afirmația rezultă din Teorema 4.2.1 şi Corolarul 5.1.4.

Propoziția 5.1.2. *Dacă A_1 şi A_2 sunt două mulțimi care au arie şi nu au puncte interioare comune, atunci reuniunea lor $A = A_1 \cup A_2$ are arie şi*

$\text{aria}(A) = \text{aria}(A_1) + \text{aria}(A_2)$.

Demonstrație. Deoarece frontiera lui A este inclusă în reuniunea frontierelor lui A_1 şi A_2 şi acestea sunt de arie zero, rezultă că şi fr$A$ este de arie zero, deci A are arie.

Pentru orice $\varepsilon > 0$ există mulțimile elementare E_i, F_i, $i = 1,2$ cu proprietățile: $E_1 \subset A_1 \subset F_1$, $E_2 \subset A_2 \subset F_2$, $\text{aria}(F_1) - \text{aria}(E_1) < \varepsilon$, $\text{aria}(F_2) - \text{aria}(E_2) < \varepsilon$.

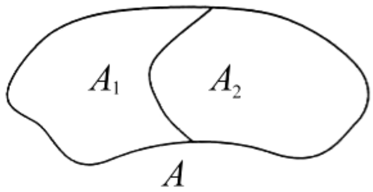


Fig. 10

Avem

$$\text{aria}\, E_1 + \text{aria}\, E_2 \le \text{aria}\, A \le \text{aria}(F_1 \cup F_2) \le$$
$$\le \text{aria}\, F_1 + \text{aria}\, F_2$$

şi

$$\text{aria}\, E_1 + \text{aria}\, E_2 \le \text{aria}\, A_1 + \text{aria}\, A_2 \le$$
$$\le \text{aria}\, F_1 + \text{aria}\, F_2$$

Aceste inegalități implică

$$\left| \text{aria}\, A - (\text{aria}\, A_1 + \text{aria}\, A_2) \right| \le \text{aria}\, F_1 - \text{aria}\, E_1 + \text{aria}\, F_2 - \text{aria}\, E_2 < 2\varepsilon .$$

Cum $\varepsilon > 0$ a fost arbitrar, rezultă că $\text{aria}\, A = \text{aria}\, A_1 + \text{aria}\, A_2$.

5.2. INTEGRALA DUBLĂ. DEFINIȚIE. PROPRIETĂȚI

Fie $A \subset \mathbb{R}^2$ o mulțime mărginită. Atunci există un cerc care conține mulțimea A. Rezultă că distanța dintre orice două puncte ale mulțimii A este mai mică decât diametrul acestui cerc. Aşadar, mulțimea $\{\text{dist}(M,N),\ M \in A,\ N \in A\}$ este o mulțime de numere reale pozitive majorată, deci are margine superioară.

Definiția 5.2.1. *Fie $A \subset \mathbb{R}^2$ o mulțime mărginită. Se numeşte diametrul mulțimii A următorul număr*:

$$d(A) = \text{diam}(A) = \sup\{\, \text{dist}(M,N);\ M \in A,\ N \in A \,\}$$

Fig. 1

Definiția 5.2.2. *Fie A şi B două mulțimi din plan. Se numeşte distanța dintre aceste mulțimi următorul număr*

$$d(A,B) = \inf\{\, \text{dist}(M,N);\ M \in A,\ N \in B \,\}.$$

Este clar că dacă $A \cap B \neq \emptyset$ atunci $d(A,B) = 0$. Afirmația reciprocă nu este în general adevărată. Într-adevăr, distanța dintre graficul funcției $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $x \neq 0$ şi axa Ox este zero, deşi cele două mulțimi sunt disjuncte.

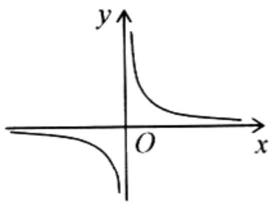


Fig. 2

Teorema 5.2.1. *Fie A şi B două mulţimi plane închise, mărginite şi disjuncte. Atunci* $d(A,B) > 0$.

Demonstraţie. Presupunem prin absurd că $d(A,B) = 0$. Atunci, pentru $\varepsilon = \frac{1}{n}$, există $P_n \in A$ şi $Q_n \in B$ astfel încât

$$\text{dist}(P_n, Q_n) < \frac{1}{n} \tag{1}$$

Deoarece mulţimea *A* este mărginită, rezultă că şi şirul $\{P_n\}$ este mărginit. Din Lema Cesàro deducem că există un subşir $\{P_{n_k}\}$ convergent. Fie $P = \lim\limits_{k\to\infty} P_{n_k}$. Cum *A* este închisă rezultă că $P \in A$. Pe de altă parte, din (1) rezultă că subşirul $\{Q_{n_k}\}$ este de asemenea convergent şi limita sa este tot *P*. Evident, $P \in B$, pentru că *B* este închisă. Am ajuns astfel la o contradicţie şi anume $P \in A \cap B$, adică *A* şi *B* nu sunt disjuncte.

În cele ce urmează vom nota cu *D* un domeniu compact din $\mathbb{R}^2$, adică o mulţime conexă, închisă şi mărginită. Presupunem în plus că *D* are arie. Aceasta se întâmplă, de exemplu, dacă frontiera lui *D* este o reuniune finită de curbe rectificabile. În particular dacă este netedă pe porţiuni.

Definiţia 5.2.3. *Se numeşte partiţie a lui D orice familie finită de subdomenii* $D_i \subset D$, $i = \overline{1,p}$, *care au arie, nu au puncte interioare comune şi* $D = \bigcup\limits_{i=1}^{p} D_i$.

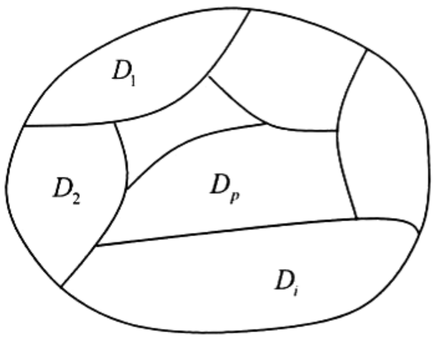


Fig. 3

Dacă notăm cu ρ partiţia $D_1, D_2, \ldots, D_p$ a lui *D* atunci norma acestei partiţii se defineşte astfel: $\|\rho\| = \max\{\,\text{diam}(D_i);\ 1 \le i \le p\,\}$.

Din Propoziţia 5.1.2 rezultă că $\text{aria}\, D = \sum\limits_{i=1}^{p} \text{aria}\, D_i$.

Definiţia 5.2.4. *Spunem că partiţia* ρ' *a domeniului D este mai fină ca partiţia* ρ *a acestui domeniu şi notăm aceasta cu* $\rho' \succ \rho$, *dacă fiecare subdomeniu al partiţiei* ρ *este o reuniune finită de subdomenii ale partiţiei* ρ'. *Aşadar, dacă* ρ *este partiţia* $(D_i)_{1\le i\le p}$, *atunci*

ρ' *este de forma* $\{D'_{ij}\}_{\substack{1\le i\le p\\1\le j\le n_i}}$ *şi* $D_i = \bigcup_{j=1}^{n_i} D'_{ij}$, $\forall\ i=\overline{1,p}$.

Este evident că dacă $\rho \prec \rho'$ atunci $\|\rho\| \ge \|\rho'\|$. Fie $\rho : D_1, D_2, \ldots, D_p$ o partiţie a domeniului D şi fie $f : D \to$ P o funcţie mărginită. Notăm cu:

$$m = \inf\left\{ f(x,y) \middle| (x,y)\in D \right\},\quad M = \sup\left\{ f(x,y) \middle| (x,y)\in D \right\}$$

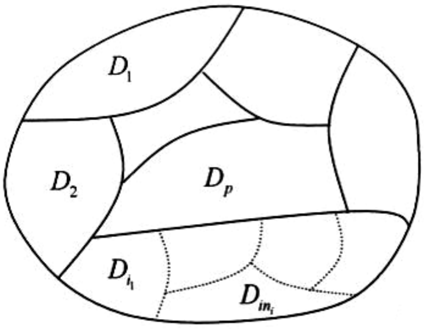


Fig. 4

$$m_i = \inf\left\{ f(x,y) \middle| (x,y)\in D_i \right\},$$

$$M_i = \sup\left\{ f(x,y) \middle| (x,y)\in D_i \right\}.$$

Sumele Darboux corespunzătoare funcţiei f şi partiţiei ρ se definesc astfel:

$$s_\rho = \sum_{i=1}^{p} m_i \operatorname{aria} D_i \quad \text{şi} \quad S_\rho = \sum_{i=1}^{p} M_i \operatorname{aria} D_i .$$

Deoarece $m \le m_i \le M_i \le M$, $\forall\ i$ şi, $\operatorname{aria} D = \sum_{i=1}^{p} \operatorname{aria} D_i$, rezultă:

$$m(\operatorname{aria} D) \le s_\rho \le S_\rho \le M(\operatorname{aria} D) \tag{2}$$

Lema 5.2.1. *Dacă* $\rho \prec \rho'$ *atunci* $s_\rho \le s_{\rho'} \le S_{\rho'} \le S_\rho$.

Demonstraţie

Presupunem că partiţia ρ se compune din domeniile $(D_i)_{1\le i\le p}$ şi partiţia ρ' din domeniile $\{D'_{ij}\}_{\substack{1\le i\le p\\1\le j\le n_i}}$. Cum $\rho \prec \rho'$ rezultă că pentru orice $i=\overline{1,p}$ avem $D_i = \bigcup_{j=1}^{n_i} D'_{ij}$. Dacă notăm cu $m'_{ij} = \inf\left\{ f(x,y) \middle| (x,y)\in D'_{ij} \right\}$, atunci $m'_{ij} \ge m_i$, $\forall\ i=\overline{1,p}$, $\forall\ j=\overline{1,n_i}$. În continuare avem

$$s_\rho = \sum_{i=1}^{p} m_i \operatorname{aria} D_i = \sum_{i=1}^{p} m_i \left(\sum_{j=1}^{n_i} \operatorname{aria} D'_{ij} \right) \le \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{n_i} m'_{ij} \operatorname{aria} D'_{ij} = s_{\rho'} .$$

Aşadar, am arătat că $s_\rho \le s_{\rho'}$. În mod asemănător se arată că $S_{\rho'} \le S_\rho$.

Lema 5.2.2. *Pentru orice două partiţii* ρ' *şi* ρ'' *ale domeniului D avem:* $s_{\rho'} \le S_{\rho''}$.

Demonstraţie

Să presupunem că partiția ρ' se compune din subdomeniile $\left(D_i'\right)_{1\le i\le p}$ iar partiția ρ'' din subdomeniile $\left(D_j''\right)_{1\le j\le q}$. Dacă notăm cu ρ partiția formată din domeniile $\left(D_i'\cap D_j''\right)_{\substack{1\le i\le p\\ 1\le j\le q}}$, atunci ρ este mai fină şi ca ρ' şi ca ρ''. Din Lema 5.1.2 rezultă: $s_{\rho'}\le s_\rho\le S_\rho\le S_{\rho''}$.

În continuare vom nota cu

$I_*=\sup\left\{ s_\rho \,\middle|\, \rho-\text{partiție a lui } D\right\}$ şi $I^*=\inf\left\{ S_\rho \,\middle|\, \rho-\text{partiție a lui } D\right\}$.

Existența acestor margini rezultă din inegalitățile (2). Din Lema 5.2.2 rezultă că $I_*\le I^*$.

Definiția 5.2.5. *Spunem că funcția f este integrabilă pe domeniul D dacă* $I_*=I^*=I$. *Valoarea comună I se notează cu* $I=\iint\limits_D f\left(x,y\right)dx\,dy$ *şi se numeşte integrala dublă a funcției f pe domeniul D.*

Lema 5.2.3. *Pentru orice* $\varepsilon>0$ *există* $\delta_\varepsilon>0$ *astfel încât pentru orice partiție* ρ *a domeniului D cu* $\left\|\rho\right\|<\delta_\varepsilon$ *avem:* $I_*-\varepsilon<s_\rho\le S_\rho<I^*+\varepsilon$.

Demonstrație. Din definiția marginii superioare rezultă că $\forall\ \varepsilon>0$ există o partiție ρ_0 a domeniului *D* astfel încât

$$I_*-\frac{\varepsilon}{2}<s_{\rho_0} \tag{3}$$

Vom nota cu $\left(G_\kappa\right)_{1\le\kappa\le r}$ elementele partiției ρ_0, cu Γ_κ frontiera mulțimii G_κ şi cu $\Gamma=\bigcup\limits_{\kappa=1}^{r}\Gamma_\kappa$. Deoarece G_κ are arie, rezultă că Γ_κ este de arie zero. Cum Γ este o reuniune finită de mulțimi mărginite închise, de arie zero, rezultă că Γ este o mulțime închisă, mărginită de arie zero.

Pentru orice $\varepsilon>0$ există o mulțime elementară *E* cu proprietățile $\Gamma\subset E$ şi $\text{aria}\,E<\dfrac{\varepsilon}{2\left(M-m\right)}$, unde *M* şi *m* sunt marginile funcției *f* pe *D*. Dacă notăm cu *C* frontiera mulțimii elementare *E*, atunci *C* este o mulțime închisă mărginită şi putem presupune că $\Gamma\cap C=\varnothing$. Din Teorema 5.2.1 rezultă că $\text{dist}\left(C,\Gamma\right)=\delta_\varepsilon>0$. Fie $\rho:\left(D_i\right)_{1\le i\le p}$ o partiție a domeniului *D* cu $\left\|\rho\right\|<\delta_\varepsilon$. Să observăm că elementele partiției ρ sunt de două feluri şi anume: Dacă $D_i\cap\Gamma\ne\varnothing$ atunci $D_i\subset E$; dacă $D_i\cap\Gamma=\varnothing$ atunci există o singură mulțime G_κ astfel încât $D_i\subset G_\kappa$. Dacă

$I = \{1, 2, \dots, p\}$, atunci notăm cu $I_1 = \{ i \in I \mid D_i \cap \Gamma \neq \varnothing \}$ şi cu $I_2 = I \setminus I_1$. Aşadar, dacă $i \in I_1$ avem $D_i \subset E$ şi dacă $i \in I_2$ există un κ (unic) astfel încât $D_i \subset G_\kappa$. Fie $\tilde{\rho}$ partiția formată din mulțimile $(D_i \cap G_\kappa)_{i,\kappa}$.

Din cele de mai sus rezultă că elementele lui $\tilde{\rho}$ sunt de forma $(D_i \cap G_\kappa)_{i \in I_1, \kappa = \overline{1,r}}$ şi $\{D_j\}_{j \in I_2}$.

În continuare avem $s_{\tilde{\rho}} - s_\rho = \sum_{i \in I_1} \sum_{\kappa=1}^{r} \tilde{m}_{i\kappa} \operatorname{aria}(D_i \cap G_\kappa) - \sum_{i \in I_1} m_i \operatorname{aria}(D_i) \leq$ $\leq \sum_{i \in I_1} M \operatorname{aria} D_i - \sum_{i \in I_1} m \operatorname{aria} D_i \leq (M - m) \operatorname{aria} E < (M - m) \frac{\varepsilon}{2(M - m)} = \frac{\varepsilon}{2}$. Aşadar

$$s_{\tilde{\rho}} < s_\rho + \frac{\varepsilon}{2} \tag{4}$$

Pe de altă parte, din Lema 5.2.1 rezultă că $s_{\rho_0} \leq s_{\tilde{\rho}}$, deoarece $\rho_0 \prec \tilde{\rho}$. Ținând seama acum de (3) şi (4) obținem:

$$I_* - \frac{\varepsilon}{2} < s_{\rho_0} \leq s_{\tilde{\rho}} < s_\rho + \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{deci} \quad I_* - \varepsilon < s_\rho .$$

Cealaltă inegalitate din enunț se demonstrează asemănător.

Teorema 5.2.2 (Darboux) *Fie D un domeniu compact care are arie şi $f : D \to$ P o funcție mărginită. Condiția necesară şi suficientă ca f să fie integrabilă pe D este ca pentru orice $\varepsilon > 0$ să existe $\delta_\varepsilon > 0$ cu proprietatea că pentru orice partiție ρ a lui D cu $\|\rho\| < \delta_\varepsilon$ să avem $S_\rho - s_\rho < \varepsilon$.*

Demonstrație.

Necesitate. Prin ipoteză $I_* = I^* = I$. Din Lema 5.2.3 rezultă că $\forall\ \varepsilon > 0$, există $\delta_\varepsilon > 0$ astfel încât ∀ ρ partiție a lui D cu $\|\rho\| < \delta_\varepsilon$ avem

$$I - \frac{\varepsilon}{2} < s_\rho \leq S_\rho < I + \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{deci} \quad . \; S_\rho - s_\rho < \varepsilon .$$

Suficiență. Prin ipoteză $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta_\varepsilon > 0$ astfel încât $S_\rho - s_\rho < \varepsilon$ pentru orice partiție ρ cu $\|\rho\| < \delta_\varepsilon$. Din inegalitățile $s_\rho \leq I_* \leq I^* \leq S_\rho$ deducem $0 \leq I^* - I_* < \varepsilon$. Cum $\varepsilon > 0$ este arbitrar rezultă $I^* - I_* = 0$, deci *f* este integrabilă pe *D*.

Teorema 5.2.3. *Orice funcție continuă pe D este integrabilă pe D.*

Demonstrație. Fie $f : D \to$ P continuă şi fie $\rho : D_1, \ldots, D_p$ o partiție oarecare a lui D. Atunci avem:

$$S_\rho - s_\rho = \sum_{i=1}^{p} (M_i - m_i) \text{aria}\, D_i .$$

Din continuitatea lui f rezultă pe de o parte că f este mărginită şi îşi atinge marginile pe fiecare domeniu compact D_i, iar pe de altă parte că f este uniform continuă pe D. Fie $(\xi_i', \eta_i') \in D_i$ astfel încât $m_i = f(\xi_i', \eta_i')$ şi fie $(\xi_i'', \eta_i'') \in D_i$ astfel încât $M_i = f(\xi_i'', \eta_i'')$.

Din continuitatea uniformă rezultă că $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ \delta_\varepsilon > 0$ astfel încât $\forall (x', y') \in D$, $(x'', y'') \in D$ cu $|x' - x''| < \delta_\varepsilon$, $|y' - y''| < \delta_\varepsilon$ avem

$$\left| f(x', y') - f(x'', y'') \right| < \frac{\varepsilon}{\text{aria}\, D} .$$

Dacă presupunem acum că $\|\rho\| < \delta_\varepsilon$ va rezulta

$$S_\rho - s_\rho = \sum_{i=1}^{p} \left(f(\xi_i'', \eta_i'') - f(\xi_i', \eta_i') \right) \text{aria}\, D_i < \frac{\varepsilon}{\text{aria}\, D} \sum_{i=1}^{n} \text{aria}(D_i) = \varepsilon .$$

Din Teorema 5.2.2 rezultă că f este integrabilă pe D.

Teorema 5.2.4. *Dacă f este mărginită pe D şi continuă pe D cu excepția eventual a unei mulțimi de arie zero, atunci f este integrabilă pe D.*

Demonstrație.

Fie $M > 0$ astfel încât $|f(x, y)| < M$, $\forall\ (x, y) \in D$ şi fie $\varepsilon > 0$ oarecare.

Prin ipoteză există o mulțime elementară E care conține în interiorul său punctele de discontinuitate ale lui f şi aria $E < \dfrac{\varepsilon}{4M}$.

Dacă notăm cu $\tilde{D} = D \setminus \overset{\circ}{E}$, atunci $\tilde{D}$ este o mulțime închisă şi evident mărginită. Cum f este continuă pe $\tilde{D}$ rezultă că f este uniform continuă pe $\tilde{D}$, deci $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ \delta_\varepsilon > 0$ astfel încât oricare ar fi $(x', y') \in \tilde{D}$, $(x'', y'') \in \tilde{D}$ cu $|x' - x''| < \delta_\varepsilon$, $|y' - y''| < \delta_\varepsilon$ avem $\left| f(x', y') - f(x'', y'') \right| < \dfrac{\varepsilon}{2\, \text{aria}(D)}$. Fie acum ρ o partiție a lui D al cărui prim element este $D_1 = E \cap D$ iar celelalte elemente $D_2, \ldots, D_j$ au diametrele mai mici ca δ_ε. Dacă calculăm diferența $S_\rho - s_\rho$ obținem:

$$S_\rho - s_\rho \le (M_1 - m_1) \text{aria}\, E + \sum_{i=2}^{n} (M_i - m_i) \text{aria}\, D_i <$$

$$< 2M \cdot \frac{\varepsilon}{4M} + \frac{\varepsilon}{2\,\text{aria}\,D} \cdot \sum_{i=2}^{n} \text{aria}\,D_i < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,.$$

Cum $0 \le I^* - I_* \le S_\rho - s_\rho < \varepsilon$ şi $\varepsilon > 0$ este arbitrar rezultă că $I^* = I_*$, deci f este integrabilă pe D.

În continuare vom introduce noţiunea de sumă Riemann. Fie $\rho : D_1, \ldots, D_p$ o partiţie a domeniului D şi fie $(\xi_i, \eta_i) \in D_i$ un punct arbitrar, $\forall\ i = \overline{1, p}$. Notăm cu $(\xi, \eta) = (\xi_i, \eta_i)_{1 \le p \le 1}$. Suma Riemann ataşată funcţiei f, diviziunii ρ şi punctelor intermediare (ξ_i, η_i) se defineşte astfel: $\sigma_\rho(f, \xi, \eta) = \sum_{i=1}^{p} f(\xi_i, \eta_i)\,\text{aria}\,D_i$. Cum $m_i \le f(\xi_i, \eta_i) \le M_i$, $\forall\ i = \overline{1, p}$, rezultă $s_\rho \le \sigma_\rho(f, \xi, \eta) \le S_\rho$, $\forall\ (\xi, \eta)$.

Definiţia 5.1.6. *Fie D un domeniu compact şi fie* $f : D \to$ P *o funcţie mărginită. Spunem că f este integrabilă pe D (în sensul lui Riemann, pe scurt (R)-integrabilă) dacă există un număr finit I cu proprietatea că* $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ \delta_\varepsilon > 0$ *astfel încât oricare ar fi ρ partiţie a lui D cu* $\|\rho\| < \delta_\varepsilon$ *şi oricare ar fi alegerea punctelor intermediare* $(\xi_i, \eta_i) \in D_i$ *avem*

$$\left| \sigma_\rho(f, \xi, \eta) - I \right| < \varepsilon\,.$$

Numărul I se numeşte integrala dublă a funcţiei f pe domeniul D şi se foloseşte notaţia $I = \iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy$.

Observaţia 5.2.1. Pentru orice $\varepsilon > 0$, există $(\alpha_i, \beta_i) \in D$ şi $(\gamma_i, \delta_i) \in D$ astfel încât $S_\rho - \sigma_\rho(f, \alpha, \beta) < \varepsilon$ şi $\sigma_\rho(f, \gamma, \delta) - s_\rho < \varepsilon$.

Într-adevăr, din definiţia marginii superioare rezultă că $\forall\ \varepsilon > 0$, există $(\alpha_i, \beta_i) \in D_i$ astfel încât $M_i - f(\alpha_i, \beta_i) < \dfrac{\varepsilon}{\text{aria}\,D}$.

În continuare avem:

$$S_\rho - \sigma_\rho(f, \alpha, \beta) = \sum_{i=1}^{p} \left(M_i - f(\alpha_i, \beta_i)\right)\text{aria}\,D_i < \frac{\varepsilon}{\text{aria}\,D} \cdot \text{aria}\,D = \varepsilon\,.$$

Cealaltă inegalitate se demonstrează în mod analog.

Folosind această observaţie şi procedând ca în demonstraţia Teoremei 2.3.2 se arată că cele două definiţii ale integralei duble cu sume Riemann şi sume Darboux coincid.

De asemenea, se poate demonstra, ca şi în cazul integralei simple, că are loc următorul criteriu de integrabilitate.

Teorema 5.2.5 (Riemann). *Fie f* : $D \to$ P *mărginită. Condiția necesară şi suficientă ca f să fie integrabilă pe D, este să existe un număr real finit I cu proprietatea că pentru orice şir* $\{\rho_n\}$ *de partiție ale lui D, care satisface condiția* $\lim\limits_{n\to\infty}\|\rho_n\| = 0$ *şi orice şir* $\left(\xi^{(n)},\eta^{(n)}\right)$ *de puncte intermediare să avem* $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_{\rho_n}\left(f,\xi^{(n)},\eta^{(n)}\right) = I$.

Observația 5.2.2. Din Teorema 5.2.5 şi Observația 5.2.1 rezultă că dacă *f* este integrabilă pe *D*, atunci pentru orice şir $\{\rho_n\}$ de partiții ale lui *D*, care satisface condiția $\lim\limits_{n\to\infty}\|\rho_n\| = 0$, avem:

$$\lim_{n\to\infty} s_{\rho_n} = \lim_{n\to\infty} S_{\rho_n} = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy .$$

Fie $\{\rho_n\}$ un şir de partiții ale domeniului *D* cu proprietatea $\lim\limits_{n\to\infty}\|\rho_n\| = 0$. Subdomeniile partiției ρ_n care nu au puncte comune cu frontiera lui *D*, le numim celule interioare. Reuniunea lor o notăm cu P_n. Celelalte subdomenii ale partiției ρ_n le numim celule frontieră şi reuniunea lor o notăm cu Q_n. Evident $D = P_n \cup Q_n$ şi $\text{aria}\, D = \text{aria}\, P_n + \text{aria}\, Q_n$.

Observația 5.2.3. $\text{aria}\, D = \lim\limits_{n\to\infty} \text{aria}\, P_n$.

Într-adevăr, deoarece $\text{aria}\, D = \sup\left\{ \text{aria}\, E;\ E \subset D,\ E \in \mathrm{E} \right\}$, rezultă că $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists$ o mulțime elementară $E_\varepsilon \subset D$ astfel încât

$$\text{aria}\, D < \text{aria}\, E_\varepsilon + \varepsilon \tag{5}$$

Mulțimea E_ε este formată dintr-un număr finit de dreptunghiuri închise, cu laturile paralele cu axele de coordonate. Fără a restrânge generalitatea, putem presupune că mulțimea E_ε este disjunctă de frontiera domeniului *D*, deoarece, în caz contrar, putem micşora (comprima) această mulțime pe direcția axelor de coordonate, astfel încât mulțimea obținută să fie disjunctă de frontiera lui *D* şi să satisfacă în continuare (5). Fie *R* un dreptunghi oarecare al mulțimii E_ε. Conform Teoremei 5.2.1 distanța de la *R* la frontiera lui *D* este strict pozitivă. Notăm cu δ cea mai mică distanță de la frontiera lui *D* la dreptunghiurile mulțimii E_ε şi considerăm o partiție ρ_{n_0} cu $\|\rho_{n_0}\| < \delta$.

Observăm că $E_\varepsilon \subset P_{n_0}$, unde P_{n_0} este reuniunea tuturor celulelor interioare ale partiției ρ_{n_0}. Într-adevăr, dacă $M \in E_\varepsilon$, atunci există un dreptunghi $R \subset E_\varepsilon$ astfel încât $M \in R$. Deoarece distanța de la *M* la frontiera lui *D* este mai mare ca δ,

punctul M nu poate aparține nici unei celule frontieră din partiția ρ_{n_0}, deci aparține unei celule interioare a partiției ρ_{n_0}, adică a mulțimii P_{n_0}. Rezultă că
$\text{aria}\, D < \text{aria}\, P_{n_0} + \varepsilon$, deci

$$\text{aria}\, D = \sup\left\{\text{aria}\, P_n;\ n \in \mathbb{N}^*\right\} = \lim_{n\to\infty} \text{aria}\, P_n .$$

În continuare vom evidenția o consecință importantă a Observației 5.2.3 pentru teoria integralei duble. Fie $\{\rho_n\}$ un şir de partiții ale domeniului D de normă tinzând la 0. Celulele interioare ale partiției ρ_n le notăm cu D'_{ni}, iar celulele frontieră ale lui ρ_n le notăm cu D''_{nj}. Avem $D = P_n \cup Q_n$ unde $P_n = \bigcup_i D'_{ni}$ şi $Q_n = \bigcup_j D''_{nj}$.

Din Observația 5.2.3 deducem că

$$\lim_{n\to\infty} \text{aria}\left(Q_n\right) = 0 \tag{6}$$

Observația 5.2.4. Fie $f : D \to \mathbb{R}$ o funcție mărginită, integrabilă pe D şi fie M'_{ni} (respectiv M''_{nj}) un punct arbitrar din domeniul D'_{ni} (respectiv D''_{nj}). Atunci avem:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_i f\left(M'_{ni}\right) \text{aria}\left(D'_{ni}\right) = \iint_D f\left(x, y\right) dx\, dy .$$

Într-adevăr, deoarece f este mărginită pe D, rezultă că există $K > 0$ astfel încât $\left|f\left(M\right)\right| < K$, $\forall\ M \in D$. În continuare avem:

$$\left|\sum_j f\left(M''_{nj}\right) \text{aria}\left(D''_{nj}\right)\right| \le \sum_j \left|f\left(M''_{nj}\right)\right| \text{aria}\left(D''_{nj}\right) \le K\, \text{aria}\left(Q_n\right) .$$

Ținând seama de Teorema 5.2.5 şi de (6) deducem

$$\iint_D f\left(x, y\right) dx\, dy = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_i f\left(M'_{ni}\right) \text{aria}\left(D'_{ni}\right) + \sum_j f\left(M''_{nj}\right) \text{aria}\left(D''_{nj}\right)\right) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \sum_i f\left(M'_{ni}\right) \text{aria}\left(D'_{ni}\right).$$

5.3. PROPRIETĂȚILE INTEGRALEI DUBLE

Proprietățile integralei duble sunt analoage cu proprietățile integralei simple. Lăsăm demonstrațiile în seama cititorului.

5.3.1. $\iint_D 1.dx\, dy = \text{aria}\, D$.

5.3.2. Dacă f şi g sunt integrabile pe D, atunci $\forall\ \alpha,\ \beta \in$ P, funcţia $\alpha f + \beta g$ este integrabilă pe D şi

$$\iint_D \left[\alpha f(x,y) + \beta g(x,y)\right] dx\,dy = \alpha \iint_D f(x,y)\,dx\,dy + \beta \iint_D g(x,y)\,dx\,dy\ .$$

5.3.3. Dacă f şi g sunt integrabile pe D şi $f(x,y) \le g(x,y)$, $\forall (x,y) \in D$, atunci

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy \le \iint_D g(x,y)\,dx\,dy\ .$$

5.3.4. Dacă f este integrabilă pe D, atunci $|f|$ este integrabilă pe D şi

$$\left|\iint_D f(x,y)\,dx\,dy\right| \le \iint_D |f(x,y)|\,dx\,dy\ .$$

5.3.5. Dacă f este integrabilă pe D şi notăm cu m (respectiv M) marginea inferioară (respectiv superioară) a funcţiei f pe D, atunci există $m \le \mu \le M$ astfel încât

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \mu \operatorname{aria} D\ .$$

Dacă presupunem în plus că f este continuă pe D, atunci există un punct $(\xi,\eta) \in D$ astfel încât

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = f(\xi,\eta) \operatorname{aria} D\ .$$

5.3.6. Dacă domeniul D este reuniunea a două domenii compacte D_1 şi D_2 care au arie, fără puncte interioare comune şi f este integrabilă pe D_1 şi D_2, atunci f este integrabilă pe D şi

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D_1} f(x,y)\,dx\,dy + \iint_{D_2} f(x,y)\,dx\,dy\ .$$

5.4. MODUL DE CALCUL AL INTEGRALEI DUBLE

Definiţia 5.4.1. *Un domeniu compact D se numeşte* ***simplu în raport cu axa Oy****, dacă există două funcţii continue* $\varphi,\psi : [a,b] \to$ P *astfel încât* $\varphi(x) < \psi(x)$ *pentru orice* $a < x < b$ *şi*

$$D = \left\{ (x,y) \in \square^2 \,\middle|\, a \le x \le b;\ \varphi(x) \le y \le \psi(x) \right\}.$$

Un astfel de domeniu este reprezentat în figura 1.

În mod analog, un domeniu D se numeşte simplu în raport cu axa Ox dacă există două funcţii continue $u,v : [c,d] \to$ P astfel încât $u(x) < v(x)$ pentru $c < y < d$ astfel încât

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, c \le y \le d;\ u(x) \le x \le v(x) \right\}.$$

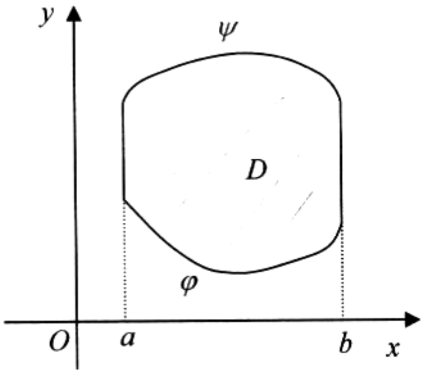


Fig. 1

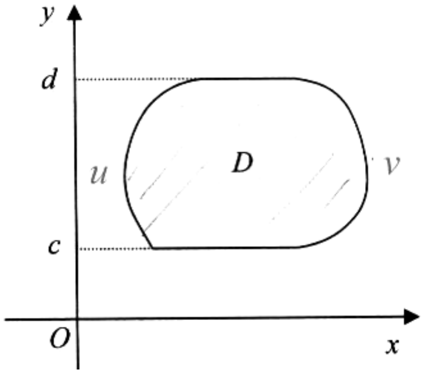


Fig. 2

Un astfel de domeniu este reprezentat în figura 2.

Există domenii compacte care sunt simple în raport cu ambele axe, de exemplu dreptunghiurile, cercurile etc.

Lema 5.4.1. *Fie D un domeniu simplu în raport cu axa Oy şi fie f* : $D \to \mathbb{R}$ *o funcţie continuă pe D.*

Dacă notăm cu *m* (respectiv *M*) marginile funcţiei *f* pe domeniul *D* atunci

$$m(\text{aria}\, D) \le \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy \right) dx \le M(\text{aria}\, D).$$

Demonstraţie.

Pentru început, să observăm că din teorema de continuitate a integralei cu parametru (Teorema 3.2.1) rezultă că funcţia $F(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy$, $x \in [a,b]$, este continuă pe $[a,b]$, deci integrabilă pe $[a,b]$. Prin ipoteză avem:

$$m \le f(x,y) \le M,\ \forall\ (x,y) \in D.$$

Din proprietatea de monotonie a integralei rezultă:

$$\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} m\,dy \le \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy \le \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} M\,dy,\ \forall\ x \in [a,b],$$

sau $$m[\psi(x) - \varphi(x)] \le \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy \le M[\psi(x) - \varphi(x)],\ \forall\ x \in [a,b].$$

Folosind din nou proprietatea de monotonie a integralei obţinem:

$$m\int_a^b [\psi(x) - \varphi(x)]\,dx \le \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy \right) dx \le M \int_a^b [\psi(x) - \varphi(x)]\,dx.$$

Rămâne să observăm că $\int_a^b (\psi(x) - \varphi(x))\,dx = \text{aria}\, D$ (Corolarul 5.1.1) şi cu aceasta lema este demonstrată.

Teorema 5.4.1. *Fie D un domeniu simplu în raport cu axa Oy şi* $f : D \to \mathbb{R}$ *o funcţie continuă. Atunci*

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy \right) dx .$$

Demonstraţie. Fie $\Delta_n : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_n = b$, o diviziune echidistantă a intervalului $[a,b]$.

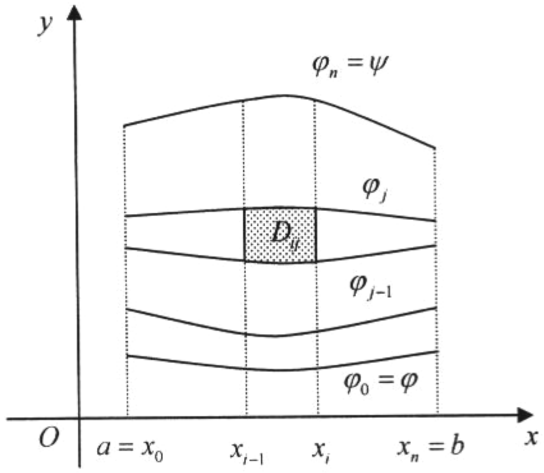


Fig. 3

Aşadar,
$x_i - x_{i-1} = \dfrac{b-a}{n}$, $\forall\ i = \overline{1,n}$ şi $\|\Delta_n\| = \dfrac{b-a}{n}$.

Considerăm funcţiile $\varphi_j : [a,b] \to \mathbb{R}$, $j = \overline{0,n}$ definite astfel:

$$\varphi_j(x) = \varphi(x) + \frac{j}{n}\left[\psi(x) - \varphi(x)\right],$$

$\forall\ x \in [a,b]$. Evident $\varphi_0 = \varphi$ şi $\varphi_n = \psi$.

Notăm cu ρ_n partiţia domeniului *D* formată din mulţimile $\left(D_{ij}\right)_{\substack{0 \le i \le n \\ 0 \le j \le n}}$, unde

$$D_{ij} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x_{i-1} \le x \le x_i ,\ \varphi_{j-1}(x) \le y \le \varphi_j(x) \right\}.$$

Observăm că $\operatorname{diam}\left(D_{ij}\right) \le \dfrac{b-a}{n} + \dfrac{1}{n}\|\psi - \varphi\|_\infty$, $\forall\ x \in [x_{i-1}, x_i]$, de unde deducem că $\|\rho_n\| \to 0$ când $n \to \infty$.

Fie m_{ij} (respectiv M_{ij}) marginea inferioară (respectiv superioară)a funcţiei *f* pe domeniul D_{ij}. Din Lema 5.4.1 rezultă

$$m_{ij} \operatorname{aria} D_{ij} \le \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(\int_{\varphi_{j-1}(x)}^{\varphi_j(x)} f(x,y)\,dy \right) dx \le M_{ij} \operatorname{aria} D_{ij} ,\ \ i,j = \overline{0,n} .$$

Sumând succesiv după *i* şi *j* obţinem:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} \operatorname{aria} D_{ij} \le \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(\sum_{j=1}^n \int_{\varphi_{j-1}(x)}^{\varphi_j(x)} f(x,y)\,dy \right) dx \le \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n M_{ij} \operatorname{aria} D_{ij} .$$

Deoarece $\sum_{j=1}^{n}\int_{\varphi_{j-1}(x)}^{\varphi_j(x)} f(x,y)dy = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy$ şi

$$\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\left(\int_{\varphi_{j-1}(x)}^{\varphi_j(x)} f(x,y)dy\right)dx = \int_a^b\left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy\right)dx$$

rezultă:

$$s_{\rho_n} \le \int_a^b\left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy\right)dx \le S_{\rho_n} \qquad (1)$$

Cum f este integrabilă pe D, din Observația 5.2.2 rezultă că

$$\lim_{n\to\infty} s_{\rho_n} = \lim_{n\to\infty} S_{\rho_n} = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy\,.$$

Trecând la limită după n în inegalitățile (1) obținem

$$\iint_D f(x,y)dx\,dy = \int_a^b\left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy\right)dx\,.$$

Observația 5.4.1. *Dacă domeniul D este simplu în raport cu axa Ox, avem următoarea formulă de calcul*

$$\iint_D f(x,y)dx\,dy = \int_c^d\left(\int_{u(y)}^{v(y)} f(x,y)dx\right)dy\,.$$

Exemplul 5.4.1. Să se calculeze $\iint_D x^2 y\,dx\,dy$ unde D este domeniul mărginit de curbele $y = x^2$, $y = 1$. Observăm că domeniul D este simplu în raport cu axa Oy: $D = \left\{(x,y)\,\middle|\, -1 \le x \le 1,\ x^2 \le y \le 1\right\}$.

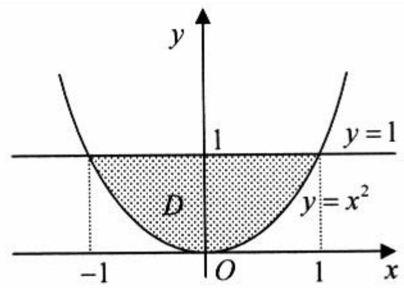


Fig. 4

Conform Teoremei 5.1.1. avem:

$$\iint_D x^2 y\,dx\,dy = \int_{-1}^{1}\left(\int_{x^2}^{1} x^2 y\,dy\right)dx =$$

$$= \int_{-1}^{1}\left(x^2\cdot\frac{y^2}{2}\Bigg|_{x^2}^{1}\right)dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left(x^2 - x^6\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{7}\right)\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{1}{3} - \frac{1}{7} = \frac{4}{21}\,.$$

Pe de altă parte, este uşor de observat că domeniul d este simplu şi în raport cu axa Ox. Într-adevăr $D = \left\{(x,y)\,\middle|\, 0 \le y \le 1,\ -\sqrt{y} \le x \le \sqrt{y}\right\}$. Aşadar avem

$$\iint_D x^2 y\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} x^2 y\,dx \right) dy = \int_0^1 \left(y \cdot \frac{x^3}{3} \Bigg|_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \right) dy =$$

$$= \frac{2}{3} \int_0^1 y^2 \sqrt{y}\,dy = \frac{2}{3} \frac{y^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} \Big|_0^1 = \frac{4}{21}.$$

5.5. SCHIMBAREA VARIABILELOR ÎN INTEGRALA DUBLĂ

Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un domeniu mărginit care are arie, fie funcția vectorială $F\ :\ \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^2$, definită prin $F(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$, $(u,v) \in \overline{\Omega}$ şi fie $D \subset \mathbb{R}^2$ imaginea directă a domeniului Ω prin funcția vectorială *F*. Presupunem că funcția *F* are următoarele proprietăți:

(i) *F* este de clasă C^1 pe $\overline{\Omega}$.

(ii) $F : \Omega \to D$ este bijectivă.

(iii) Transformarea *F* este o transformare regulată pe Ω, adică iacobianul său

$$\det J_F(u,v) = \frac{D(x,y)}{D(u,v)}(u,v) \neq 0\ ,\ \forall\ (u,v) \in \Omega\,.$$

În aceste condiții rezultă că $\overline{D} = F\left(\overline{\Omega}\right)$ este la rândul său un domeniu compact şi că iacobianul transformării *F* păstrează semn constant pe Ω. O astfel de funcție vectorială se mai numeşte şi schimbare de coordonate sau schimbare de variabile.

Observația 5.5.1. O schimbare de variabile transformă o curbă netedă pe porțiuni din domeniul Ω, într-o curbă netedă pe porțiuni din domeniul *D*. Fie $\gamma \subset \Omega$ o curbă netedă şi fie $\rho(t) = (u(t), v(t))$, $t \in [a,b]$ o reprezentare parametrică a sa. Dacă notăm cu $C = F(\gamma)$, atunci $r(t) = \left(x(u(t),v(t)),\ y(u(t),v(t))\right)$, $t \in [a,b]$ este o reprezentare parametrică a curbei *C* ⊂ *D*. Ținând seama de formulele de calcul pentru derivatele parțiale ale funcțiilor compuse obținem:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{\partial x}{\partial u}\left[u(t), v(t)\right] \cdot u'(t) + \dfrac{\partial x}{\partial v}\left[u(t), v(t)\right] \cdot v'(t) \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{\partial y}{\partial u}\left[u(t), v(t)\right] \cdot u'(t) + \dfrac{\partial y}{\partial v}\left[u(t), v(t)\right] \cdot v'(t) \end{cases}$$

Dacă presupunem, prin absurd că *C* nu este netedă, rezultă că există $t_0 \in (a,b)$ astfel încât $\dfrac{dx}{dt}\left[u(t_0), v(t_0)\right] = 0$ şi $\dfrac{dy}{dt}\left[u(t_0), v(t_0)\right] = 0$, deci

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial u}\left[u(t_0), v(t_0)\right] \cdot u'(t_0) + \dfrac{\partial x}{\partial v}\left[u(t_0), v(t_0)\right] \cdot v'(t_0) = 0 \\ \dfrac{\partial y}{\partial u}\left[u(t_0), v(t_0)\right] \cdot u'(t_0) + \dfrac{\partial y}{\partial v}\left[u(t_0), v(t_0)\right] \cdot v'(t_0) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

Cum prin ipoteză $\left(u'(t_0)\right)^2 + \left(v'(t_0)\right)^2 > 0$, rezultă că sistemul (1) admite soluție nebanală. Aşadar, avem:

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\left[u(t_0), v(t_0)\right] = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u}\left[u(t_0), v(t_0)\right] & \dfrac{\partial x}{\partial v}\left[u(t_0), v(t_0)\right] \\ \dfrac{\partial y}{\partial u}\left[u(t_0), v(t_0)\right] & \dfrac{\partial y}{\partial v}\left[u(t_0), v(t_0)\right] \end{vmatrix} = 0,$$

ceea ce contrazice faptul că F este o transformare regulată.

Observația 5.5.2. Printr-o schimbare de variabile, orice punct de pe frontiera domeniului D, corespunde unui punct de pe frontiera domeniului Ω şi reciproc. Cu alte cuvinte $F(\operatorname{fr}\Omega) = \operatorname{fr} D$.

Într-adevăr, să presupunem că $(x_0, y_0) \in \operatorname{fr} D$ şi că există $(u_0, v_0) \in \Omega$ astfel încât $x_0 = x(u_0, v_0)$, $y_0 = y(u_0, v_0)$. Cum transformarea F este regulată în punctul (u_0, v_0), din teorema de inversiune locală rezultă că (x_0, y_0) este un punct interior domeniului D, ceea ce este absurd.

În cele ce urmează prezentăm noțiunea de modul de continuitate al unei funcții şi principalele sale proprietăți, care vor interveni în demonstrația teoremei schimbării de variabile.

Definiția 5.5.1. *Fie* $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, *unde A este o mulțime oarecare şi fie* $\delta > 0$ *oarecare. Vom nota cu*

$$\omega(\delta, f) = \sup\left\{ \left| f(M') - f(M'') \right|;\ M', M'' \in A,\ \operatorname{dist}(M', M'') < \delta \right\}.$$

Se observă imediat că dacă $0 < \delta_1 < \delta_2$ atunci $\omega(\delta_1, f) < \omega(\delta_2, f)$.

Observația 5.5.3. O funcție $f : A \to \mathbb{R}$ este uniform continuă pe A, dacă şi numai dacă $\lim\limits_{\substack{\delta\to 0\\ \delta>0}} \omega(\delta, f) = 0$.

Într-adevăr, prin ipoteză, pentru $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ \eta_\varepsilon > 0$ cu proprietatea că pentru orice $M', M'' \in A$ cu $\operatorname{dist}(M', M'') < \eta_\varepsilon$ avem $\left| f(M') - f(M'') \right| < \varepsilon$. Rezultă că dacă $0 < \delta < \eta_\varepsilon$, atunci $\omega(\delta, f) < \varepsilon$, deci $\lim\limits_{\substack{\delta\to 0\\ \delta>0}} \omega(\delta, f) = 0$. Demonstrația afirmației reciproce este asemănătoare.

Observația 5.5.4. Dacă A este convexă, atunci pentru orice $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$ avem $\omega(\delta_1+\delta_2, f) \le \omega(\delta_1, f) + \omega(\delta_2, f)$. În particular, rezultă

$\omega(m\delta, f) \le$, $\forall \ \ m \in \mathbb{N}^*$.

Într-adevăr, fie $M', M'' \in A$ cu $\operatorname{dist}(M', M'') < \delta_1 + \delta_2$ și fie $M = \dfrac{\delta_2}{\delta_1+\delta_2} M' + \dfrac{\delta_1}{\delta_1+\delta_2} M''$. Evident M aparține segmentului de dreaptă de capete M' și M'', deci $M \in A$, deoarece A este convexă. În continuare avem:

$$M - M' = \frac{\delta_1}{\delta_1+\delta_2}(M' - M'') \quad \text{și} \quad M'' - M = \frac{\delta_2}{\delta_1+\delta_2}(M'' - M'), \text{ deci}$$

$$\operatorname{dist}(M, M') = \|M - M'\| = \frac{\delta_1}{\delta_1+\delta_2}\|M'' - M'\| < \frac{\delta_1}{\delta_1+\delta_2}(\delta_1+\delta_2) = \delta_1$$

$$\operatorname{dist}(M, M'') = \|M - M''\| = \frac{\delta_2}{\delta_1+\delta_2}\|M'' - M'\| < \frac{\delta_2}{\delta_1+\delta_2}(\delta_1+\delta_2) = \delta_2 .$$

Așadar, $\exists \ M \in A$ astfel încât $\operatorname{dist}(M, M') < \delta_1$, $\operatorname{dist}(M, M'') < \delta_2$.

Pentru orice $M', M'' \in A$ cu $\operatorname{dist}(M', M'') < \delta_1 + \delta_2$ avem

$$\left|f(M') - f(M'')\right| \le \left|f(M') - f(M)\right| + \left|f(M) - f(M'')\right| < \omega(\delta_1, f) + \omega(\delta_2, f),$$

deci $\quad \omega(\delta_1 + \delta_2, f) \le \omega(\delta_1, f) + \omega(\delta_2, f)$.

Fie $F : \overline{\Omega} \to \overline{D}$, $F(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$, $(u,v) \in \overline{\Omega}$ o schimbare de variabile. Notăm cu

$$\omega(h) = \max\left\{\omega\left(h, \frac{\partial x}{\partial u}\right); \omega\left(h, \frac{\partial x}{\partial v}\right); \omega\left(h, \frac{\partial y}{\partial u}\right); \omega\left(h, \frac{\partial y}{\partial v}\right)\right\},$$

unde, de exemplu, $\omega\left(h, \dfrac{\partial x}{\partial u}\right)$ este modulul de continuitate al funcției $\dfrac{\partial x}{\partial u}$ pe mulțimea Ω, calculat în punctul h, deci

$$\omega\left(h, \frac{\partial x}{\partial u}\right) = \sup\left\{\left|\frac{\partial x}{\partial u}(M') - \frac{\partial x}{\partial u}(M'')\right|; M', M'' \in \Omega, \operatorname{dist}(M', M'') < h\right\}.$$

Deoarece $x, y \in C^1(\overline{\Omega})$, rezultă că $\lim\limits_{h\to 0} \omega(h) = 0$.

Lema 5.5.1. *Fie* $F : \overline{\Omega} \to \overline{D}$, $F(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$, $(u,v) \in \overline{\Omega}$ *o schimbare de variabile, fie* $\Delta = (a, a+h) \times (b, b+h) \subset \Omega$ *și fie* $P = F(\Delta) \subset D$ *imaginea directă a pătratului* Δ *prin transformarea F. Atunci*

$$\operatorname{aria} P = \left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}(a,b)\right| \operatorname{aria} \Delta + \varphi(h) \quad \textit{unde} \quad |\varphi(h)| \le K h^2 \omega(h),$$

K fiind o constantă independentă de h şi de punctul $A(a,b)$.

Demonstrație.

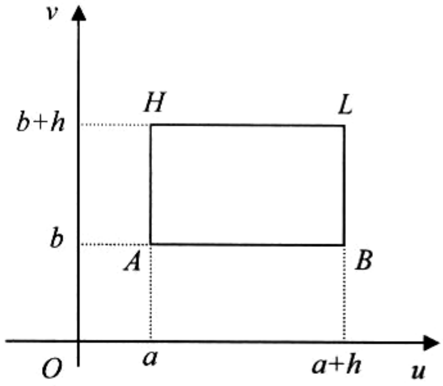


Fig. 1

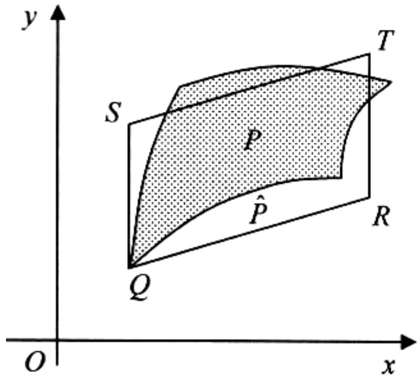


Fig. 2

Fie $c = x(a,b)$ şi $d = y(a,b)$. Din Teorema Lagrange rezultă că există două puncte (ξ,η), (ξ',η') pe segmentul de dreaptă deschis de capete (a,b) şi (u,v) astfel încât:

$$\begin{cases} x(u,v) = c + \dfrac{\partial x}{\partial u}(\xi,\eta)(u-a) + \dfrac{\partial x}{\partial v}(\xi,\eta)(v-b) \\ y(u,v) = d + \dfrac{\partial y}{\partial u}(\xi',\eta')(u-a) + \dfrac{\partial y}{\partial v}(\xi',\eta')(v-b) \end{cases} \tag{2}$$

Dacă notăm cu

$\alpha = \left(\dfrac{\partial x}{\partial u}(\xi,\eta) - \dfrac{\partial x}{\partial u}(a,b)\right)(u-a) + \left(\dfrac{\partial x}{\partial v}(\xi,\eta) - \dfrac{\partial x}{\partial v}(a,b)\right)(v-b)$ şi

$\beta = \left(\dfrac{\partial y}{\partial u}(\xi',\eta') - \dfrac{\partial y}{\partial u}(a,b)\right)(u-a) + \left(\dfrac{\partial y}{\partial v}(\xi',\eta') - \dfrac{\partial y}{\partial v}(a,b)\right)(v-b)$, atunci

$$\begin{cases} x(u,v) = c + \dfrac{\partial x}{\partial u}(a,b)(u-a) + \dfrac{\partial x}{\partial v}(a,b)(v-b) + \alpha \\ y(u,v) = d + \dfrac{\partial y}{\partial u}(a,b)(u-a) + \dfrac{\partial y}{\partial v}(a,b)(v-b) + \beta \end{cases} \tag{3}$$

În continuare considerăm transformarea afină

$$\begin{cases} \hat{x}(u,v) = c + \dfrac{\partial x}{\partial u}(a,b)(u-a) + \dfrac{\partial x}{\partial v}(a,b)(v-b) \\ \hat{y}(u,v) = d + \dfrac{\partial y}{\partial u}(a,b)(u-a) + \dfrac{\partial y}{\partial v}(a,b)(v-b) \end{cases} \tag{4}$$

Fie $\hat{F}:\overline{\Omega}\to\overline{D}$ funcția vectorială $\hat{F}(u,v)=(\hat{x}(u,v),\hat{y}(u,v))$, $(u,v)\in\overline{\Omega}$ şi fie $\hat{P}=\hat{F}(\Delta)$ imaginea directă a pătratului Δ prin transformarea afină $\hat{F}$. Ținând seama de coordonatele vârfurilor A, B, H, L ale pătratului Δ rezultă coordonatele vârfurilor patrulaterului $\hat{P}=QRST$, anume

$$Q=\hat{F}(A)=(c,d)$$

$$R=\hat{F}(B)=\left(c+\frac{\partial x}{\partial u}(a,b)h,\ d+\frac{\partial y}{\partial u}(a,b)h\right)$$

$$T=\hat{F}(L)=\left(c+\frac{\partial x}{\partial u}(a,b)h+\frac{\partial x}{\partial v}(a,b)h,\ d+\frac{\partial y}{\partial u}(a,b)h+\frac{\partial y}{\partial v}(a,b)h\right)$$

$$S=\hat{F}(H)=\left(c+\frac{\partial x}{\partial v}(a,b)h,\ d+\frac{\partial y}{\partial v}(a,b)h\right)$$

Se observă că dreptele QR şi ST sunt paralele şi că

$\left\|\overline{QR}\right\|=\left\|\overline{ST}\right\|=h\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u}(a,b)\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}(a,b)\right)^2}$. Prin urmare, patrulaterul $QRST$ este un paralelogram. Aria sa este egală cu mărimea produsului vectorial

$$\overline{QR}\times\overline{QS}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial x}{\partial u}(a,b)h & \frac{\partial y}{\partial u}(a,b)h & 0\\ \frac{\partial x}{\partial v}(a,b)h & \frac{\partial y}{\partial v}(a,b)h & 0\end{vmatrix}=$$

$$=h^2\left(\frac{\partial x}{\partial u}(a,b)\frac{\partial y}{\partial v}(a,b)-\frac{\partial x}{\partial v}(a,b)\frac{\partial y}{\partial u}(a,b)\right)\vec{k}\ .$$

Aşadar, avem:

$$\text{aria }\hat{P}=\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}(a,b)\right|h^2 \tag{5}$$

Mai reținem că

$$\left\|\overline{QS}\right\|=\left\|\overline{RT}\right\|=h\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial v}(a,b)\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}(a,b)\right)^2} \tag{6}$$

Să estimăm acum distanța de la un punct oarecare $M(x,y)\in P$ la punctul corespunzător $\hat{M}(\hat{x},\hat{y})\in\hat{P}$. Din (3) şi (4) rezultă că $\text{dist}(M,\hat{M})=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$. Pe de altă parte, ținând seama de proprietățile modulului de continuitate, pentru $(u,v)\in\Delta$ obținem

$$|\alpha(u,v)|\le\omega\left(\sqrt{2}h,\frac{\partial x}{\partial u}\right)h+\omega\left(\sqrt{2}h,\frac{\partial x}{\partial v}\right)h\le 2\omega(\sqrt{2}h)h\le 2\omega(2h)h\le 4\omega(h)h$$

Absolut analog se arată că $\left|\beta(u,v)\right| \le 4\omega(h)h$. Aşadar, avem:

$$\operatorname{dist}\left(M,\hat{M}\right) \le \sqrt{32\omega^2(h)h^2} \le 6\omega(h)h = r \tag{7}$$

Notăm cu Γ reuniunea tuturor discurilor de rază r care au centrul în punctul $\hat{M}$, când $\hat{M}$ parcurge frontiera paralelogramului $\hat{P}$. Aria mulţimii Γ este mai mică decât suma ariilor celor patru cercuri de rază r cu centrele în vârfurile paralelogramului $\hat{P}$, plus aria celor patru dreptunghiuri de lăţime $2r$ construite pe laturile paralelogramului $\hat{P}$. Rezultă că

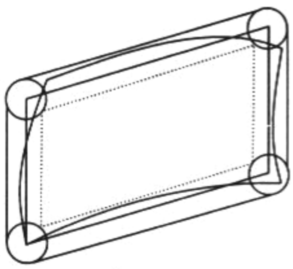


Fig. 3

$$\operatorname{aria}(\Gamma) \le 4\pi r^2 + 4r\left(\left\|\overline{QR}\right\| + \left\|\overline{QS}\right\|\right).$$

Deoarece $x, y \in C^1\left(\overline{\Omega}\right)$, rezultă că derivatele lor parţiale de ordinul I sunt mărginite pe $\overline{\Omega}$, deci $\left\|\overline{QR}\right\| < K_1 h$, $\left\|\overline{QR}\right\| < K_1 h$, unde $K_1 > 0$ este o constantă. Prin urmare avem:

$$\operatorname{aria}(\Gamma) \le 4\pi 36\omega^2(h)h^2 + 48\omega(h)h^2 K_1 \le K\omega(h)h^2 \tag{8}$$

unde K este o constantă pozitivă independentă de h şi de $A(a,b)$.

Observăm că $P \setminus \hat{P} \subset \Gamma$.

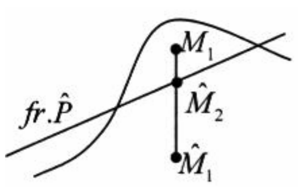


Fig. 4

Într-adevăr, fie $M_1 \in P \setminus \hat{P}$ şi fie $(u_1, v_1) \in \overline{\Delta}$ astfel încât $M_1 = F(u_1, v_1)$. Dacă notăm cu $\hat{M}_1 = \hat{F}(u_1, v_1)$, atunci $\hat{M}_1 \in \hat{P}$ şi $\operatorname{dist}\left(M_1, \hat{M}_1\right) < r$. Cum $M_1 \notin \hat{P}$, rezultă că segmentul de dreaptă $\hat{M}_1 M_1$ întâlneşte frontiera lui $\hat{P}$.

Fie $\hat{M}_2 \in \hat{M}_1 M_1 \cap \operatorname{fr}.\hat{P}$. Avem $\operatorname{dist}\left(M_1\hat{M}_2\right) < \operatorname{dist}\left(M_1\hat{M}_1\right) < r$, deci $M_1 \in \Gamma$. În continuare avem: $P = \hat{P} \cup \left(P \setminus \hat{P}\right)$ de unde rezultă că: $\operatorname{aria} P = \operatorname{aria} \hat{P} + \operatorname{aria}\left(P \setminus \hat{P}\right)$.

Cum $\operatorname{aria}\left(P \setminus \hat{P}\right) \le \operatorname{aria}\Gamma$, deducem că există $\theta \in (0,1)$ astfel încât $\operatorname{aria}(P) = \operatorname{aria}\left(\hat{P}\right) + \theta \cdot \operatorname{aria}(\Gamma)$. Din (5) şi (8) obţinem

$$\operatorname{aria}(P) = \left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}(a,b)\right| h^2 + \theta \cdot K\omega(h)h^2.$$

În sfârşit, dacă notăm $\varphi(h) = \theta \cdot K\omega(h)h^2$ atunci $\left|\varphi(h)\right| \le K \cdot \omega(h)h^2$ şi

$$\operatorname{aria}(P) = \left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}(a,b)\right| h^2 + \varphi(h).$$

Cu aceasta lema este demonstrată.

Teorema 5.5.1. *Fie* $F:\overline{\Omega}\to\overline{D}$, $F(u,v)=(x(u,v),y(u,v))$, $(u,v)\in\overline{\Omega}$ *o schimbare de variabile şi fie* $f:\overline{D}\to\mathbb{R}$ *o funcţie continuă. Atunci*

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy=\iint\limits_\Omega f\left[x(u,v),y(u,v)\right]\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}(u,v)\right|du\,dv.$$

Demonstraţie. Fie $m\in\mathbb{N}^*$ un număr natural oarecare, fie $h=2^{-m}$ şi fie familiile de drepte $x=kh,\ y=lh,\ k,l\in\mathbb{Z}$.

Notăm cu S_m reţeaua de pătrate determinată de aceste drepte şi cu ρ_m partiţia domeniului Ω determinată de această reţea.

Fie Δ_{mi} un pătrat interior oarecare al reţelei S_m şi fie $P_{mi}=F(\Delta_{mi})$ imaginea directă a pătratului Δ_{mi} prin transformarea *F*. Din Lema 5.5.1 rezultă că

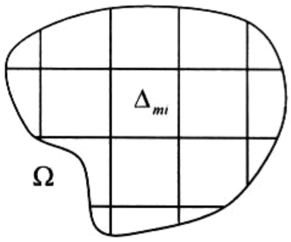


Fig.5

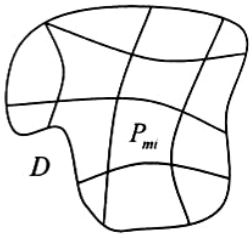


Fig. 6

$$\text{aria}(P_{mi})=\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}(M_{mi})\right|\text{aria}(\Delta_{mi})+\psi(h)\cdot\text{aria}(\Delta_{mi})\ \text{ unde }\ |\psi(h)|\le K\omega(h),$$

iar M_{mi} este un punct din pătratul Δ_{mi}. Dacă notăm cu $Q_{mi}=F(M_{mi})\in P_{mi}$ şi ţinem seama că funcţiile *f*, *x* şi *y* sunt continue şi mărginite rezultă

$$\left|\sum_i f(Q_{mi})\text{aria}(P_{mi})-\sum_i f\left[x(M_{mi}),y(M_{mi})\right]\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}(M_{mi})\right|\text{aria}(\Delta_{mi})\right|\le$$
$$\le K'\omega(h)\sum_i\text{aria}(\Delta_{mi})=K'\omega(h)\text{aria}(\Omega).$$

Cum funcţiile *f* şi $f\circ F$ sunt continue, deci integrabile şi $\lim\limits_{h\to 0}\omega(h)=0$, din Observaţia 5.2.4 deducem că

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy=\lim_{m\to\infty}\sum_i f(Q_{mi})\text{aria}(P_{mi})=$$
$$=\lim_{m\to\infty}\sum_i f\left[x(M_{mi}),y(M_{mi})\right]\text{aria}(\Delta_{mi})=$$
$$=\iint\limits_\Omega f\left[x(u,v),y(u,v)\right]\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}(u,v)\right|du\,dv=.$$

Cel mai utilizat tip de schimbare de variabile este trecerea la coordonate polare:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases} \quad \rho > 0, \quad 0 < \theta < 2\pi \tag{9}$$

Dacă notăm cu $A = \{(\theta,\rho) \mid 0 < \theta < 2\pi, 0 < \rho < \infty\}$, cu $B = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0), x \geq 0\}$ şi cu $F(\theta,\rho) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$, atunci $F : A \to B$ este o transformare regulată (iacobianul său $J_F(\rho,\theta) = \dfrac{D(x,y)}{D(\rho,\theta)} = \rho > 0$).

Fie $0 < \alpha < \beta < 2\pi$ şi fie $\varphi : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă . Notăm cu $\Omega = \{(\theta,\rho) \mid \alpha < \theta < \beta; 0 < \rho < \varphi(\theta)\}$ şi cu $D = F(\Omega)$, atunci $F : \bar{\Omega} \to \bar{D}$ este o schimbare de variabile. Dacă $f : \bar{D} \to \mathbb{R}$ este o funcţie continuă, atunci din Teorema 5.5.1 rezultă:

$$\begin{aligned} \iint_D f(x,y)\,dx\,dy &= \iint_\Omega f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho\, d\rho\, d\theta = \\ &= \int_\alpha^\beta \left(\int_0^{\varphi(\theta)} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho\, d\rho \right) d\theta \end{aligned} \tag{10}$$

Deoarece mulţimea $\bar{D} \setminus D$ (respectiv $\bar{\Omega} \setminus \Omega$) este de arie zero, rezultă că este valabilă şi egalitatea

$$\iint_{\bar{D}} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{\bar{\Omega}} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho\, d\rho\, d\theta \tag{11}$$

Exemplul 5.5.1. Să se calculeze $\iint_D (x^2 + y^2)\,dx\,dy$, unde

$$D = \left\{ (x,y) \mid x^2 + y^2 < a^2,\ \frac{x}{\sqrt{3}} < y < x\sqrt{3},\ x > 0 \right\}.$$

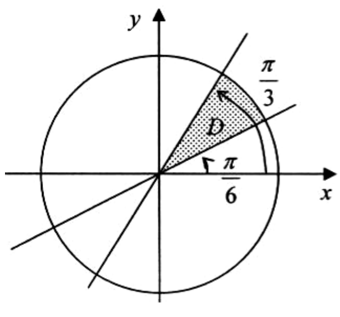


Fig. 7

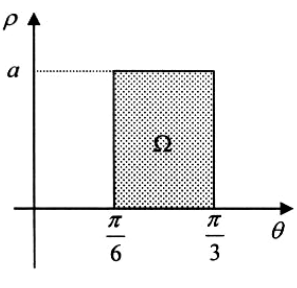


Fig. 8

În acest caz $\Omega = F^{-1}(D)$ este dreptunghiul $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right) \times (0,a)$. Într-adevăr, înlocuind în inegalităţile care definesc domeniul D pe x şi y cu $\rho\cos\theta$ şi $\rho\sin\theta$ rezultă:

$$\Omega = \left\{ (\theta,\rho) \mid \rho^2 < a^2,\ \frac{\cos\theta}{\sqrt{3}} < \sin\theta < \sqrt{3}\cos\theta \right\} =$$

$$=\left\{(\theta,\rho)\,\middle|\,0<\rho<a;\ \frac{1}{\sqrt{3}}<\operatorname{tg}\theta<\sqrt{3}\right\}=\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right)\times(0,a)$$

Aşadar, avem

$$\iint_D\left(x^2+y^2\right)dx\,dy=\iint_\Omega\left(\rho^2\cos^2\theta+\rho^2\sin^2\theta\right)\rho\,d\rho\,d\theta=$$

$$=\int_{\pi/6}^{\pi/3}\left(\int_0^a\rho^3d\rho\right)d\theta=\frac{\pi a^4}{24}.$$

Exemplul 5.5.2. Să se calculeze $\iint_D\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$, unde

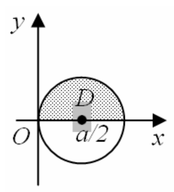


Fig. 9

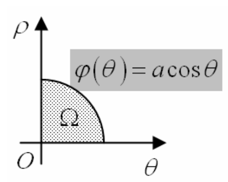


Fig. 10

$D=\left\{(x,y)\,\middle|\,x^2+y^2<2ax,\ y>0\right\}$.

Observăm că ecuaţia $x^2+y^2-2ax=0$ este ecuaţia cercului cu centrul în punctul (a, 0) şi de rază r = a. Înlocuind x şi y cu $\rho\cos\theta$ şi $\rho\sin\theta$ în inegalităţile ce definesc D obţinem

$$\Omega=\left\{(\theta,\rho)\,\middle|\,\rho^2<2a\rho\cos\theta,\ \rho\sin\theta>0\right\}=\left\{(\theta,\rho)\,\middle|\,0<\rho<a\cos\theta,\ 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right\}$$

$$\iint_D\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy=\int_0^{\pi/2}\left(\int_0^{a\cos\theta}\rho^2d\rho\right)d\theta=\frac{a^3}{3}\int_0^{\pi/2}\cos^3\theta\,d\theta=$$

$$=\frac{a^3}{3}\int_0^{\pi/2}\left(1-\sin^2\theta\right)\cos\theta\,d\theta=\frac{2a^3}{9}$$

Exemplul 5.5.3. Să se calculeze $\iint_D(y-x+2)\,dx\,dy$, unde

$D=\left\{(x,y)\,\middle|\,\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}<1\right\}$. Ecuaţia $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ este ecuaţia unei elipse de semiaxe

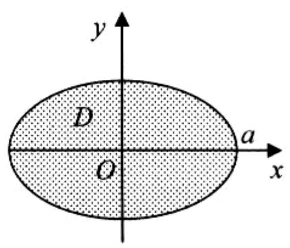


Fig. 11

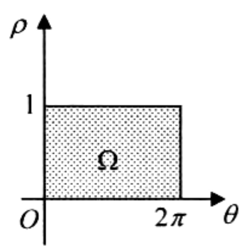


Fig. 12

a şi b. În acest caz se folosesc coordonate polare generalizate şi anume

$$\begin{cases}x=a\rho\cos\theta\\ y=b\rho\sin\theta\end{cases}$$

$0<\rho<1$ şi $0<\theta<2\pi$.

Iacobianul transformării este $ab\rho$.

$$\iint_D (y-x+2)\,dx\,dy = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 (b\rho\sin\theta - a\rho\cos\theta + 2)ab\rho\right)d\rho\,d\theta =$$

$$= ab^2\int_0^{2\pi}\sin\theta\cdot\frac{\rho^3}{3}\Bigg|_0^1 d\theta - a^2b\int_0^{2\pi}\cos\theta\cdot\frac{\rho^3}{3}\Bigg|_0^1 d\theta + 2ab\cdot\int_0^{2\pi}\frac{\rho^2}{2}\Bigg|_0^1 d\theta = 2\pi ab\,.$$

5.6. APLICAȚII ALE INTEGRALEI DUBLE ÎN GEOMETRIE ȘI MECANICĂ

O primă aplicație a integralei duble în geometrie a fost evidențiată în proprietățile integralei duble și anume: $\text{aria}\,D = \iint_D 1\cdot dx\,dy$, unde $D \subset \mathbb{R}^2$, este un domeniu mărginit care are arie.

Fie $f:\overline{D}\to\mathbb{R}$ o funcție integrabilă, fie $\rho: D_1, D_2, \ldots, D_n$ o partiție a domeniului D și fie $(\xi_i,\eta_i)\in D_i$ un punct arbitrar. Reamintim că:

$$I = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \lim_{\|\rho\|\to 0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i,\eta_i)\,\text{aria}\,D_i\,,$$

sensul exact fiind următorul:

Pentru orice $\varepsilon > 0$, există $\delta_\varepsilon > 0$ astfel încât, oricare ar fi partiția ρ a domeniului D, cu $\|\rho\| < \delta_\varepsilon$ și oricare ar fi punctele intermediare $(\xi_i,\eta_i)\in D_i$, avem:

$$\left|\sum_{i=1}^n f(\xi_i,\eta_i)\,\text{aria}\,D_i - I\right| < \varepsilon\,.$$

5.6.1. Masa unei plăci plane

Prin placă plană înțelegem o placă având forma unui domeniu mărginit $D\subset\mathbb{R}^2$, care are arie. Placa este considerată în general neomogenă, densitatea sa fiind dată de funcția continuă $f: D\to\mathbb{R}_+$. Fie $\rho: D_1, D_2, \ldots, D_n$ o partiție oarecare a domeniului D și fie $(\xi_i,\eta_i)\in D_i$ arbitrar. Masa plăcii D_i se aproximează cu produsul $f(\xi_i,\eta_i)\cdot\text{aria}\,D_i$. Aproximarea este cu atât mai bună cu cât norma partiției ρ este mai mică. Prin urmare avem:

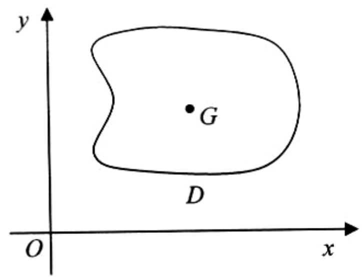


Fig. 1

$\text{masa}(D) \approx \sum_{i=1}^n f(\xi_i,\eta_i)\,\text{aria}\,D_i$ și mai departe:

$$\operatorname{masa}(D)=\lim_{\|\rho\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\operatorname{aria} D_i=\iint_D f(x,y)\,dx\,dy .$$

5.6.2. Coordonatele centrului de greutate al unei plăci plane

Fie D o placă neomogenă de densitățile $f:\overline{D}\to\mathbb{R}_+$ şi fie (x_G, y_G) coordonatele centrului său de greutate G. Considerăm ca mai înainte o partiție ρ: $\rho: D_1, D_2, \dots, D_n$ şi nişte puncte arbitrare $(\xi_i,\eta_i)\in D_i$. Masa plăcii D_i se aproximează cu produsul $f(\xi_i,\eta_i)\cdot \operatorname{aria} D_i$. Dacă vom considera masa plăcii D_i concentrată într-un singur punct şi anume în punctul (ξ_i,η_i), atunci coordonatele centrului de greutate vor fi:

$$x_G \cong \frac{\sum_{i=1}^{n}\xi_i f(\xi_i,\eta_i)\operatorname{aria} D_i}{\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\operatorname{aria} D_i}, \qquad y_G \cong \frac{\sum_{i=1}^{n}\eta_i f(\xi_i,\eta_i)\operatorname{aria} D_i}{\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\operatorname{aria} D_i}.$$

Presupunând că f este continuă pe D, la limită obținem:

$$x_G=\lim_{\|\rho\|\to 0}\frac{\sum_{i=1}^{n}\xi_i f(\xi_i,\eta_i)\operatorname{aria} D_i}{\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\operatorname{aria} D_i}=\frac{\iint_D x f(x,y)\,dx\,dy}{\iint_D f(x,y)\,dx\,dy}$$

$$y_G=\lim_{\|\rho\|\to 0}\frac{\sum_{i=1}^{n}\eta_i f(\xi_i,\eta_i)\operatorname{aria} D_i}{\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\operatorname{aria} D_i}=\frac{\iint_D y f(x,y)\,dx\,dy}{\iint_D f(x,y)\,dx\,dy}.$$

În cazul particular al unei plăci omogene ($f(x,y)=\kappa$, $\forall (x,y)\in D$) rezultă:

$$\begin{cases} x_G=\dfrac{\iint_D x\,dx\,dy}{\iint_D dx\,dy} \\[2ex] y=\dfrac{\iint_D y\,dx\,dy}{\iint_D dx\,dy} \end{cases}$$

Exemplul 5.6.1. Să se afle coordonatele centrului de greutate al unei plăci plane omogene care are forma domeniului

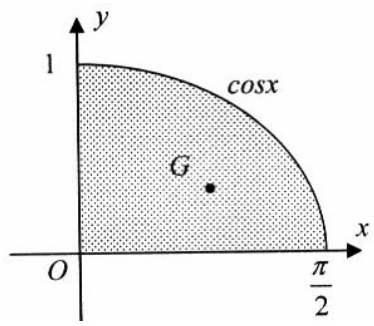


Fig. 2

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \middle| 0\le x\le\frac{\pi}{2};\ 0\le y\le\cos x\right\}.$$

Avem

$$\iint_D dx\,dy=\int_0^{\pi/2}\left(\int_0^{\cos x}dy\right)dx=$$

$$=\int_0^{\pi/2}\cos x\,dx=1$$

$$\iint_D x\,dx\,dy=\int_0^{\pi/2}\left(\int_0^{\cos x}x\,dy\right)dx$$

$$=\int_0^{\pi/2}x\cos x\,dx=$$

$$=x\sin x\,\Big|_0^{\pi/2}-\int_0^{\pi/2}\sin x\,dx=\frac{\pi}{2}+\cos x\Big|_0^{\pi/2}=\frac{\pi}{2}-1.$$

$$\iint_D y\,dx\,dy=\int_0^{\pi/2}\left(\int_0^{\cos x}y\,dy\right)dx=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\cos^2 x\,dx=\frac{1}{4}\int_0^{\pi/2}(1+\cos 2x)\,dx=\frac{\pi}{8}.$$

Aşadar, avem

$$\begin{cases} x_G=\dfrac{\pi}{2}-1 \\ y_G=\dfrac{\pi}{8} \end{cases}.$$

5.6.3. Momentul de inerție al unei plăci plane

Se ştie că momentul de inerție al unui punct material în raport cu o anumită axă este egal cu produsul dintre masa punctului şi pătratul distanței de la punct la axă. În cazul unui sistem de puncte materiale, momentul de inerție în raport cu o axă este suma momentelor de inerție ale punctelor materiale care formează sistemul.

Fie D o placă plană de densitate continuă $f:\overline{D}\to\mathbb{R}_+$, fie $\rho: D_1, D_2,\dots,D_n$ o partiție oarecare a sa şi fie $(\xi_i,\eta_i)\in D_i$ oarecare. Aproximăm ca şi mai înainte masa plăcii D_i cu produsul $f(\xi_i,\eta_i)\cdot\text{aria}(D_i)$ şi considerăm această masă concentrată în punctul (ξ_i,η_i). Momentul de inerție al acestui sistem de puncte materiale în raport cu axa Oy va fi egal cu suma: $\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2 f(\xi_i,\eta_i)\cdot\text{aria}(D_i)$.

Dacă nrma partiției ρ este mică, această sumă poate fi considerată ca o valoare aproximativă a momentului de inerție I_y al plăcii plane D în raport cu axa Oy. La limită avem:

$$I_y = \lim_{\|\rho\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 f(\xi_i, \eta_i) \cdot \text{aria}(D_i) = \iint_D x^2 f(x,y)\,dx\,dy \,.$$

În mod analog momentul de inerție în raport cu axa Ox este

$$I_x = \iint_D y^2 f(x,y)\,dx\,dy \,.$$

Dacă placa plană este omogenă de densitate $f(x,y)=1$, $\forall$ (x,y) atunci

$$I_y = \iint_D x^2\,dx\,dy \,, \quad I_x = \iint_D y^2\,dx\,dy \,.$$

De asemenea, se poate calcula momentul de inerție al plăcii D în raport cu originea $O(0,0)$. Obținem formulele

$$I_0 = \iint_D \left(x^2+y^2\right) f(x,y)\,dx\,dy \text{ respectiv } I_0 = \iint_D \left(x^2+y^2\right)dx\,dy \,.$$

Exemplul 5.6.2. Să se afle momentul de inerție în raport cu axa Oy (respectiv în raport cu originea) a plăcii plane omogene D de densitate 1, unde: $D = \left\{ (x,y) \,\middle|\, x^2+y^2 \le r^2;\ x \ge 0,\ y \ge 0 \right\}$. Avem

$$I_y = \iint_D x^2\,dx\,dy = \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^r \rho^2 \cos^2\theta \cdot \rho\,d\rho \right) d\theta = \frac{r^4}{4} \int_0^{\pi/2} \cos^2\theta\,d\theta =$$

$$= \frac{r^4}{8} \int_0^{\pi/2} (1+\cos 2\theta)\,d\theta = \frac{\pi r^4}{16}$$

$$I_0 = \iint_D \left(x^2+y^2\right)dx\,dy = \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^r \rho^2 \cdot \rho\,d\rho \right) = \int_0^{\pi/2} \frac{r^4}{4}\,d\theta = \frac{\pi r^4}{8} \,.$$

5.7. FORMULA LUI GREEN

Formula lui Green face legătura între integrala dublă şi integrala curbilinie de speța a doua.

Fie $D \subset \mathbb{R}^2$ un domeniu mărginit a cărui frontieră C este o curbă netedă pe porțiuni şi constă dintr-o reuniune finită de curbe simple închise. Fie P, Q: $\overline{D} \to \mathbb{R}$ două funcții continue cu proprietatea că există $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ şi $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ şi sunt continue pe $\overline{D}$. Cu aceste precizări formula lui Green este următoarea:

$$\iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\, dy = \overset{\leftarrow}{\oint\limits_C} P\, dx + Q dy \tag{1}$$

În această formulă orientarea curbei C (sensul de parcurgere al curbei C) este aleasă astfel încât domeniul D să rămână la stânga.

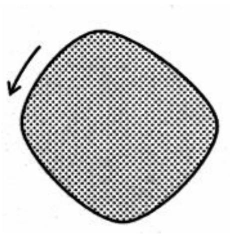


Fig. 1

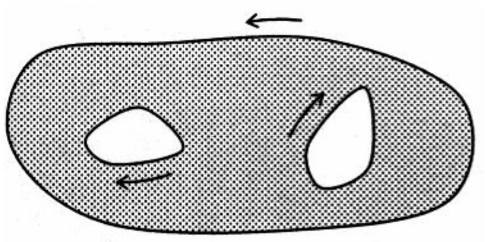


Fig. 2

În figura 1 am exemplificat orientarea curbei C = fr$D$ pentru domeniul a cărui frontieră constă dintr-o singură curbă închisă, iar în figura 2 pentru un domeniu a cărui frontieră constă într-o reuniune finită de mai multe curbe închise.

Definiția 5.7.1 *Prin domeniu elementar de tip Green* (G *– domeniu elementar*) *vom înțelege oricare din cele cinci domenii reprezentate în figura 3.*

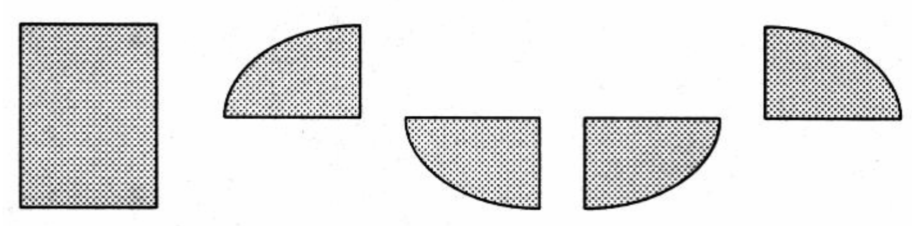


Fig. 3

Lema 5.7.1 *Formula lui Green este verificată pentru orice G-domeniu elementar.*

Demonstrație.

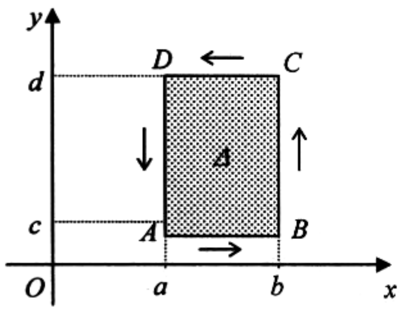


Fig. 4

Pentru început considerăm un domeniu Δ a cărui frontieră este un dreptunghi cu laturile paralele cu axele de coordonate:

$$\Delta = \{(x,y),\ a < x < b,\ c < y < d\}.$$

Putem considera următoarele reprezentări parametrice pentru laturile dreptunghiului:

$$\overline{AB} : x = t,\ y = c,\ t \in [a,b]$$
$$\overline{BC} : x = b,\ y = t,\ t \in [c,d]$$
$$\overline{DC} : x = t,\ y = d,\ t \in [a,b]$$
$$\overline{AD} : x = a,\ y = t,\ t \in [c,d].$$

Avem:

$$\iint_{\Delta} \frac{\partial Q}{\partial x} dx\, dy = \int_c^d \left(\int_a^b \frac{\partial Q}{\partial x} dx \right) dy = \int_c^d \left(Q(x,y)\Big|_a^b \right) dx = \int_c^d Q(b,y)\, dy - \int_c^d Q(a,y)\, dy \quad (2)$$

Ținând seama de modul de calcul al integralei curbilinii de speța a doua rezultă:

$$\left.\begin{aligned} &\int_{\overline{AB}} Q(x,y)\, dy = \int_{\overline{CD}} Q(x,y)\, dy = 0 \\ &\int_{\overline{BC}} Q(x,y)\, dy = \int_c^d Q(b,t)\, dt \quad \text{şi} \quad \int_{\overline{AD}} Q(x,y)\, dy = \int_c^d Q(a,t)\, dt \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Din (2) şi (3) deducem

$$\iint_{\Delta} \frac{\partial Q}{\partial x} dx\, dy = \int_{\overline{BC}} Q\, dy + \int_{\overline{CD}} Q\, dy + \int_{\overline{DA}} Q\, dy + \int_{\overline{AB}} Q\, dy = \overleftarrow{\oint_{\mathrm{Fr}\Delta}} Q\, dy \quad (4)$$

În mod analog avem

$$-\iint_{\Delta} \frac{\partial P}{\partial y} dx\, dy = \int_a^b \left(\int_c^d \frac{\partial P}{\partial y} dy \right) dx = -\int_a^b \left(P(x,y)\Big|_c^d \right) dx =$$

$$= -\int_a^b P(x,d)\, dx + \int_a^b P(x,c)\, dx \quad (5)$$

$$\left.\begin{aligned} &\int_{\overline{BC}} P\, dx = \int_{\overline{AD}} P\, dx = 0 \\ &\int_{\overline{AB}} P(x,y)\, dx = \int_a^b P(t,c)\, dt\ ; \quad \int_{\overline{DC}} P(x,y)\, dx = \int_c^d P(t,d)\, dt \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Din (5) şi (6) deducem:

$$-\iint\limits_{\Delta}\frac{\partial P}{\partial y}dx=\int\limits_{\overline{AB}}P\,dx+\int\limits_{\overline{BC}}P\,dx+\int\limits_{\overline{CD}}P\,dx+\int\limits_{\overline{DA}}P\,dx=\overleftarrow{\oint\limits_{\mathrm{Fr}\Delta}}P\,dx \tag{7}$$

Adunând formulele (4) şi (7) obţinem formula lui Green.

Să considerăm acum un domeniu G-elementar ca cel din figura 5. Mai precis, un astfel de domeniu se defineşte astfel:

Fie $f:[a,b]\to[c,d]$ o funcţie continuă, strict crescătoare şi surjectivă.

$\Delta=\{(x,y);\ a<x<b;\ c<y<f(x)\}$.

Avem

$$-\iint\limits_{\Delta}\frac{\partial P}{\partial y}dx\,dy=-\int_a^b\left(\int_c^{f(x)}\frac{\partial P}{\partial y}dy\right)dx=-\int_a^b P(x,f(x))\,dx+\int_a^b P(x,c)\,dx \tag{8}$$

Considerând următoarele reprezentări parametrice ale arcului $\overset{\frown}{AE}$ şi ale segmentelor $\overline{AB}$ şi $\overline{BE}$:

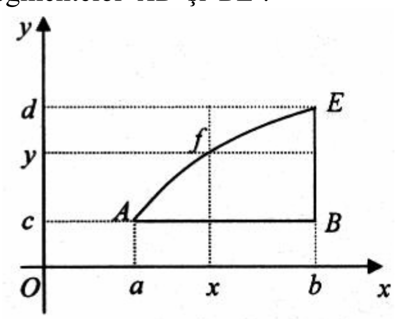


Fig. 5

$$\overset{\frown}{AE}:x=t,\ y=f(t),\ t\in[a,b]$$
$$\overline{AB}:x=t,\ y=c,\quad t\in[a,b]$$
$$\overline{BE}:x=b,\ y=t,\quad t\in[c,d]$$

deducem

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AE}}P(x,y)\,dx=\int_a^b P(t,f(t))\,dt;$$

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\int\limits_{\overline{AB}}P(x,y)\,dt=\int_a^b P(t,c)\,dt\\[2ex]\displaystyle\int\limits_{\overline{BC}}P(x,y)\,dx=0\end{array}\right\} \tag{9}$$

Din (8) şi (9) rezultă:

$$-\iint\limits_{\Delta}\frac{\partial P}{\partial y}dx\,dy=\int\limits_{\overline{AB}}P\,dx+\int\limits_{\overline{BC}}P\,dx+\int\limits_{\overset{\frown}{EA}}P\,dx=\overleftarrow{\oint\limits_{\mathrm{Fr}\Delta}}P\,dx \tag{10}$$

Pe de altă parte avem:

$$\iint\limits_{\Delta}\frac{\partial Q}{\partial x}dx\,dy=\int_c^d\left(\int_{f^{-1}(y)}^b\frac{\partial Q}{\partial x}dx\right)dy=\int_c^d\left(Q(x,y)\Big|_{f^{-1}(y)}^b\right)dy=$$

$$=\int_c^d Q(b,y)\,dy-\int_c^d Q\left[f^{-1}(y),y\right]dy \tag{11}$$

De data aceasta, considerând pentru arcul $\overset{\frown}{AE}$ reprezentarea parametrică:

$\overset{\frown}{AE}:x=f^{-1}(t),\ y=t,\ t\in[c,d]$, deducem

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AE}}Q(x,y)\,dy=\int_c^d Q\left[f^{-1}(t),t\right]dt \tag{12}$$

Pentru segmentele $\overline{AB}$ şi $\overline{BE}$ avem:

$$\int_{\overline{AB}} Q(x,y)\,dy = 0 \quad \text{şi} \quad \int_{\overline{BE}} Q(x,y)\,dy = \int_c^d Q(b,t)\,dt \tag{13}$$

Din (11), (12) şi (13) rezultă:

$$\iint_{\Delta} \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy = \int_{\overline{AB}} Q\,dy + \int_{\overline{BE}} Q\,dy + \int_{\overset{\frown}{EA}} Q\,dy = \overset{\leftarrow}{\oint_{\mathrm{Fr}\,\Delta}} Q\,dy \tag{14}$$

Adunând formulele (10) şi (14) obţinem formula lui Green pentru domeniul considerat în figura 5.

Este evident că demonstraţiile formulei lui Green pentru celelalte domenii G-elementare din figura 3 sunt absolut analoage.

Teorema 5.7.1. *Fie $D \subset \mathbb{R}^2$ un domeniu mărginit a cărui frontieră este netedă pe porţiuni şi constă dintr-o reuniune finită de curbe simple închise. Presupunem în plus că domeniul D este o reuniune finită de G-domenii elementare care nu au puncte interioare comune. Dacă $P, Q, \dfrac{\partial P}{\partial y}, \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ sunt continue pe $\overline{D}$, atunci are loc formula lui Green:*

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \overset{\leftarrow}{\oint_{\mathrm{Fr}\,D}} P\,dx + Q\,dy\,.$$

Demonstraţie.

Să presupunem că $\overline{D} = \bigcup_{k=1}^{m} \overline{D_k}$ unde $\overline{D_k}$ este un G-domeniu elementar, $\forall\, k = \overline{1,m}$. (Vezi Fig. 6).

Ţinând seama de Lema 5.7.1 rezultă

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \sum_{k=1}^{m} \iint_{D_k} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \sum_{k=1}^{m} \overset{\leftarrow}{\oint_{\mathrm{Fr}\,D_k}} P\,dx + Q\,dy \tag{15}$$

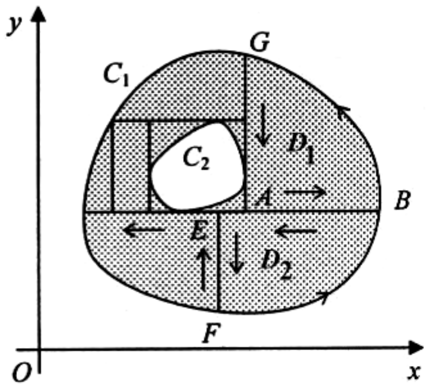


Fig. 6

Frontiera domeniului D se compune din curbele C_1 şi C_2 . Reuniunea frontierelor domeniilor $D_1,\ldots,D_m$ se compune din curbele C_1 şi C_2 şi un număr finit de segmente de dreaptă incluse în D paralele cu axele de coordonate. Fiecare asemenea segment de dreaptă face parte din frontierele a două G-domenii elementare vecine. De exemplu $\overline{AB}$ face parte din frontierele domeniilor D_1 şi D_2 . Să observăm că integralele curbilinii din membrul drept al egalității (15) calculată pe segmentele interioare dispar, deoarece orice astfel de segment este parcurs de două ori în sensuri opuse. De exemplu:

$$\overset{\leftarrow}{\oint}_{\mathrm{Fr}D_1} = \int_{\overline{AB}} + \int_{\overline{BG}} + \int_{\overline{GA}} \quad \text{şi} \quad \overset{\leftarrow}{\oint}_{\mathrm{Fr}D_2} = \int_{\overline{FB}} + \int_{\overline{BA}} + \int_{\overline{AE}} + \int_{\overline{EF}}$$

Contribuția segmentului $\overline{AB}$ în suma $\overset{\leftarrow}{\oint}_{\mathrm{Fr}D_1} + \overset{\leftarrow}{\oint}_{\mathrm{Fr}D_2}$ este $\int_{\overline{AB}} + \int_{\overline{BA}} = 0$.

Aşadar rezultă

$$\sum_{k=1}^{m} \overset{\leftarrow}{\oint}_{\mathrm{Fr}D_k} P\,dx + Q\,dy = \overset{\leftarrow}{\oint}_{C_1 \cup C_2 = \mathrm{Fr}D} P\,dx + Q\,dy \tag{16}$$

Din (15) şi (16) deducem:

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy = \overset{\leftarrow}{\oint}_{\mathrm{Fr}D} P\,dx + Q\,dy \ .$$

Teorema 5.7.2. *Formula lui Green este valabilă pentru orice domeniu poligonal.*

Demonstrație. Deoarece orice domeniu poligonal este o reuniune finită de domenii triunghiulare este suficient să demonstrăm teorema pentru domenii triunghiulare. Fie Δ un domeniu triunghiular oarecare de frontieră ABC. Ducem din

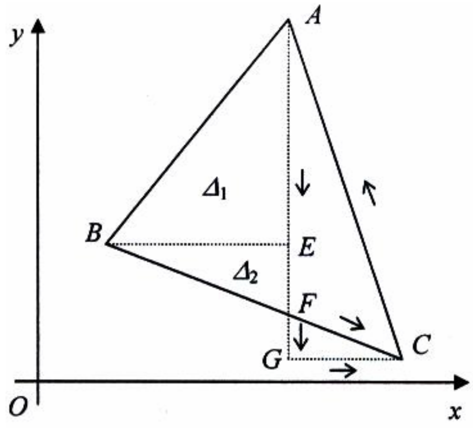


Fig. 7

A o paralelă la Oy, din C o paralelă la Ox şi notăm cu G intersecţia lor. De asemenea, ducem prin B o paralelă la Ox şi notăm cu E intersecţia sa cu dreapta AF. Domeniul Δ este reuniunea domeniilor Δ_1, Δ_2 şi Δ_3, unde Δ_1 are frontiera ABE, Δ_2 are frontiera BEF iar Δ_3 are frontiera AFC. Observăm că Δ_1 şi Δ_2 sunt G-domenii elementare, în timp ce Δ_3 nu are această proprietate. Este clar însă, că Δ_3 se poate reprezenta ca diferenţa a două G-domenii elementare.

Într-adevăr, dacă notăm cu Δ_4 domeniul de frontieră AGC şi cu Δ_5 domeniul de frontieră FGC, atunci Δ_4 şi Δ_5 sunt G-domenii elementare şi $\Delta_3 = \Delta_4 \setminus \Delta_5$.

Ţinând seama de Lema 5.7.1 rezultă:

$$\iint\limits_{\Delta_3}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy=\iint\limits_{\Delta_4}-\iint\limits_{\Delta_5}=\int\limits_{\overline{AG}}+\int\limits_{\overline{GC}}+\int\limits_{\overline{CA}}-\left(\int\limits_{\overline{AG}}+\int\limits_{\overline{GC}}+\int\limits_{\overline{CF}}\right)=\int\limits_{\overline{AF}}+\int\limits_{\overline{FC}}+\int\limits_{\overline{CA}}=$$

$$=\overset{\leftarrow}{\oint\limits_{\mathrm{Fr}\Delta_3}} P\,dx+Q\,dy\ .$$

Aşadar, formula lui Green este variabilă şi pe Δ_3, deci este variabilă pe Δ.

Observaţia 5.7.1 Se poate arăta că formula lui Green este variabilă pentru orice domeniu a cărui frontieră este o curbă simplă, închisă, netedă pe porţiuni.

Într-adevăr, se poate arăta că există un şir de linii poligonale C_n, înscrise în $C = \mathrm{fr}D$, astfel încât

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_{C_n} P\,dx+Q\,dy=\int\limits_{C} P\,dx+Q\,dy\ .$$

Dacă notăm cu D_n domeniul mărginit care are frontiera C_n, atunci

$$\lim_{n\to\infty}\iint\limits_{D_n}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy=\iint\limits_{D}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy\ .$$

Din Teorema 5.7.2 rezultă că formula lui Green este valabilă pe D_n, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Prin trecere la limită, va rezulta că formula lui Green este valabilă şi pentru domeniul D.

Exemplul 5.7.1. Să se calculeze $\overset{\leftarrow}{\oint}_{\mathrm{Fr}\,D} (xy-y)\, dx + (xy+x)dy$ unde

$D: \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \le 1$.

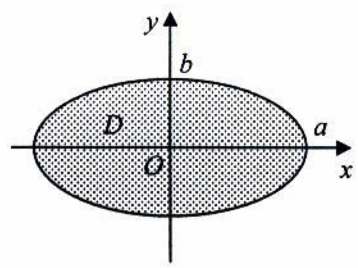


Fig. 8

Dacă notăm cu $P(x,y) = xy - y$ şi cu $Q(x,y) = xy + x$, atunci, din formula lui Green rezultă că

$$\overset{\leftarrow}{\oint}_{\mathrm{Fr}\,D} (xy-y)\, dx + (xy+x)dy =$$

$$= \iint_{D_n} (2 + y - x)\, dx\, dy.$$

Fiind vorba de un domeniu elipsoidal vom folosi coordonate polare generalizate şi anume

$$\begin{cases} x = a\rho\cos\theta \\ y = b\rho\sin\theta \end{cases} \quad \theta \in [0, 2\pi],\ \rho \in [0,1].$$

În continuare avem

$$\iint_D (2+y-x)\, dx\, dy = \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} (2 + b\rho\sin\theta - a\rho\cos\theta)\, ab\rho\, d\theta \right) d\rho =$$

$$= 2ab \int_0^1 \rho\, d\rho \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi ab.$$

Observația 5.7.2 Dacă $D \subset \mathbb{R}^2$ este un domeniu care are arie şi pentru care e valabilă formula lui Green, atunci aria$(D) = \dfrac{1}{2} \overset{\leftarrow}{\oint}_{\mathrm{Fr}\,D} x\, dy - y\, dx$.

Într-adevăr, dacă notăm cu $P(x,y) = -\dfrac{y}{2}$ şi cu $Q(x,y) = \dfrac{x}{2}$, atunci $\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} = 1$. Pe de altă parte ştim că aria $D = \iint_D 1\, dx\, dy$. Aplicând acum formula lui Green rezultă:

$$\text{aria } D = \overset{\leftarrow}{\oint}_{\mathrm{Fr}\,D} P\, dx + Q\, dy = \frac{1}{2} \overset{\leftarrow}{\oint}_{\mathrm{Fr}\,D} x\, dy - y\, dx.$$

Exemplul 5.7.2 să se calculeze aria domeniului elipsoidal $D: \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \le 1$.

Conform Observației 5.7.2, avem: aria$(D) = \dfrac{1}{2} \overset{\leftarrow}{\oint}_{\mathrm{Fr}\,D} x\,dy - y\,dx$.

Fie $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, $t \in [0, 2\pi]$ o reprezentare parametrică a elipsei $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. În continuare avem:

$$\overset{\leftarrow}{\oint}_{\mathrm{Fr}\,D} x\,dy - y\,dx = \int_0^{2\pi} \left(a\cos t \cdot b\cos t + b\sin t \cdot a\cos t\right) dt = 2\pi ab,$$

de unde rezultă că aria $D = \pi ab$.

Observația 5.7.3 Se poate arăta că teorema 5.7.1 rămâne valabilă şi într-o ipoteză mai slabă referitoare la funcțiile P şi Q şi anume P şi Q sunt continue pe $\overline{D}$ iar $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ şi $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ sunt continue şi mărginite pe D.

5.8. INTEGRALE DUBLE GENERALIZATE

În acest paragraf introducem noțiunea de integrală dublă generalizată, care acoperă atât cazul când domeniul este nemărginit, cât şi cazul când funcția este nemărginită.

Fie $D \subset \mathbb{R}^2$ un domeniu mărginit sau nu şi fie $f : D \to$ P, mărginită sau nu. Vom presupune că f este integrabilă pe orice submulțime a lui D care are arie.

Definiția 5.8.1 *Spunem că* $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ *este convergentă, dacă pentru orice şir de domenii mărginite, care au arie,* $\{D_n\}$ *cu proprietățile*:

(i) $D_1 \subset D_2 \subset \ldots \subset D_n \subset \ldots$

(ii) $\overline{D}_n \subset D_{n+1}$, $\forall \ n \in \mathbb{N}^*$

(iii) $\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n = D$

există $\lim_{n\to\infty} \iint_{D_n} f(x,y)\,dx\,dy$ *e finită şi nu depinde de alegerea şirului* $\{D_n\}$.

În cazul când limita nu există, sau e infinită, spunem că $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ este divergentă.

Teorema 5.8.1. *Dacă* $f(x,y) \geq 0$, $\forall\ (x,y) \in D$, *atunci* $\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$ *este convergentă dacă şi numai dacă există cel puţin un şir* $\{D_n\}$ *de domenii mărginite, care au arie, cu proprietăţile* (i)-(iii)*, pentru care şirul* $\{a_n\}$*, unde* $a_n = \iint\limits_{D_n} f(x,y)\,dx\,dy$*, este mărginit.*

Demonstraţie. **Necesitatea** este evidentă

Suficienţa. Fie $\{D_n\}$ un şir de domenii mărginite care au arie cu proprietăţile (i)-(iii) şi fie $a_n = \iint\limits_{D_n} f(x,y)\,dx\,dy$. Din (i) şi din faptul că $f \geq 0$ pe D, rezultă că $\{a_n\}$ este monoton crescător. Cum prin ipoteză $\{a_n\}$ este mărginit, rezultă că $\{a_n\}$ este convergent. Fie $I = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Rămâne să arătăm că $I = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ este independentă de alegerea şirului $\{D_n\}$.

Fie $\{D'_n\}$ un alt şir de domenii mărginite care au arie, cu proprietăţile (i)-(iii) şi fie $a'_n = \iint\limits_{D'_n} f(x,y)\,dx\,dy$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Să observăm că $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$ există $m \in \mathbb{N}^*$ astfel încât

$$\overline{D'_n} \subset D_m \tag{1}$$

Într-adevăr, în caz contrar, există un punct $M_k \in \overline{D'_n}$ astfel încât $M_k \notin D_k$, $\forall\ k \in \mathbb{N}^*$. Obţinem astfel un şir de elemente $\{M_k\}$ din $\overline{D'_n}$. Cum $\overline{D'_n}$ este mărginită şi închisă, rezultă că acest şir conţine un subşir $\{M_{k_m}\}$ convergent. Dacă notăm cu $M = \lim\limits_{m\to\infty} M_{k_m}$, atunci $M \in \overline{D'_n} \subset D = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} D_n$. Fie $n_1 \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $M \in D_{n_1}$. Cum D_{n_1} este deschisă, deducem că există o vecinătate V a punctului M astfel încât $V \subset D_{n_1}$. Pe de altă parte, deoarece $M_k \to M$, rezultă că există un rang $k_1 \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $M_k \in V$, $\forall\ k \geq k_1$. În particular, rezultă că $M_{k_1} \in V \subset D_{k_1}$, ceea ce contrazice modul de alegere a punctelor M_k. Aşadar, am demonstrat incluziunea (1). Din (1) rezultă că

$$a'_n \leq a_m \leq I \tag{2}$$

Cum $\{a'_n\}$ este crescător, deducem că $\{a'_n\}$ este convergent şi $I' = \lim\limits_{n\to\infty} a'_n \leq I$.

Inversând rolul şirurilor $\{D_n\}$ şi $\{D'_n\}$ rezultă că $I \leq I'$, deci $I = I'$.

Exemplul 5.8.1. Să se studieze convergenţa integralei generalizate $\iint_D e^{-x^2-y^2}dx\,dy$, unde $D=\mathbb{R}^2$. Observăm că este o integrală generalizată în care domeniul D este nemărginit. Deoarece $f(x,y)=e^{-x^2-y^2}\geq 0$, $\forall\ (x,y)\in\mathbb{R}^2$, rezultă că este suficient să găsim un şir de domenii mărginite, care au arie $\{D_n\}$, pentru care şirul cu termenul general $a_n=\iint_{D_n} f(x,y)\,dx\,dy$ este mărginit.

Alegem $D_n=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ x^2+y^2<n^2\right\}$, $n\in\mathbb{N}^*$.

Este evident că $\{D_n\}$ are proprietăţile (i)-(iii). Pe de altă parte,

$$a_n=\iint_D e^{-x^2-y^2}dx\,dy=\int_0^{2\pi}\left(\int_0^n e^{-\rho^2}\rho\,\mathrm{d}\rho\right)=\pi\left(1-e^{-n^2}\right)\to\pi .$$

Rezultă că integrala este convergentă şi $\iint_D e^{-x^2-y^2}dx\,dy=\pi$.

Pe de altă parte fie $D_n'=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ |x|<n,\ |y|<n\right\}$. Şirul $\{D_n'\}$ este un şir de pătrate pline, care îndeplineşte condiţiile (i)-(iii), rezultă că

$$\pi=\iint_D e^{-x^2-y^2}dx\,dy=\lim_{n\to\infty}\int_{-n}^{n}\left(\int_{-n}^{n}e^{-x^2-y^2}dx\right)dy=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\int_{-n}^{n}e^{-x^2}dx\right)\left(\int_{-n}^{n}e^{-y^2}dy\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\int_{-n}^{n}e^{-x^2}dx\right)^2=\left(\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx\right)^2$$

(S-a folosit faptul că $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx$ este convergentă).

Am calculat astfel integrala lui Poisson şi anume $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$.

Exemplul 5.8.2. Să se studieze convergenţa integralei generalizate

$\iint_D \frac{dx\,dy}{\left(x^2+y^2\right)^{\alpha/2}}$, $\alpha>0$, unde $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ x^2+y^2<a^2\right\}$.

Observăm că funcţia $f(x,y)=\dfrac{1}{\left(x^2+y^2\right)^{\alpha/2}}$ nu este definită în $O(0,0)$ şi nu este mărginită pe D.

Fie $D_n=D\setminus B\left(0;\frac{1}{n}\right)=\left\{(x,y);\ \frac{1}{n^2}\leq x^2+y^2\leq a^2\right\}$. Este clar că $\{D_n\}$ este un şir de domenii mărginite, care are arie şi care îndeplineşte condiţiile (i)-(iii), iar f este continuă pe D_n, deci integrabilă pe D_n. În continuare avem:

$$\iint_{D_n} \frac{dx\,dy}{\left(x^2+y^2\right)^{\alpha/2}} = \int_0^{2\pi}\left(\int_{1/n}^{a} \frac{\rho}{\rho^{\alpha}}\mathrm{d}\rho\right) = \frac{2\pi}{2-\alpha}\cdot\left[a^{2-\alpha}-n^{\alpha-2}\right].$$

Observăm că dacă α < 2, atunci există $\lim\limits_{n\to\infty} \iint_{D_n} \frac{dx\,dy}{\left(x^2+y^2\right)^{\alpha/2}} = \frac{2\pi\cdot a^{2-\alpha}}{2-\alpha}$.

Aşadar, dacă $\alpha < 2$. integrala este convergentă şi $\iint_{D} \frac{dx\,dy}{\left(x^2+y^2\right)^{\alpha/2}} = \frac{2\pi}{2-\alpha}\cdot a^{2-\alpha}$.

Dacă $\alpha > 2$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \iint_{D_n} \frac{dx\,dy}{\left(x^2+y^2\right)^{\alpha/2}} = +\infty$.

Pentru $\alpha = 2$, avem $\iint_{D_n} \frac{dx\,dy}{x^2+y^2} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_{1/n}^{a} \frac{d\rho}{\rho} = 2\pi\left[\ln a - \ln\frac{1}{n}\right] \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$.

Rezultă că $\iint_{D} \frac{dx\,dy}{x^2+y^2}$ este divergentă.

Exemplul 5.8.3. Să se studieze convergența integralei $\iint_{D} \frac{dx\,dy}{\left(x^2+y^2\right)^{\alpha/2}}$, unde $D = \left\{(x,y);\, x^2+y^2 > a^2,\, a>0\right\}$. Evident, domeniul D este nemărginit.

Dacă notăm cu $D_n = \left\{(x,y);\, a^2 < x^2+y^2 < n^2\right\}$, rezultă că $\{D_n\}$ satisface condițiile (i)-(iii).

Pe de altă parte, procedând ca în exercițiul precedent deducem că
$\iint_{D_n} \frac{dx\,dy}{\left(x^2+y^2\right)^{\alpha/2}} = \frac{2\pi}{\alpha-2}\cdot\left[n^{2-\alpha}-a^{2-\alpha}\right]$, dacă $\alpha \neq 2$ şi $\iint_{D_n} \frac{dx\,dy}{x^2+y^2} = 2\pi\left[\ln n - \ln a\right]$.

Rezultă că integrala este convergentă dacă $\alpha > 2$ şi divergentă dacă $\alpha \le 2$.

Teorema 5.8.2. *Fie f, g: D → P₊, cu proprietatea* $0 \le f(x,y) \le g(x,y)$, $\forall\ (x,y)\in D$. *Dacă* $\iint_D g(x,y)\,dx\,dy$ *este convergentă, atunci şi* $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ *este convergentă.*

Afirmația rezultă imediat din Teorema 5.8.1 şi din inegalitatea
$a_n = \iint_{D_n} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D_n} g(x,y)\,dx\,dy = b_n$, $\forall\ n$.

Definiția 5.8.2 *Fie* $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, *integrabilă pe orice bilă închisă* B_r, *cu centrul în origine și de rază R. Dacă există* $\lim\limits_{n\to\infty} \iint\limits_{B_r} f(x,y)\,dx\,dy$ *și e finită, atunci, această limită se numește valoarea principală în sensul lui Cauchy a integralei generalizate* $\iint\limits_{D} f(x,y)\,dx\,dy$.

Se folosește notația:

$$V.p. \iint\limits_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dx\,dy = \lim_{r\to\infty} \iint\limits_{x^2+y^2\le r^2} f(x,y)\,dx\,dy.$$

Exemplul 5.8.4. $V.p. \iint\limits_{\mathbb{R}^2} x\cdot h\left(x^2+y^2\right)dx\,dy = 0$, oricare ar fi h o funcție continuă pe $\mathbb{R}^2$. Într-adevăr,

$$\lim_{r\to\infty} \iint\limits_{x^2+y^2\le r^2} x\cdot h\left(x^2+y^2\right)dx\,dy = \lim_{r\to\infty} \int_0^{2\pi} \cos\theta\,d\theta \int_0^r \rho^2 \ln\rho^2\,d\rho = 0.$$

5.9. INTEGRALE TRIPLE

După cum am văzut în acest capitol, trecerea de la integrala simplă la integrala dublă, pe lângă multe analogii, presupune și unele modificări de substanță, atât în planul conceptelor, cât și în cel al raționamentelor. Aceste modificări își au originea în principal, în teoria mulțimilor plane măsurabile (care au arie). În contrast cu această situație, trecerea de la integrala dublă la integrala triplă nu presupune nici un fel de complicație. Pentru început se impune introducerea noțiunii de volum. Din geometria elementară se știe că volumul unui paralelipiped dreptunghic este egal cu produsul lungimilor muchiilor sale. În particular, dacă T este un paralelipiped cu laturile paralele cu axele de coordonate, adică $T=[a_1,a_2]\times[b_1,b_2]\times[c_1,c_2]$, atunci

$$\mathrm{Vol}(T)=(a_2-a_1)(b_2-b_1)(c_2-c_1).$$

Definiția 5.9.1 *Prin mulțime elementară în spațiu înțelegem orice reuniune finită de paralelipipede dreptunghice cu muchiile paralele cu axele de coordonate, fără puncte interioare comune.*

Volumul unei astfel de mulțime este prin definiție suma volumelor paralelipipedelor care o compun. Mai precis, T este o mulțime elementară dacă există $T_i=[a_{i1},a_{i2}]\times[b_{i1},b_{i2}]\times[c_{i1},c_{i2}]$, $i=\overline{1,p}$ astfel încât $T=\bigcup\limits_{i=1}^{p} T_i$ și $\overset{\circ}{T_i}\cap\overset{\circ}{T_j}=\varnothing$ pentru $i\ne j$.

$$\mathrm{Vol}(T) \overset{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{p} \mathrm{Vol}(T_i) = \sum_{i=1}^{p} (a_{i2} - a_{i1})(b_{i2} - b_{i1})(c_{i2} - c_{i1}) .$$

În continuare notăm cu $\mathcal{T}$ familia tuturor mulțimilor elementare din spațiu.

Definiția 5.9.2 *Fie T un domeniu mărginit din* $\mathbb{R}^3$. *Se numește volumul interior al lui T următorul număr*:

$$V_* = \sup\{\mathrm{Vol}(T');\ T' \subset T,\ T' \in \mathcal{T}\}$$

(În cazul când nu există $T' \in \mathcal{T}$ astfel încât $T' \subset T$, vom defini $V_* = 0$).

În mod analog, definim volumul exterior astfel:

$$V^* = \inf\{\mathrm{Vol}(T'');\ T'' \supset T,\ T'' \in \mathcal{T}\}$$

Este evident că $V_* \le V^*$.

Spunem că domeniul *T* este măsurabil (are volum) dacă $V_* = V^* = V$. Dacă *T* are volum, atunci prin definiție $\mathrm{Vol}(T) = V = V_* = V^*$.

Observația 5.9.1 Orice mulțime elementară în spațiu are volum în sensul definiției 5.9.2 şi acesta coincide cu cel din Definiția 5.9.1.

Teorema 5.9.1. *Fie* $D \subset \mathbb{R}^2$ *un domeniu mărginit care are arie şi fie* $f : \overline{D} \to \mathbb{R}_+$ *o funcție continuă. Dacă notăm cu*

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; (x, y) \in \overline{D},\ 0 \le z \le f(x, y)\}$$

atunci T are volum şi $\mathrm{Vol}(T) = \iint_D f(x, y)\,dx\,dy$.

Demonstrație.

Din punct de vedere geometric domeniul *T* este un corp cilindric mărginit inferior de domeniul *D*, lateral de suprafața cilindrică, care are generatoarele paralele cu axa *Oz* şi curba directoare fr(*D*), iar superior de graficul funcției $z = f(x, y)$, $(x, y) \in \overline{D}$.

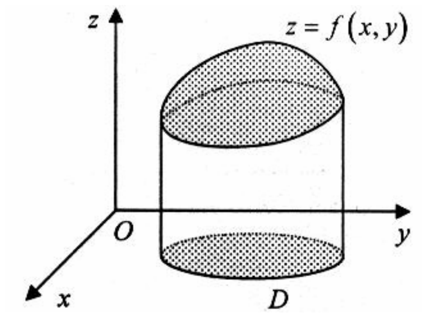


Fig. 1

Considerăm în planul xOy o rețea S_k de pas $h = 2^{-k}$, formată de dreptele $x = ph$, $y = lh$, $p, l \in \mathbb{Z}$. Fie I_k familia tuturor pătratelor (pline) Δ_h ale rețelei S_k incluse în D şi fie P_k reuniunea acestor pătrate. Conform Observației 5.2.3 avem

$$\text{aria}\, D = \sup_k \text{aria}\, P_k = \lim_{k\to\infty} \text{aria}\, P_k \qquad (1)$$

Fie m_h (respectiv M_h) marginea inferioară (respectiv superioară) a funcției f pe domeniul D_h şi fie $s_k = \sum_{D_h \in I_k} m_h \,\text{aria}\, D_h$. Ținând seama de (1) şi de faptul că f este integrabilă pe D rezultă că $\lim_{k\to\infty} s_k = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy$.

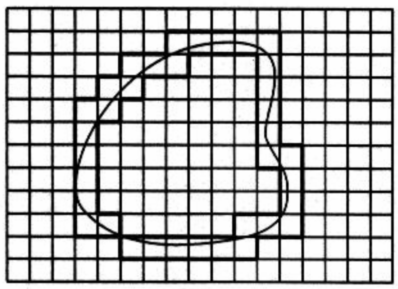


Fig. 2

Fie J_k familia tuturor pătratelor D_h care conțin cel puțin un punct din D şi fie Q_k reuniunea acestor pătrate. Evident $P_k \subset D \subset Q_k$. Mai mult, se poate arăta că

$$\text{aria}\, D = \inf_k \text{aria}\, Q_k = \lim_{k\to\infty} \text{aria}\, Q_k \qquad (2)$$

Dacă notăm cu $S_k = \sum_{D_h \in J_k} M_h \,\text{aria}\, D_h$, (cu precizarea că dacă $D_h \in J_k \setminus I_k$, atunci $M_h = \sup\{f(x,y); (x,y) \in D_h \cap D\}$, atunci $\lim_{k\to\infty} S_k = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy$.

Fie T_h' paralelipipedul dreptunghic cu muchiile paralele cu axele de coordonate de bază Δ_h şi înălțime m_k şi fie $T_k' = U\{T_h; \Delta_h \in I_k\}$. Este evident că T_k' este o mulțime elementară în spațiu, $T_k' \subset T$ şi $\text{Vol}(T_k') = s_k$.

Pe de altă parte, dacă notăm cu T_h'' paralelipipedul dreptunghic de bază Δ_h şi înălțime M_h şi cu $T_k'' = U\{T_h''; \Delta_h \in J_k\}$, atunci T_k'' este o mulțime elementară în spațiu, $T_k'' \supset T$ şi $\text{Vol}(T_k'') = S_k$. În continuare avem:

$$0 \le V^* - V_* \le \text{Vol}(T_k'') - \text{Vol}(T_k') = S_k - s_k.$$

Cum $\lim_{k\to\infty} S_k - s_k = 0$, rezultă că

$$V^* = V_* = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy.$$

Observația 5.9.2 Din Teorema 5.9.1 rezultă interpretarea geometrică a integralei duble. Dacă $f:\overline{D}\to\mathbb{R}_+$ este continuă, atunci $\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$ este volumul corpului cilindric mărginit inferior de *D*, lateral de suprafața cilindrică cu generatoarele paralele cu *Oz* şi curba directoare *C* =fr*D* şi superior de suprafața $z=f(x,y)$, $(x,y)\in\overline{D}$ (Vezi fig. 1).

Demonstrația următoarei teoreme este complet analoagă cu cazul domeniilor plane.

Teorema 5.9.2. *Un domeniu* $T\subset\mathbb{R}^3$ *are volum dacă şi numai dacă pentru* $\forall\ \varepsilon>0$ *există două mulțimi elementare în spațiu* P_ε *şi* Q_ε *astfel încât* $P_\varepsilon\subset T\subset Q_\varepsilon$ *şi* $\mathrm{Vol}(Q_\varepsilon)-\mathrm{Vol}(P_\varepsilon)<\varepsilon$.

Definiția 5.9.2 *O mulțime* $A\subset\mathbb{R}^3$ *este de volum zero dacă* $\forall\ \varepsilon>0$*, există o mulțime elementară în spațiu* P_ε *cu proprietățile:* $A\subset P_\varepsilon$ *şi* $\mathrm{Vol}(P_\varepsilon)<\varepsilon$.

Ținând seama de această definiție, Teorema 5.9.2 se poate reformula astfel:

Teorema 5.9.3. *Un domeniu mărginit* $T\subset\mathbb{R}^3$ *are volum dacă şi numai dacă frontiera sa este de arie zero.*

Fie acum $T\subset\mathbb{R}^3$ un domeniu mărginit şi fie $\rho:T_1,T_2,\ldots,T_n$ o familie de subdomenii cu proprietățile:

1) $T=\bigcup\limits_{i=1}^{n}T_i$

2) $\overset{\circ}{T_i}\cap\overset{\circ}{T_j}=\varnothing$ dacă $i\neq j$

3) T_i are volum, $\forall\ i=\overline{1,n}$.

O astfel de familie de subdomenii se numeşte partiție a lui *T*. Se numeşte norma partiției ρ cel mai mare diametru dintre diametrele domeniilor T_i, $i=\overline{1,n}$. Aşadar $\|\rho\|=\max\{\mathrm{diam}(T_i),\ 1\le i\le n\}$, unde

$$\mathrm{diam}(T_i)=\sup\{\mathrm{dist}(M',M'');\ M',M''\in T_i\}.$$

Definiția 5.9.3 *Fie* $T\subset\mathbb{R}^3$ *un domeniu mărginit care are volum, fie* $f:T\to\mathbb{R}$ *şi fie* $\rho:T_1,T_2,\ldots,T_n$ *o partiție oarecare a lui T. Notăm cu* P_i *un punct oarecare din subdomeniul* T_i *şi cu*

$$\sigma_\rho(f,P_i)=\sum_{i=1}^{n}f(P_i)\mathrm{Vol}(T_i).$$

Spunem că f este integrabilă pe domeniul T dacă există un număr finit I cu proprietatea că $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ \delta_\varepsilon > 0$ astfel încât oricare ar fi partiția ρ a lui T cu $\|\rho\| < \delta_\varepsilon$ şi oricare ar fi punctele $P_i \in T_i$ avem:

$$\left|\sigma_\rho(f, P_i) - I\right| < \varepsilon .$$

Numărul I se numeşte integrala triplă a funcției f pe domeniul T şi se foloseşte notația: $I = \iiint\limits_T f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$. De asemenea, vom scrie

$$\iiint\limits_T f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \lim_{\|\rho\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\mathrm{Vol}(T_i),$$

sensul exact fiind cel din Definiția 5.9.3.

Proprietățile integralei triple sunt complet analoage cu proprietățile integralei duble. În particular se poate arăta că orice funcție continuă este integrabilă.

Definiția 5.9.4 *Un domeniu* $T \subset \mathbb{R}^3$ *se numeşte simplu în raport cu axa Oz dacă există un domeniu* $D \subset \mathbb{R}^2$ *care are arie şi două funcții continue* $\varphi, \psi : \overline{D} \to \mathbb{R}$ *cu proprietatea* $\varphi(x,y) < \psi(x,y)$, $\forall\ (x,y) \in D$ *astfel încât*

$$T = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ \varphi(x,y) < z < \psi(x,y),\ \forall\ (x,y) \in D \right\}.$$

Din Teorema 5.9.1 rezultă că un astfel de domeniu are volum şi

$$\mathrm{Vol}(T) = \iint\limits_D \psi(x,y)\,dx\,dy - \iint\limits_D \varphi(x,y)\,dx\,dy .$$

Teorema 5.9.4. *Fie* $T \subset \mathbb{R}^3$ *un domeniu simplu în raport cu Oz şi fie* $f : T \to \mathbb{R}$ *o funcție continuă. Atunci*:

$$\iiint\limits_T f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_D \left(\int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right) dx\,dy .$$

Exemplul 5.9.1. Să se calculeze volumul tetraedrului T mărginit de planele: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ şi $x + 2y + z - 6 = 0$. Proiecția tetraedrului T în planul xOy este triunghiul (plin) $D = \left\{ (x,y);\ 0 \le x \le 6;\ 0 \le y \le 3 - \dfrac{x}{2} \right\}$ iar T este următorul domeniu simplu în raport cu Oz: $T = \left\{ (x,y,z);\ 0 \le z \le 6 - x - 2y, (x,y) \in D \right\}$.

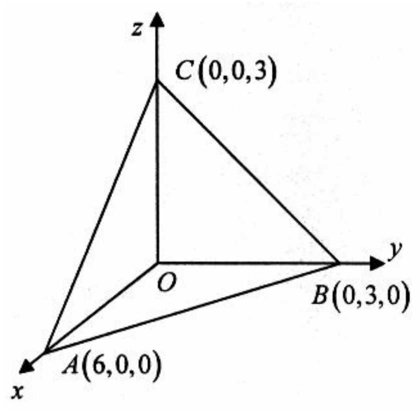


Fig. 3

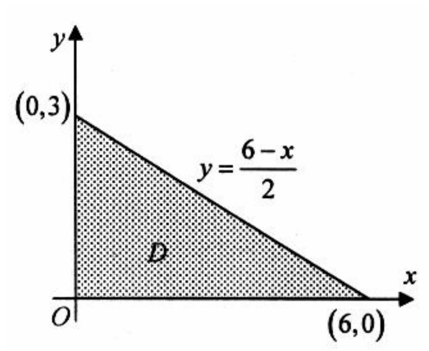


Fig. 4

Evident

$$\mathrm{Vol}(T)=\iiint\limits_T dx\,dy\,dz=\iint\limits_D\left(\int_0^{6-x-2y}dz\right)dx\,dy=\int_0^6\left(\int_0^{3-\frac{x}{2}}(6-x-2y)\,dy\right)dx=$$

$$=\int_0^6\left(\left(6y-xy-y^2\right)\Big|_0^{3-\frac{x}{2}}\right)dx=\int_0^6\left(9-3x+\frac{x^2}{4}\right)dx=9x-3\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{12}\Big|_0^6=18.$$

Exemplul 5.9.2. Să se calculeze $\iiint\limits_T\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$ unde T este domeniul mărginit de suprafețele $z=0$, $z=1$, $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

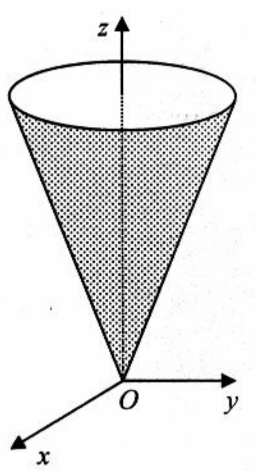


Fig. 5

Din punct de vedere geometric $z^2=x^2+y^2$ reprezintă un con cu vârful în origine. Observăm că dacă notăm cu D discul $x^2+y^2<1$, atunci

$$T=\left\{(x,y,z);\ \sqrt{x^2+y^2}<z<1,\ (x,y)\in D\right\}.$$

Avem

$$\iiint\limits_T\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz=\iint\limits_D\sqrt{x^2+y^2}\left(\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 dz\right)=$$

$$=\iint\limits_D\left(\sqrt{x^2+y^2}-\left(x^2+y^2\right)\right)dx\,dy=$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\left(\rho-\rho^2\right)\rho\,d\rho=\frac{\pi}{6}.$$

În continuare prezentăm teorema schimbării de variabile în integrala triplă.

Teorema 5.9.5. *Fie Ω şi T două domenii din $\mathbb{R}^3$ şi fie $F:\overline{\Omega}\to\overline{T}$ o funcţie vectorială surjectivă, definită prin $F(u,v,w)=\big(x(u,v,w),\ y(u,v,w),\ z(u,v,w)\big)$, $\forall\ (u,v,w)\in\overline{\Omega}$.*

Presupunem că $F\in C^1(\overline{\Omega})$, $F:\Omega\to T$ este bijectivă şi că iacobianul $\dfrac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}\neq 0$ pe Ω. Dacă $f:\overline{T}\to\mathbb{R}$ este o funcţie continuă, atunci

$$\iiint_T f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz =$$

$$=\iiint_\Omega f\big[x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w)\big]\left|\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}(u,v,w)\right|du\,dv\,dw\,.$$

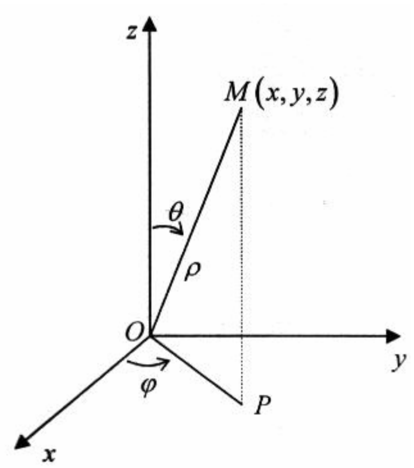


Fig. 6

Cea mai utilizată schimbare de variabile în spaţiu este trecerea la coordonate polare.

$$\begin{cases} x=\rho\sin\theta\cos\varphi & 0<\rho<\infty \\ y=\rho\sin\theta\sin\varphi & 0<\theta<\pi \\ z=\rho\cos\theta & 0<\varphi<2\pi \end{cases}$$

Semnificaţia notaţiilor este prezentată în figura 6.

Iacobianul transformării este

$$\frac{D(x,y,z)}{D(\rho,\theta,\varphi)}=$$

$$=\begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ \rho\cos\theta\cos\varphi & \rho\cos\theta\sin\varphi & -\rho\sin\theta \\ -\rho\sin\theta\sin\varphi & \rho\sin\theta\cos\varphi & 0 \end{vmatrix}=$$

$$=\rho^2\sin\theta\,.$$

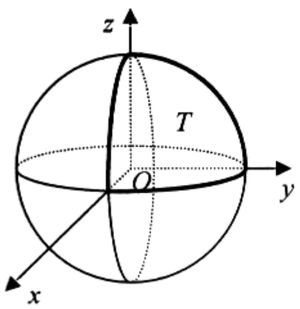
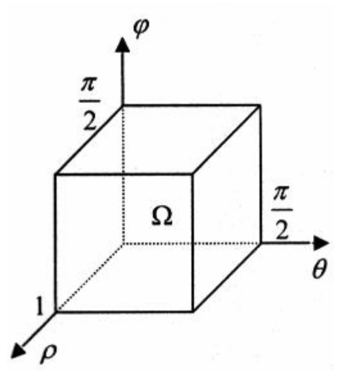


Fig. 7

Exemplul 5.9.3. Să se calculeze $\iiint_T xyz\,dx\,dy\,dz$, unde T este domeniul mărginit de suprafeţele $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ şi $x^2+y^2+z^2=1$. Din punct de vedere geometric, domeniul T este primul octant din sfera $x^2+y^2+z^2\le 1$. Trecem la coordonate polare şi notăm cu

$$\Omega=\left\{(\rho,\theta,\varphi);\ 0<\rho<1, 0<\theta<\frac{\pi}{2}, 0<\varphi<\frac{\pi}{2}\right\}.$$



Observăm că între domeniile Ω şi T există o corespondență bijectivă. Din Teorema 5.9.5 rezultă:

$$\iiint_T xyz\,dx\,dy\,dz =$$

$$=\iiint_\Omega \rho^3 \sin^2\theta\cos\theta\sin\varphi\cos\varphi\,\rho^2\sin\theta\,d\rho\,d\theta\,d\varphi =$$

$$=\int_0^{\pi/2}\sin^3\theta\cos\theta\,d\theta\int_0^{\pi/2}\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi\int_0^1\rho^5 d\rho =$$

$$=\frac{1}{48}.$$

În încheierea acestui paragraf prezentăm câteva aplicații ale integralei triple în mecanică.

Fie $T \subset \mathbb{R}^3$ un domeniu mărginit şi fie $\rho : \overline{T} \to \mathbb{R}_+$ o funcție continuă. Dacă considerăm un corp neomogen care are forma domeniului T, de densitate variabilă $\rho = \rho(x,y,z)$, atunci masa acestui corp este $M = \iiint\limits_T \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$.

Pentru un corp omogen, care are forma domeniului T, coordonatele centrului său de greutate G se calculează cu formulele:

$$x_G = \frac{\iiint\limits_T x\,dx\,dy\,dz}{\iiint\limits_T dx\,dy\,dz},\quad y_G = \frac{\iiint\limits_T y\,dx\,dy\,dz}{\iiint\limits_T dx\,dy\,dz},\quad z_G = \frac{\iiint\limits_T z\,dx\,dy\,dz}{\iiint\limits_T dx\,dy\,dz}.$$

Pentru un corp omogen de densitate $\rho = 1$, momentele de inerție în raport cu originea O, în raport cu axa Oz, respectiv în raport cu planul xOy se calculează cu formulele:

$$I_O = \iiint_T \left(x^2+y^2+z^2\right)dx\,dy\,dz$$

$$I_{Oz} = \iiint_T \left(x^2+y^2\right)dx\,dy\,dz$$

$$I_{xOy} = \iiint_T z^2\,dx\,dy\,dz\,.$$

CAPITOLUL 6

INTEGRALE DE SUPRAFAȚĂ

6.1. SUPRAFEȚE PARAMETRIZATE NETEDE

Definiția 6.1.1. *Fie $D \subset \mathbb{R}^2$ un domeniu (mulțime deschisă şi conexă). Se numeşte pânză parametrizată de clasă C^1, orice funcție vectorială $r : D \to \mathbb{R}^3$ de clasă C^1.*

Dacă notăm cu *x*, *y* şi *z* componentele scalare ale lui *r*, atunci $r(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$, $\forall \ (u,v) \in D$. Ecuațiile $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$, $z = z(u,v)$, $(u,v) \in D$ se numesc ecuațiile parametrice ale pânzei *r*, sau o reprezentare parametrică a pânzei, iar *u* şi *v* se numesc parametrii pânzei. Imaginea directă a domeniului *D* prin funcția vectorială *r*, adică mulțimea $S = \{ x(u,v), y(u,v), z(u,v);\ (u,v) \in D\}$ se numeşte suportul (sau urma) pânzei *r*.

În continuare vom folosi câteva notații specifice geometriei diferențiale. Pentru funcția $r : D \to \mathbb{R}^3$ folosim notația vectorială:

$\vec{r}(u,v) = x(u,v)\vec{i} + y(u,v)\vec{j} + z(u,v)k$, $(u,v) \in D$.

De asemenea, notăm cu $x_u = \dfrac{\partial x}{\partial u}$, $x_v = \dfrac{\partial x}{\partial v}$, $y_u = \dfrac{\partial y}{\partial u}$ etc., cu

$$A = A(u,v) = \frac{D(y,z)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}, \quad B = B(u,v) = \frac{D(z,x)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix},$$

$$C = C(u,v) = \frac{D(y,z)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}.$$

$$\vec{r}_u = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = x_u\vec{i} + y_u\vec{j} + z_u\vec{k}, \quad \vec{r}_v = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = x_v\vec{i} + y_v\vec{j} + z_v\vec{k}$$

$$E = \|\vec{r}_u\|^2 = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2, \qquad F = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_v = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v \quad \text{şi}$$

$$G = \|\vec{r}_v\|^2 = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2.$$

Observăm că:

$$\vec{r}_u \times \vec{r}_v = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k} \quad \text{şi} \quad \|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|^2 = A^2 + B^2 + C^2.$$

Dacă notăm cu φ unghiul dintre vectorii $\vec{r}_u$ şi $\vec{r}_v$, atunci

$$EG - F^2 = \|\vec{r}_u\|^2 \|\vec{r}_v\|^2 - (\vec{r}_u\, \vec{r}_v)^2 = \|\vec{r}_u\|^2 \|\vec{r}_v\|^2 (1 - \cos^2 \varphi) =$$

$$=\left(\|\vec{r}_u\|^2\|\vec{r}_v\|^2\sin^2\varphi\right)=\|\vec{r}_u\times\vec{r}_v\|^2=A^2+B^2+C^2.$$

Aşadar avem:

$$A^2+B^2+C^2=EG-F^2 \tag{1}$$

Definiția 6.1.2. *O pânză parametrizată de clasă C^1 se numeşte netedă dacă* $A^2+B^2+C^2>0,\ \forall\ (u,v)\in D$.

Pentru o pânză parametrizată netedă rezultă că $\vec{r}_u\times\vec{r}_v\neq 0,\ \forall\ (u,v)\in D$, deci $\vec{r}_u$ şi $\vec{r}_v$ sunt necoliniari. Fie $(u,v)\in D$ şi fie $M\left[x(u,v),y(u,v),z(u,v)\right]\in S$, punctul corespunzător de pe suportul pânzei *r*. Planul determinat de vectorii $\vec{r}_u$ şi $\vec{r}_v$ şi care trece prin *M* se numeşte planul tangent în *M* la *S* şi are ecuația:

$$A\big(X-x(u,v)\big)+B\big(Y-y(u,v)\big)+C\big(Z-z(u,v)\big)=0 \tag{2}$$

Normala în punctul *M* la *S* (adică perpendiculara pe planul tangent în punctul *M* al suportului *S* al pânzei) este paralelă cu vectorul $\vec{r}_u\times\vec{r}_v$. Rezultă că parametrii directori ai normalei în *M* la *S* sunt *A*, *B* şi *C*.

Definiția 6.1.3. *O pânză parametrizată $r:D\to\mathbb{R}^3$ se numeşte simplă, dacă funcția r este injectivă, adică dacă $r(u_1,v_1)\neq r(u_2,v_2)$, oricare ar fi punctele* $(u_1,v_1)\in D$, $(u_2,v_2)\in D$, $(u_1,v_1)\neq(u_2,v_2)$.

Exemplul 6.1.1 Fie pânza parametrizată de clasă C^1, definită prin: $r(u,v)=(R\sin u\cos v,\ R\sin u\sin v,\ R\cos u)$, $(u,v)\in D=\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\times\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. Ecuațiile parametrice sunt:

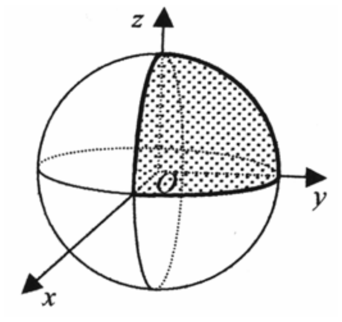


Fig. 1

$$\begin{cases} x=R\sin u\cos v\\ y=R\sin u\sin v\\ z=R\cos u \qquad (u,v)\in D=\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\times\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\end{cases}$$

Observăm că pentru orice $(u,v)\in D$, punctul $\big(x(u,v),y(u,v),z(u,v)\big)$ verifică ecuația $x^2+y^2+z^2=R^2$, $x>0$, $y>0$, $z>0$. Rezultă că suportul acestei pânze este porțiunea sferei cu centrul în origine şi de rază *R*, cuprinsă în primul octant. Mai departe avem:

$x_u=R\cos u\cos v$, $y_u=R\cos u\sin v$, $z_u=-R\sin u$

$$x_v = -R\sin u \sin v,\;\; y_v = R\sin u \cos v,\;\; z_v = 0$$
$$A = R^2 \sin^2 u \cos v\,,\quad B = R^2 \sin^2 u \sin v\,,\quad C = R^2 \sin u \cos u$$
$$E = R^2\,,\quad F = 0\,,\quad G = R^2 \sin^2 u$$
$$A^2 + B^2 + C^2 = EG - F^2 = R^4 \sin^2 u > 0\,,\quad \forall\ (u,v) \in D.$$

De asemenea, este evident că funcția r este injectivă pe D. Aşadar, pânza parametrizată din acest exemplu este o pânză parametrizată netedă şi simplă.

Un caz particular de pânză parametrizată, deosebit de important în aplicații, este cazul pânzei definită explicit. Mai precis, fie $D \subset \mathbb{R}^2$ un domeniu şi fie $f : D \to \mathbb{R}$ o funcție de clasă C^1. Notăm cu $p = \dfrac{\partial f}{\partial x}$ şi cu $q = \dfrac{\partial f}{\partial y}$. Cu ajutorul funcției f putem defini următoarea pânză parametrizată de clasă C^1:

$$r : D \to \mathbb{R}^3,\quad r(x,y) = (x, y, f(x,y)),\quad \forall\ (x,y) \in D.$$

Ecuațiile parametrice sunt:

$$\begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = f(x,y), \qquad (x,y) \in D. \end{cases}$$

Observăm că suportul acestei pânze este graficul funcției f (Fig. 2).

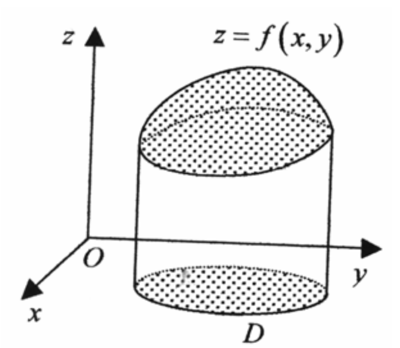


Fig. 2

Pe de altă parte, avem

$$A = \frac{D(y,z)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ p & q \end{vmatrix} = -p\,,$$

$$B = \frac{D(z,x)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} p & q \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -q \quad \text{şi}$$

$$C = \frac{D(x,y)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1\,.$$

Deoarece $A^2 + B^2 + C^2 = p^2 + q^2 + 1 > 0$, rezultă că pânza (3) este netedă. De aseme nea, este evident că este o pânză simplă.

Planul tangent într-un punct oarecare $M(x, y, f(x,y))$ are ecuația: $(X - x)(-p) + (Y - y)(-q) + Z - f(x,y) = 0$, iar parametrii directori ai normalei în M sunt $(-p, -q, 1)$.

Definiția 6.1.5. *Două pânze parametrizate de clasă* C^1, $r : D \to \mathbb{R}^3$ *şi* $r_1 : D_1 \to \mathbb{R}^3$ *se numesc echivalente cu aceeaşi orientare dacă există un difeomorfism* $\Phi : D \to D_1$ *cu proprietățile:* $\det J_\Phi(u,v) > 0$, $\forall\ (u,v) \in D$ şi $r = r_1 \circ \Phi$.

Reamintim că Φ este difeomorfism, dacă Φ este bijectivă, $\Phi \in C^1(D)$ şi $\Phi^{-1} \in C^1(D_1)$

Dacă $\det J_\Phi < 0$ pe *D*, spunem că cele două pânze sunt echivalente cu orientări opuse. Funcția Φ se mai numeşte şi schimbare de parametri. Vom nota cu $r \sim r_1$ faptul că pânzele *r* şi r_1 sunt echivalente. Din Definiția 6.1.4 rezultă:

Observația 6.1.1 Orice două pânze echivalente au acelaşi suport.

Exemplul 6.1.2. Fie pânza parametrizată definită astfel:
$r_1(u_1,v_1) = \left(u_1, v_1, \sqrt{R^2 - u_1^2 - v_1^2}\right)$,
$(u_1,v_1) \in D_1 = \left\{(u_1,v_1) \in \mathbb{R}^3;\, u_1^2 + v_1^2 < R^2, u_1 > 0, v_1 > 0\right\}$.
Observăm că pânzele din exemplele 6.1.1 şi 6.1.2 sunt echivalente cu aceeaşi orientare. Într-adevăr, fie $\Phi : D = \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \times \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \to D_1$, definită prin:

$\Phi(u,v) = (R\sin u \cos v,\, R\sin u \sin v)$, $(u,v) \in D$. Rezultă că $\Phi \in C^1(D)$ şi $J_\Phi(u,v) = \begin{vmatrix} R\cos u\cos v & -R\sin u \sin v \\ R\cos u \sin v & R\sin u \cos v \end{vmatrix} = R^2 \sin u \cos u > 0$, $\forall \quad (u,v) \in D$. Dacă presupunem că $\Phi(u',v') = \Phi(u'',v'')$, atunci rezultă că $\operatorname{tg} v = \operatorname{tg} v'$ şi mai departe că $v = v'$ şi $u = u'$. Aşadar, Φ este injectivă. Pentru a dovedi că Φ este şi surjectivă, fie $u_1 > 0$, $v_1 > 0$ cu proprietatea $u_1^2 + v_1^2 < R^2$. Deoarece $0 < \frac{\sqrt{u_1^2 + v_1^2}}{R} < 1$, rezultă că există $u \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ astfel încât $\frac{\sqrt{u_1^2 + v_1^2}}{R} = \sin u$, relație echivalentă cu $\left(\frac{u_1}{R\sin u}\right)^2 + \left(\frac{v_1}{R\sin u}\right)^2 = 1$. Atunci există $v \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ astfel încât $\frac{u_1}{R\sin u} = \cos v$ şi $\frac{v_1}{R\sin u} = \sin v$. În definitiv, am arătat că există $(u,v) \in D$ astfel încât $u_1 = R\sin u \cos v$, $v_1 = R \sin u \sin v$, deci $(u_1,v_1) = \Phi(u,v)$. De asemenea, este uşor de observat că

$$\Phi^{-1}(u_1,v_1) = \left(\arcsin\frac{\sqrt{u_1^2+v_1^2}}{r}, \operatorname{arctg}\frac{v_1}{u_1}\right),\ (u_1,v_1) \in D_1, \text{ deci } \Phi^{-1} \in C^1(D_1).$$

Pe de altă parte avem:

$$(r_1 \circ \Phi)(u,v) = r_1[\Phi(u,v)] = (R\sin u \cos v, R\sin u \sin v, R\cos u) = r(u,v),$$

$\forall\ (u,v)\in D$, deci $r \sim r_1$.

Observația 6.1.2 Orice pânză parametrizată echivalentă cu o pânză parametrizată simplă sau netedă este la rândul său simplă sau netedă.

Într-adevăr, fie $r \sim r_1$ unde $r(u,v)=\left(x(u,v),y(u,v),z(u,v)\right)$, $(u,v)\in D$, $r_1(u_1,v_1)=\left(x_1(u_1,v_1),y_1(u_1,v_1),z_1(u_1,v_1)\right)$, $(u_1,v_1)\in D_1$ şi fie $\Phi : D\to D_1$, $\Phi(u,v)=\left(\lambda(u,v),\mu(u,v)\right)$, $(u,v)\in D$, schimbarea de parametri.

Deoarece $r=r_1\circ\Phi$ şi Φ este bijectivă, rezultă că dacă r_1 este injectivă (deci simplă) atunci şi r este injectivă (simplă). Pe de altă parte:

$x(u,v)=x_1\left[\lambda(u,v),\mu(u,v)\right]$, $y(u,v)=y_1\left[\lambda(u,v),\mu(u,v)\right]$ şi

$z(u,v)=z_1\left[\lambda(u,v),\mu(u,v)\right]$.

Ținând seama de formulele de derivare a funcțiilor compuse de două variabile rezultă:

$$A=\frac{D(y,z)}{D(u,v)}=\frac{D(y_1,z_1)}{D(u,v)}\cdot\frac{D(\lambda,\mu)}{D(u,v)}=A_1\cdot\frac{D(\lambda,\mu)}{D(u,v)}$$

şi analog

$$B=B_1\cdot\frac{D(\lambda,\mu)}{D(u,v)} \text{ şi } C=C_1\cdot\frac{D(\lambda,\mu)}{D(u,v)}.$$

Aşadar, avem:

$A^2+B^2+C^2=\left(A_1^2+B_1^2+C_1^2\right)\left[\frac{D(\lambda,\mu)}{D(u,v)}\right]^2$. Cum $\left[\frac{D(\lambda,\mu)}{D(u,v)}\right]^2>0$, rezultă că dacă r (respectiv r_1) este netedă, atunci şi r_1 (respectiv r) este netedă.

Definiția 6.1.6 *Se numeşte suprafață parametrizată de clasă* C^1 *orice clasă de echivalență de pânze parametrizate de clasă* C^1.

Aşadar, $\hat{S}$ este o suprafață parametrizată de clasă C^1, dacă există o pânză parametrizată de clasă C^1, $r : D\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$, astfel încât:

$\hat{S}=\left\{r_1 : D\to\mathbb{R}^3\right.$, pânză netedă parametrizată; $\left.r\sim r_1\right\}$.

Cum $r\sim r_1$, rezultă că $r\in\hat{S}$. Suprafața $\hat{S}$ se numeşte simplă (respectiv netedă) dacă pânza r care o determină este simplă (netedă). Suportul suprafeței $\hat{S}$, este suportul S al pânzei r care o determină, acelaşi cu suportul oricărei alte pânze de clasă $\hat{S}$. De regulă, vom identifica suprafața $\hat{S}$ su suportul său S.

6.2. ARIA UNEI SUPRAFEȚE

Pentru început abordăm problema ariei unei suprafețe nedete explicită. Fie $D \subset \mathbb{R}^2$ un domeniu mărginit care are arie şi fie $f : \overline{D} \to \mathbb{R}$ o funcție de clasă C^1 pe $\overline{D}$. Dacă notăm cu $p = \dfrac{\partial f}{\partial x}$ şi $q = \dfrac{\partial f}{\partial y}$, rezultă că p şi q sunt continue pe $\overline{D}$. Fie S (respectiv $\overline{S}$) graficul funcției $f : D \to \mathbb{R}$ (respectiv $f : \overline{D} \to \mathbb{R}$). Aşadar,

$$S = \left\{ \left(x, y, f(x, y)\right);\ (x, y) \in D \right\} \text{ şi } \overline{S} = \left\{ \left(x, y, f(x, y)\right);\ (x, y) \in \overline{D} \right\}.$$

Mulțimea $\Gamma = \overline{S} \setminus S$ se numeşte bordura suprafeței S. Dacă S este frontiera domeniului D, atunci

$$\Gamma = \left\{ \left(x, y, f(x, y)\right);\ (x, y) \in C \right\}.$$

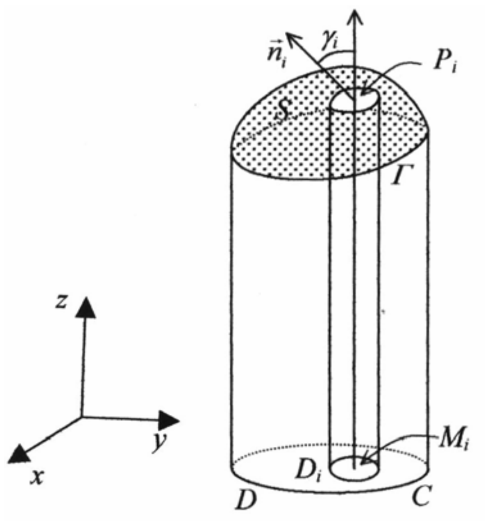


Fig. 1

Fie $\rho : D_1, D_2, \ldots, D_n$ o partiție a domeniului D şi fie $M_i(x_i, y_i)$ un punct oarecare din D_i. Notăm cu P_i punctul corespunzător de pe suprafața S. Evident P_i are coordonatele $\left(x_i, y_i, f(x_i, y_i)\right)$.

Fie π_i planul tangent la S în punctul P_i şi fie $\vec{n}_i$ versorul normalei la S în P_i, orientat în sus. Dacă notăm cu γ_i unghiul format de versorul $\vec{n}_i$ cu axa Oz, atunci $\cos\gamma_i = \dfrac{1}{\sqrt{1 + p_i^2 + q_i^2}}$, unde $p_i = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_i, y_i)$ şi $q_i = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_i, y_i)$.

Fie T_i porțiunea decupată din planul tangent π_i de cilindrul cu generatoarele paralele cu Oz şi curba directoare C_i – frontiera domeniului D_i. Deoarece γ_i este unghiul dintre planul π_i şi planul xOy rezultă că aria D_i = $\text{aria}(T_i)\cos\gamma_i$ sau

$$\text{aria}(T_i) = \sqrt{1 + p_i^2 + q_i^2} \cdot \text{aria}(D_i) \tag{1}$$

Prin definiție, aria S = aria $\overline{S}$ = $A = \lim\limits_{\|\rho\| \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} \text{aria}(T_i)$. Sensul exact fiind următorul: Există $A \in \mathbb{R}_+$ astfel încât $\forall\ \varepsilon > 0$, există $\delta_\varepsilon > 0$ astfel încât, $\forall\ \rho : D_1, \ldots, D_n$, partiție a lui D, cu $\|\rho\| < \delta_\varepsilon$ şi $(\forall)\, M_i(x_i, y_i) \in D_i$, avem:

$$\left| A - \sum_{i=1}^{n} \text{aria}(T_i) \right| < \varepsilon .$$

Ținând seama de (1) rezultă că $\sum_{i=1}^{n} \text{aria}(T_i) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1+p_i^2+q_i^2} \cdot \text{aria}\, D_i$. Observăm că suma din membrul drept este suma Riemann atașată funcției $g = \sqrt{1+p^2+q^2}$, partiției ρ şi punctelor intermediare $M_i(x_i, y_i) \in D_i$. Cum g este continuă pe D, deci integrabilă, rezultă că:

$$\text{aria } S = \lim_{\|\rho\| \to 0} \sigma_\rho(g; M_i) = \iint_D g(x,y)\,dx\,dy = \iint_D \sqrt{1+p^2+q^2}(x,y)\,dx\,dy .$$

Aşadar, o suprafață netedă explicită $S : z = f(x,y)$, $(x,y) \in D$, are arie şi

$$\text{aria}\, S = \iint_D \sqrt{1+p^2+q^2}(x,y)\,dx\,dy \tag{2}$$

Exemplul 6.2.1 Să se calculeze aria suprafeței

$$S : z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}, \quad (x,y) \in D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 < R^2 \right\}.$$

Rezultă:

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}},$$

$$1 + p^2 + q^2 = \frac{R^2}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}.$$

Conform (2) avem

$$\text{Aria } S = \iint_D \frac{R}{\sqrt{R^2 + p^2 + q^2}}\,dx\,dy = R \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{\rho}{\sqrt{R^2 - \rho^2}}\,d\rho =$$

$$= 2\pi R \cdot \sqrt{R^2 - \rho^2}\,\Big|_0^R = 2\pi R^2 .$$

Din punct de vedere geometric $\overline{S} = \left\{ \left(x, y, \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \right);\ x^2 + y^2 \le R^2 \right\}$ reprezintă emisfera superioară a sferei cu centrul în origini şi de rază R. Aria întregii sfere va fi $4\pi R^2$.

Definiția 6.2.1 *Fie S o suprafață parametrizată simplă şi netedă şi fie $r(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$, $\forall\ (u,v) \in D \subset \mathbb{R}^2$, o reprezentare parametrică a sa. Presupunem că D este un domeniu mărginit care are arie şi că $x, y, z \in C^1(\overline{D})$. Notăm cu* $S = \left\{ (x(u,v), y(u,v), z(u,v));\ (u,v) \in D \right\}$ *şi cu*

$$\overline{S} = \left\{ \left(x(u,v), y(u,v), z(u,v) \right);\ (u,v) \in \overline{D} \right\}.$$

Deoarece suprafața este simplă, rezultă că funcția $r : D \to S$ este bijectivă. Mulțimea $\Gamma = \overline{S} \setminus S$ se numeşte bordura suprafeței S. Dacă notăm cu C frontiera domeniului D, atunci

$$\Gamma = r(C) = \left\{ \left(x(u,v), y(u,v), z(u,v) \right);\ (u,v) \in C \right\}.$$

Corespondența dintre C şi Γ, în general nu este bijectivă . Suprafața S se numeşte închisă dacă $\overline{S} = S$. O suprafață parametrizată închisă nu are bordură.

Exemplul 6.2.2 Fie suprafața parametrizată

$$r(u,v) = \left(R\sin u \cos v,\ R\sin u \sin v,\ R\cos u \right),\ (u,v) \in D = (0,\pi) \times (0,2\pi).$$

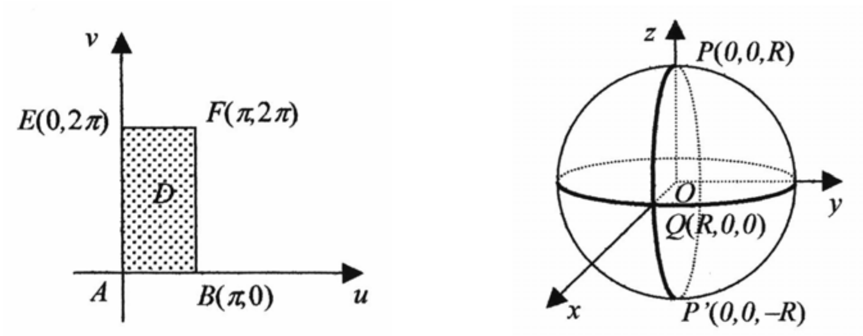


Fig. 2

Ecuațiile parametrice sunt: $\begin{cases} x = R\sin u \cos v \\ y = R\sin u \sin v & u \in (0,\pi) \\ z = R\cos u & v \in (0,2\pi). \end{cases}$

Observăm că $r(0,v) = (0,0,R)$, $\forall \quad v \in [0,2\pi]$. Aşadar, imaginea oricărui punct de pe segmentul $\overline{AE}$, prin funcția vectorială r, este punctul $P(0,0,R)$. În mod analog imaginea oricărui punct de pe segmentul $\overline{BF}$ este punctul $P'(0,0,-R)$.

Pe de altă parte, imaginea oricărui punct $M \in \overline{AB} \cup \overline{EF}$ va fi un punct de coordonate $x = R\sin u$, $y = 0$, $z = R\cos u$, $u \in [0,\pi]$.

Deoarece $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ şi $x \geq 0$ rezultă că imaginea frontierei domeniului D prin funcția vectorială r este meridianul $\overset{\frown}{PQP'}$ de pe sfera cu centrul în origine şi de rază R. Aşadar, $S = r(D)$ este sfera cu centrul în origine şi de rază R mai puțin meridianul $\overset{\frown}{PQP'}$.

$\overline{S} = r\left(\overline{D}\right)$ este sfera cu centrul în origine şi de rază *R*. Bordura suprafeţei *S* este $\Gamma = \overline{S} \setminus S = \overset{\frown}{PQP'}$.

Definiţia 6.2.2 *Fie* $D \subset \mathbb{R}^2$ *un domeniu mărginit care are arie şi fie* $r : \overline{D} \to \mathbb{R}^3$, $r(u,v) = \left(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\right), (u,v) \in \overline{D}$.

Presupun că $r \in C^1\left(\overline{D}\right)$ şi $r : D \to \mathbb{R}^3$ este injectivă. Fie $S = r(D)$ şi $\overline{S} = r\left(\overline{D}\right)$. Prin definiţie

$$\text{aria } S = \text{aria } \overline{S} = \iint\limits_D \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv = \iint\limits_D \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\, du\, dv \tag{3}$$

Observaţia 6.2.1 Fie *S* o suprafaţă netedă explicită: $z = f(x,y)$, $(x,y) \in D \subset \mathbb{R}^2$, $f \in C^1\left(\overline{D}\right)$. În acest caz $A = -p,\ B = -q,\ C = 1$ şi din Definiţia 6.2.2 rezultă că: aria $S = \iint\limits_D \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dx\, dy$.

Aşadar, în acest caz particular, regăsim formula (2) de calcul a ariei unei suprafeţe. Rezultă că Definiţia 6.2.2 este generalizarea, pentru suprafeţe parametrizate, a noţiunii de arie a unei suprafeţe explicite.

Observaţia 6.2.2 Aria unei suprafeţe parametrizate nu depinde de parametrizarea aleasă.

Într-adevăr, fie *S* o suprafaţă parametrizată simplă şi netedă şi fie $r : D \to \mathbb{R}^3$, $r(u,v) = \left(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\right), (u,v) \in D$, o reprezentare parametrizată a sa. Dacă $r_1 : D_1 \to \mathbb{R}^3$, $r_1(u_1,v_1) = \left(x_1(u_1,v_1), y_1(u_1,v_1), z_1(u_1,v_1)\right)$, $(u_1,v_1) \in D_1$ este o altă reprezentare parametrică echivalentă a lui *S*, atunci există un difeomorfism $\Phi : D \to D_1$, $\Phi(u,v) = \left(\lambda(u,v),,(u,v)\right)$, $\forall\ (u,v) \in D$ şi avem

$$A^2 + B^2 + C^2 = \left(A_1^2 + B_1^2 + C_1^2\right)\left(\frac{D(\lambda,\mu)}{D(u,v)}\right)^2 .$$

Dacă în formula (3) facem schimbarea de variabile $u_1 = \lambda(u,v)$, $v_1 = \mu(u,v)$ obţinem

$$\text{aria } S = \int\limits_{D_1} \sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\, du_1\, dv_1 = \int\limits_D \sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \left|\frac{D(\lambda,\mu)}{D(u,v)}\right|^{-1} \cdot \left|\frac{D(\lambda,\mu)}{D(u,v)}\right| du\, dv =$$

$$= \int\limits_D \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\, du\, dv .$$

Exemplul 6.2.3 Să se calculeze aria suprafeței parametrizate

$$S: x = R\sin u\cos v\,,\ y = R\sin u\sin v\,,\ z = R\cos u\,,\ (x,v)\in D = \left(0,\frac{\pi}{2}\right)\times\left(0,\frac{\pi}{2}\right).$$

Aşa cum s-a arătat în exemplul 6.1.1, în acest caz

$A^2 + B^2 + C^2 = EG - F^2 = R^4\sin^2 u$, deci

$$\text{Aria } S = \iint_D R^2\sin u\,du\,dv = R^2\int_0^{\pi/2} dv\int_0^{\pi/2}\sin u\,du = \frac{\pi R^2}{2}.$$

Din punct de vedere geometric suprafața S este porțiunea din primul octant a sferei, cu centrul în origine şi de rază R. Aria întregii sfere va fi egală cu $8\cdot\frac{\pi R^2}{2} = 4\pi R^2$.

Exemplul 6.2.4 Să se calculeze aria torului.

Considerăm în planul xOy un cerc de rază a cu centrul în punctul $(b,0)$ unde $0 < a < b$. Torul este suprafața T care se obține când rotim acest cerc, ca un corp rigid, în spațiu în jurul axei Oy. Dacă θ este unghiul din figura 2 şi φ este unghiul de rotire al cercului în jurul axei Oy, atunci ecuațiile parametrice ale torului sunt:

$$T: \begin{cases} x = (b + a\cos\theta)\cos\varphi \\ y = a\sin\theta \\ z = (b + a\cos\theta)\sin\varphi \end{cases} \qquad (\theta,\varphi)\in D = (0,2\pi)\times(0,2\pi).$$

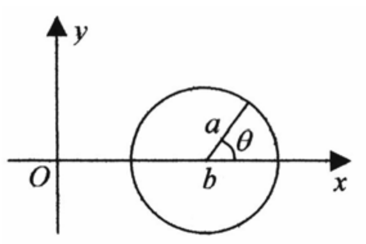


Fig. 2

Rezultă:

$x_\theta = -a\sin\theta\cos\varphi \qquad y_\theta = a\cos\theta$

$z_\theta = -a\sin\theta\sin\varphi$

$x_\varphi = -(b + a\cos\theta)\sin\varphi \qquad y_\varphi = 0$

$z_\varphi = (b + a\cos\theta)\cos\varphi$

$E = x_\theta^2 + y_\theta^2 + z_\theta^2 = a^2$;

$F = x_\theta x_\varphi + y_\theta y_\varphi + z_\theta z_\varphi = 0$;

$G = x_\varphi^2 + y_\varphi^2 + z_\varphi^2 = (b + a\cos\theta)^2$

$EG - F^2 = a^2(b + a\cos\theta)^2$.

$$\text{Aria } T = \iint_D a(b + a\cos\theta)\,d\theta\,d\varphi = a\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^{2\pi}(b + a\cos\theta)\,d\theta = 4\pi^2 ab.$$

Aşadar, aria torului este $4\pi^2 ab$. În cazul particular când $a = b$ reobținem aria sferei.

6.3. INTEGRALE DE SUPRAFAȚĂ DE PRIMA SPEȚĂ

Fie S o suprafață parametrizată simplă și netedă și fie $r(u,\ v) = \left(x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v)\right),\quad (u,v)\in D$ o reprezentare parametrică a sa. Presupunem că D este un domeniu mărginit care are arie și că $x, y, z \in C^1(\overline{D})$. Fie de asemenea, F o funcție reală definită pe $\overline{S} = r(\overline{D})$ și fie $\rho : D_1, D_2, \ldots, D_n$ o partiție a lui D. Notăm cu $\overline{S_i} = r(\overline{D_i})$ și cu $P_i(x_i, y_i, z_i)$ un punct oarecare din $\overline{S_i}$.

Definiția 6.3.1 *Se numește integrala de suprafață de prima speță a funcției F pe suprafața S și se notează cu* $\iint\limits_S F(x,y,z)\,\mathrm{d}\sigma$ *următoarea limită*

$\lim\limits_{\|\rho\|\to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} F(P_i)\,\mathrm{aria}\,S_i$, *dacă această limită există și e finită.*

(Sensul exact al existenței acestei limite fiind următorul: există $L \in$ P astfel încât $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ \delta_\varepsilon > 0$ cu proprietatea că oricare ar fi partiția ρ a lui D cu $\|\rho\| < \delta_\varepsilon$ și oricare ar fi punctele $P_i \in \overline{S_i}$ avem $\left| L - \sum\limits_{i=1}^{n} F(P_i)\,\mathrm{aria}\,S_i \right| < \varepsilon$.

Observația 6.3.1 Dacă S este o „suprafață materială” neomogenă, a cărei densitate variabilă este descrisă de funcția $F : \overline{S} \to \mathbb{R}_+$, atunci $\sum\limits_{i=1}^{n} F(P_i)\,\mathrm{aria}\,S_i$ aproximează masa suprafeței S, iar $\lim\limits_{\|\rho\|\to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} F(P_i)\,\mathrm{aria}\,S_i = \mathrm{masa}(S)$. Așadar, $\iint\limits_S F(x,y,z)\,\mathrm{d}\sigma$ reprezintă masa suprafeței materiale S a cărei densitate variabilă este dată de funcția $F : \overline{S} \to \mathbb{R}_+$.

Teorema 6.3.1 *Fie S o suprafață parametrizată simplă și netedă și fie* $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$, $z = z(u,v)$, $(u,v) \in D$ *o reprezentare parametrică a sa. Presupunem că D este un domeniu mărginit care are arie și că* $x, y, z \in C^1(\overline{D})$. *dacă* $F : \overline{S} \to \mathbb{R}$ *este continuă, atunci există integrala de suprafață de prima speță a funcției F pe suprafața S și*

$$\iint\limits_S F(x,y,z)\,\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_S F\left[x(u,v), y(u,v), z(u,v)\right]\sqrt{EG - F^2}\,(u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \qquad (1)$$

Demonstrație.

Fie $\rho : D_1, D_2, \ldots, D_n$ o partiție oarecare a domeniului D. O astfel de partiție determină o partiție a suprafeței S (mai exact a suprafeței lui S) şi anume: $S_1, S_2, \ldots, S_n$ unde $S_i = r(D_i)$. Fie $P_i(x_i, y_i, z_i)$ un punct oarecare din $\overline{S_i} = r(\overline{D_i})$ şi fie $\pi_n = \sum_{i=1}^{n} F(P_i)\,\text{aria}\,S_i$. Dacă ținem seama de modul de calcul al ariei unei suprafețe (Definiția 6.2.2), rezultă că $\pi_n = \sum_{i=1}^{n} F(x_i, y_i, z_i) \iint_{D_i} \sqrt{EG - F^2}(u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$.

Pe de altă parte, din teorema de medie a integralei duble, rezultă că există $(\alpha_i, \beta_i) \in \overline{D_i}$ astfel încât

$$\iint_{D_i} \sqrt{EG - F^2}(u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \sqrt{EG - F^2}(\alpha_i, \beta_i)\,\text{aria}(D_i).$$

Fie, de asemenea $(\xi_i, \eta_i) \in \overline{D_i}$ cu proprietatea că $x_i = x(\xi_i, \eta_i)$, $y_i = y(\xi_i, \eta_i)$ şi $z_i = z(\xi_i, \eta_i)$. Cu aceste precizări rezultă că:

$$\pi_n = \sum_{i=1}^{n} F\left[x(\xi_i, \eta_i), y(\xi_i, \eta_i), z(\xi_i, \eta_i)\right] \sqrt{EG - F^2}(\alpha_i, \beta_i)\,\text{aria}(D_i).$$

Dacă notăm cu $G(u,v) = F\left[x(u,v), y(u,v), z(u,v)\right] \sqrt{EG - F^2}(u,v)$, $\forall (u,v) \in \overline{D}$, atunci suma Riemann corespunzătoare partiției ρ, funcției G şi punctelor intermediare $(\xi_i, \eta_i) \in \overline{D_i}$ este

$$\sigma_\rho(G, \xi, \eta) = \sum_{i=1}^{n} F\left[x(\xi_i, \eta_i), y(\xi_i, \eta_i), z(\xi_i, \eta_i)\right] \sqrt{EG - F^2}(\xi_i, \eta_i)\,\text{aria}(D_i).$$

Deoarece G este continuă pe $\overline{D}$, deci integrabilă pe $\overline{D}$, rezultă că există

$$\lim_{\|\rho\| \to 0} \sigma_\rho(G; \xi, \eta) = \iint_D G(u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \tag{2}$$

Cum F este continuă pe $\overline{S} = r(\overline{D})$ şi $\overline{S}$ este o mulțime compactă (fiind imaginea mulțimii compacte $\overline{D}$ prin funcția continuă r), rezultă că F este mărginită pe $\overline{S}$. Fie $M > 0$ astfel încât $\left|F(x, y, z)\right| < M$, $\forall\ (x, y, z) \in \overline{S}$.

În continuare avem:

$$\left|\pi_n - \sigma_\rho(G; \xi, \eta)\right| \le M \sum_{i=1}^{n} \left|\sqrt{EG - F^2}(\alpha_i, \beta_i) - \sqrt{EG - F^2}(\xi_i, \eta_i)\right| \text{aria}(D_i).$$

Pe de altă parte, funcția $\sqrt{EG - F^2}$ fiind continuă pe mulțimea compactă $\overline{D}$, este uniform continuă, deci $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ \delta_\varepsilon > 0$ cu proprietatea că oricare ar fi

punctele (u',v') şi (u'',v'') din $\overline{D}$ astfel încât $|u'-v'|<\delta_\varepsilon$, $|u''-v''|<\delta_\varepsilon$, rezultă că

$$\left|\sqrt{EG-F^2}(u',v')-\sqrt{EG-F^2}(u'',v'')\right|<\frac{\varepsilon}{M\cdot\text{aria}(D)} \tag{3}$$

Dacă presupunem acum că $\|\rho\|<\delta_\varepsilon$, atunci $|\alpha_i-\xi_i|\le\text{diam}(D_i)<\delta_\varepsilon$, $|\beta_i-\eta_i|\le\text{diam}(D_i)<\delta_\varepsilon$, deci

$$|\pi_n-\sigma_\rho(G;\xi,\eta)|<M\frac{\varepsilon}{M\,\text{aria}(D)}\sum_{i=1}^{n}\text{aria}(D_i)=\varepsilon \tag{4}$$

Din (2) şi (4) rezultă că există

$$\lim_{\|\rho\|\to 0}\pi_n=\lim_{\|\rho\|\to 0}\sigma_\rho(G;\xi,\eta)=\iint_D F[x(u,v),y(u,v),z(u,v)]\sqrt{EG-F^2}(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

Exemplul 6.3.1 Să se calculeze $\iint_S(x+y+z)\mathrm{d}\sigma$ unde $S:x^2+y^2+z^2=a^2$, $z>0$. Suprafaţa S reprezintă emisfera superioară a sferei cu centrul în origine şi de rază a. O reprezentare parametrică a acestei suprafeţe este: $x=a\sin u\cos v$, $y=a\sin u\sin v$, $z=a\cos u$, $(u,v)\in D=\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\times(0,2\pi)$ (Vezi Exemplul 6.1.1). Ţinând seama că $EG-F^2=a^4\sin^2 u$, din Teorema 6.3.1 rezultă:

$$\iint_S(x+y+z)\mathrm{d}\sigma=\iint_D(a\sin u\cos v+a\sin u\sin v+a\cos u)a^2\sin u\mathrm{d}u\mathrm{d}v=$$

$$=a^3\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}u\int_0^{2\pi}\left(\sin^2 u\cos v+\sin^2 u\sin v+\sin u\cos u\right)\mathrm{d}v=$$

$$=a^3\left(\int_0^{\pi/2}\left(\sin^2 u\sin v\Big|_0^{2\pi}-\sin^2 u\cos v\Big|_0^{2\pi}+v\sin u\ \cos u\Big|_0^{2\pi}\right)\right)\mathrm{d}u=$$

$$=2\pi a^3\frac{\sin^2 u}{2}\Bigg|_0^{\pi/2}=\pi a^3.$$

Corolarul 6.3.1 *Fie $S:z=f(x,y)$, $(x,y)\in D$ o suprafaţă netedă explicită, unde D este un domeniu mărginit care are arie, iar $f\in C^1(\overline{D})$. Dacă $F:\overline{S}\to\mathbb{R}$ este continuă, atunci:*

$$\iint_S F(x,y,z)\mathrm{d}\sigma=\iint_D F[x,y,f(x,y)]\sqrt{1+p^2+q^2}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{5}$$

Afirmaţia rezultă din Teorema 6.3.1 şi din observaţia că o reprezentare parametrică a suprafeţei S este: $x=x$, $y=y$, $z=f(x,y)$, $(x,y)\in D$.

Exemplul 6.3.2 Să se calculeze $\iint\limits_S (xy+yz+zx)\,\mathrm{d}\sigma$, unde S este porțiunea din conul $z=\sqrt{x^2+y^2}$, decupată de cilindrul $x^2+y^2=2y$.

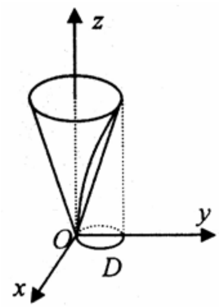


Fig. 1

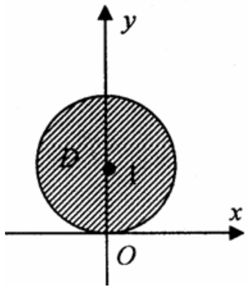


Fig. 2

Observăm că proiecția suprafeței S în planul xOy este domeniul $D: x^2+y^2-2y\le 0$. Aşadar, $S: z=\sqrt{x^2+y^2}$, $(x,y)\in D$.

În continuare avem $p=\dfrac{\partial z}{\partial x}=$ $=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $q=\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ şi $1+p^2+q^2=2$. Din corolarul 6.3.1 rezultă că: $I=\iint\limits_S (xy+yz+zx)\,\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_D \left[xy+(y+x)\sqrt{x^2+y^2}\right]\sqrt{2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

Trecând la coordonate polare: $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta$, $\theta\in[0,\pi]$, $0\le\rho\le 2\sin\theta$, obținem:

$$I=\sqrt{2}\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sin\theta}\left(\rho^2\sin\theta\cos\theta+\rho^2\sin\theta+\rho^2\cos\theta\right)\rho\,\mathrm{d}\rho=$$

$$=\sqrt{2}\int_0^{\pi}(\sin\theta\cos\theta+\sin\theta+\cos\theta)\left.\frac{\rho^4}{4}\right|_0^{2\sin\theta}\mathrm{d}\theta=$$

$$=4\sqrt{2}\int_0^{\pi}\left(\sin^5\theta\cos\theta+\sin^5\theta+\sin^4\theta\cos\theta\right)\mathrm{d}\theta=4\sqrt{2}\int_0^{\pi}\sin^5\theta\,\mathrm{d}\theta=$$

$$=4\sqrt{2}\int_0^{\pi}\left(1-\cos^2\theta\right)^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac{64\sqrt{2}}{15}.$$

Observația 6.3.2 Dacă suprafața S este netedă pe porțiuni, adică este o reuniune finită de suprafețe simple netede, $\overline{S}=\bigcup\limits_{i=1}^{\rho}\overline{S_i}$ cu proprietățile: S_i este simplă şi netedă $\forall\ i=\overline{1,\rho}$, două câte două nu au puncte interioare comune ($S_i\cap S_j=\varnothing$ dacă $i\ne j$) şi pentru orice i şi j $\Gamma_{ij}=\overline{S_i}\cap\overline{S_j}$ este o curbă netedă pe porțiuni (în cazul când este nevidă), atunci

$$\operatorname{aria}S=\sum_{i=1}^{\rho}\operatorname{aria}S_i \quad \text{şi} \quad \iint\limits_S F(x,y,z)\,\mathrm{d}\sigma=\sum_{i=1}^{\rho}\iint\limits_S F(x,y,z)\,\mathrm{d}\sigma.$$

6.4. INTEGRALE DE SUPRAFAȚĂ DE SPEȚA A DOUA

Pentru a defini integrala de suprafață de spețа a doua, trebuie mai întâi să definim orientarea unei suprafețe, problemă asemănătoare cu orientarea unei curbe.

Fie S o suprafață parametrizată netedă şi fie $r(u,v)=\left(x(u,v),y(u,v),z(u,v)\right)$, $(u,v)\in D$ o reprezentare parametrică a sa. În scriere vectorială,

$$\vec{r}(u,v)=x(u,v)\vec{i}+y(u,v)\overline{j}+z(u,v)\overline{k}\ ,\ (u,v)\in D.$$

Deoarece suprafața S este netedă, rezultă că $\overline{r_u}\times\overline{r_v}\neq\vec{0}$, pentru orice $(u,v)\in D$. În fiecare punct $M\in S$, de coordonate $M\left[x(u,v),y(u,v),z(u,v)\right]$ există doi versori normali la suprafața S (ortogonali pe planul tangent în punctul M la suprafața S) şi anume $\pm\vec{n}(M)$ unde $\vec{n}(M)=\dfrac{\overline{r_u}\times\overline{r_v}}{\left\|\overline{r_u}\times\overline{r_v}\right\|}$.

Definiția 6.4.1 *Suprafața S se numeşte orientabilă (sau cu două fețe) dacă aplicația* $M\to\vec{n}(M):S\to\mathbb{R}^3$ este continuă.

Este evident că dacă aplicația $M\to\vec{n}(M):S\to\mathbb{R}^3$ este continuă, atunci şi aplicația $M\to-\vec{n}(M):S\to\mathbb{R}^3$ este continuă. Dacă o suprafață este orientabilă, atunci orientarea sa (sau desemnarea unei fețe a acestei suprafețe) revine la alegerea uneia din cele două aplicații continue $M\to\pm\vec{n}(M)$. Aşadar, avem două orientări posibile ale suprafeței S (sau două fețe ale suprafeței S) şi anume: $S_+=\left(S,\vec{n}\right)$ care corespunde aplicației continue $M\to\vec{n}(M):S\to\mathbb{R}^3$ şi $S_-=\left(S,\vec{n}\right)$ care corespunde aplicației continue $M\to-\vec{n}(M):S\to\mathbb{R}^3$. Desigur, notația S_+ pentru fața $\left(S,\vec{n}\right)$ este arbitrară. Putem foarte bine să notăm cu $S_+=\left(S,-\vec{n}\right)$. Important este faptul că, odată ales un anumit sens al normalei pentru a desemna o față a suprafeței, cealaltă față va corespunde sensului opus al normalei. O suprafață neorientabilă se mai numeşte şi suprafață cu o singură față.

Observația 6.4.1 Proprietatea aplicației $M\to\vec{n}(M):S\to\mathbb{R}^3$ de a fi continuă, în cazul unei suprafețe orientabile, este o proprietate globală şi se referă la întreaga suprafață S. Aceasta presupune de pildă următoarea proprietate: fie $M_0\in S$ oarecare fixat şi fie C o curbă închisă pe suprafața S care trece prin M_0 şi care nu întâlneşte bordura suprafeței S. Să presupunem că am ales un sens pe normala în M_0 la S şi anume sensul versorului $\vec{n}\left(M_0\right)$. Deplasând versorul $\vec{n}(M)$ pe curba C, plecând din M_0, revenim în punctul M_0 cu aceeaşi orientare a normalei, adică

$$\lim_{\substack{M \to M_0 \\ M \in C}} \vec{n}(M) = \vec{n}(M_0).$$

Exemple.

1. Orice suprafață netedă explicită, $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$ are două fețe şi anume: fața superioară, care corespunde normalei orientată în sus (care face un unghi ascuțit cu direcția pozitivă a axei *Oz*) şi fața inferioară care corespunde normalei orientată în jos.

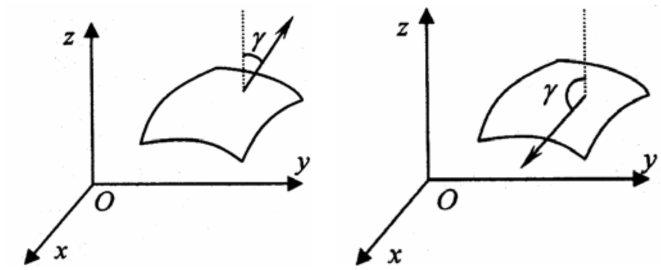


Fig. 1

2. Sfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ are două fețe şi anume: fața exterioară care corespunde normalei orientată spre exterior şi fața interioară care corespunde normalei orientată spre interior.

Într-adevăr, pentru orice punct $M(x, y, z)$ de pe sferă, versorul normalei exterioare în punctul *M* al sferei este: $\vec{n}(M) = \frac{1}{R}\overline{OM}$.

Este uşor de arătat că aplicația $M \to \vec{n}(M) : S \to \mathbb{R}^3$ este continuă pe $S = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$.

3. Fie *S* o suprafață parametrizată netedă şi fie $\vec{r}(u, v) = x(u, v)\vec{i} + y(u, v)\overline{j} + z(u, v)\overline{k}$, $(u, v) \in D$ o reprezentare parametrică a sa.

Presupunem în plus că *r* : *D* → *S* este homeomorfism, adică *r* este bijectivă şi bicontinuă (*r* şi r^{-1} sunt continue). Atunci *S* = *r*(*D*) este o suprafață orientabilă. Într-adevăr, aplicația $M \to \vec{n}(M) : S \to \mathbb{R}^3$, unde $\vec{n}(M) = \dfrac{\overline{r}_u \times \overline{r}_v}{\|\overline{r}_u \times \overline{r}_v\|}$ este continuă pe *S*, pentru că este compunerea funcțiilor continue $r^{-1} : S \to D$ şi $(u, v) \to \dfrac{\overline{r}_u \times \overline{r}_v}{\|\overline{r}_u \times \overline{r}_v\|} : D \to \mathbb{R}^3$.

4. Un exemplu clasic de suprafață cu o singură față (neorientabilă) este așa-numita banda lui Möbius. Un model al acestei suprafețe se obține dacă răsucim o bucată de hârtie dreptunghiulară *ABCD* astfel încât punctul *A* să coincidă cu *C*, iar punctul *B* cu *D*.

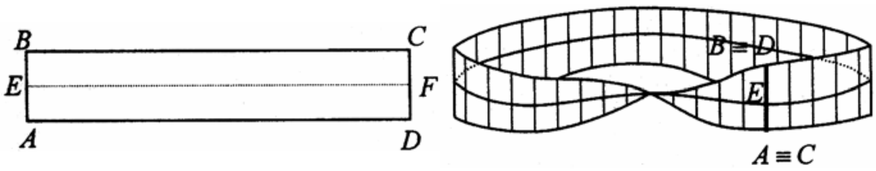


Fig. 2

Este ușor de observat că dacă deplasăm versorul normalei la suprafață plecând din *E*, pe curba închisă de pe suprafață corespunzătoare liniei mediane *EF*, când revenim în *E*, orientarea versorului normalei va fi opusă orientării inițiale a acestuia. Așadar, nu este asigurată continuitatea globală a aplicației $M \to \vec{n}(M) : S \to \mathbb{R}^3$, deci suprafața nu este orientabilă.

Definiția 6.4.2 *Fie S o suprafață parametrizată simplă, netedă, orientabilă și fie* $\vec{r}(u,v) = x(u,v)\vec{i} + y(u,v)\vec{j} + z(u,v)\vec{k}$, $(u,v) \in D$ *o reprezentare parametrică a sa. Presupunem că D este un domeniu mărginit care are arie și că* $x, y, z \in C^1(\overline{D})$. *Fie de asemenea* $\vec{v} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ *o funcție vectorială continuă definită prin* $\vec{v}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$, $\forall\ (x,y,z) \in \Omega$, *unde* $\Omega \in \mathbb{R}^3$ *este un domeniu ce conține suprafața S. Dacă notăm cu* $S_+ = (S, \vec{n})$ *unde* $\vec{n} = \dfrac{\overline{r}_u \times \overline{r}_v}{\left\| \overline{r}_u \times \overline{r}_v \right\|}$, *atunci integrala de suprafață de speța a doua a funcției* $\vec{v}$ *pe fața* S_+ *a suprafeței S, se definește astfel:*

$$\begin{aligned} &\iint_{S_+} P dy\,dz + Q dz\,dx + R dx\,dy = \iint_S \vec{v} \cdot \vec{n}\, \mathrm{d}\sigma = \\ &= \iint_S \left[P(x,y,z)\cos\alpha + Q(x,y,z)\cos\beta + R(x,y,z)\cos\gamma \right] \mathrm{d}\sigma \end{aligned} \tag{1}$$

unde α, β, γ sunt unghiurile pe care le face versorul $\vec{n}$ al normalei la suprafață cu direcțiile pozitive ale axelor de coordonate. Așadar: $\vec{n}(x,y,z) = \cos\alpha(x,y,z)\vec{i} +$ $+\cos\beta(x,y,z)\vec{j} + \cos\gamma(x,y,z)\vec{k}$, $\forall\ (x,y,z) \in S$. Dacă $S_- = (S, -\vec{n})$ este cealaltă față a suprafeței *S*, atunci:

$$\iint_{S_-} P dy\,dz + Q dz\,dx + R dx\,dy = \iint_S \vec{v} \cdot (-\vec{n})\, \mathrm{d}\sigma = -\iint_{S_+} P dy\,dz + Q dz\,dx + R dx\,dy\ .$$

Observația 6.4.2 Din punct de vedere fizic, integrala de suprafață de speța a doua reprezintă fluxul câmpului de vectori $\vec{v}$ prin fața S_+ (respectiv S_-) a suprafeței *S*. Mai precis, să presupunem că $\vec{v}$ reprezintă câmpul vitezelor particulelor unui fluid în curgere staționară, adică oricare ar fi $M \in \Omega$, $\vec{v}\,(M)$ coincide cu viteza particulei de fluid care trece prin *M*, viteză care depinde de punctul *M*, dar nu depinde de timp. Atunci $\iint\limits_{S_+} \vec{v}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}\sigma$ reprezintă volumul fluidului care trece în unitatea de timp prin suprafața *S* în direcția versorului $\vec{n}$, ce definește fața S_+ a suprafeței *S*. Dacă notăm cu $A=\dfrac{D(y,z)}{D(u,v)}$, $B=\dfrac{D(z,x)}{D(u,v)}$ și $C=\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)}$, atunci *A*, *B*, *C* sunt parametrii directori ai normalei la suprafață și $\cos\alpha=\dfrac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, $\cos\beta=\dfrac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, $\cos\gamma=\dfrac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$. Alegerea semnului "+" sau "–" în fața radientului se face în funcție de orientarea normalei la suprafață.

Ținând seama de modul de calcul al integralei de suprafață de prima speță rezultă:

$$\begin{aligned}&\iint\limits_{S_+} Pdy\,dz+Qdz\,dx+Rdx\,dy=\pm\iint\limits_{D}\Big\{P\big[x(u,v),y(u,v),z(u,v)\big]A(u,v)+\\&+Q\big[x(u,v),y(u,v),z(u,v)\big]B(u,v)+R\big[x(u,v),y(u,v),z(u,v)\big]C(u,v)\Big\}\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\end{aligned}\tag{2}$$

Exemplul 6.4.1 Să se calculeze $\iint\limits_{S_+} x\,dy\,dz+y\,dz\,dx+z\,dx\,dy$, unde S_+ este fața exterioară a sferei $x^2+y^2+z^2+R^2$. Ecuațiile parametrice ale sferei sunt:

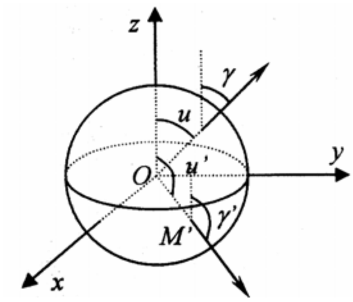
$$\begin{cases}x=R\sin u\cos v\\ y=R\sin u\sin v\\ z=R\cos u\end{cases}\qquad u\in[0,\pi],\ v\in[0,2\pi].$$

$A=R^2\sin^2 u\cos v$, $B=R^2\sin^2 u\sin v$, $C=R^2\sin^2 u\cos u$ și

$A^2+B^2+C^2=R^4\sin^2 u$

$$\cos\alpha=\pm\sin u\cos v,\ \cos\beta=\pm\sin u\sin v,\ \cos\gamma=\pm\cos u \tag{3}$$

Observăm că pentru normala orientată spre exterior trebuie să alegem semnul "+" în formulele (3). Într-adevăr, dacă $u\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ punctul corespunzător *M* de pe sferă se află pe emisfera superioară și normala exterioară va face un unghi ascuțit cu axa *Oz* ($\cos\gamma=\cos u>0$).



Dacă $u \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, punctul corespunzător M de pe sferă se află pe emisfera inferioară şi normala orientată spre exterior va face un unghi optuz cu axa Oz ($\cos\gamma = \cos u < 0$).

Din formula de calcul (2) rezultă:

$$\iint_{S_+} x dy\, dz + y dz\, dx + z dx\, dy =$$

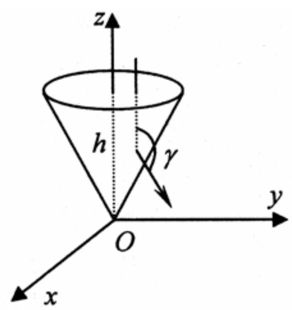
$$= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}v \int_0^{\pi} \left(R^3 \sin^3 u \cos^2 v + R^3 \sin^3 u \sin^2 v + R^3 \sin u \cos^2 u\right) \mathrm{d}u =$$

$$= R^3 \cdot 2\pi \int_0^{\pi} \sin u\, du = 4\pi R^3 .$$

În cazul unei suprafeţe netede explicită $z = f(x, y), (x, y) \in D$, avem $A = -p$, $B = -q$, $C = 1$, unde $p = \frac{\partial f}{\partial x}$ şi $q = \frac{\partial f}{\partial y}$.

$$\cos\alpha = \frac{-p}{\pm\sqrt{1+p^2+q^2}},\ \cos\beta = \frac{-q}{\pm\sqrt{1+p^2+q^2}},\ \cos\gamma = \frac{1}{\pm\sqrt{1+p^2+q^2}}.$$

Dacă S_+ este faţa superioară a suprafeţei, corespunzătoare normalei orientate în sus, atunci $\cos\gamma > 0$ şi vom alege semnul "+" în faţa radicalului. Pentru faţa inferioară S_-, $\cos\gamma < 0$ şi alegem semnul "–" în faţa radicalului.



Exemplul 6.4.2 Să se calculeze $\iint_{S_-} (y - z) dy\, dz + (z - x) dz\, dx + (x - y) dx\, dy$, unde S_- este faţa inferioară a conului $x^2 + y^2 = z^2 : 0 \le z \le h$. Aşadar avem: $S: z = \sqrt{x^2+y^2}$, $(x, y) \in D$, unde $D = \left\{(x, y) \middle| x^2 + y^2 \le h^2\right\}$, $p = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $q = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $1 + p^2 + q^2 = 2$. Deoarece $\cos\gamma < 0$, rezultă că $\cos\gamma = \frac{1}{-\sqrt{2}}$,

$$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2}} \text{ şi } \cos\beta = \frac{y}{\sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2}}.$$

$$\iint_{S_-} (y - z) dy\, dz + (z - x) dz\, dx + (x - y) dx\, dy =$$

$$=\iint_S\left[(y-z)\frac{x}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{x^2+y^2}}+(z-x)\frac{y}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{x^2+y^2}}+(x-y)\frac{1}{-\sqrt{2}}\right]\mathrm{d}\sigma=$$

$$=\iint_D\left[\left(y-\sqrt{x^2+y^2}\right)\frac{x}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{x^2+y^2}}+\left(\sqrt{x^2+y^2}-x\right)\frac{y}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{x-y}{\sqrt{2}}\right]\sqrt{2}\,dx\,dy=$$

$$=2\iint_D(y-x)\,dx\,dy=2\int_0^h(\sin\theta-\cos\theta)\mathrm{d}\theta=0\,.$$

6.5. FORMULE INTEGRALE

O primă formulă integrală a fost deja prezentată în Capitolul 5, §5.7 şi anume formula lui Green, care stabileşte legătura între integrala dublă pe un domeniu şi integrala curbilinie de speța a doua pe frontiera acestui domeniu. În cele ce urmează prezentăm alte două formule: formula Gauss-Ostrogradski, care stabileşte legătura între integrala triplă şi integrala de suprafață şi formula Stokes care stabileşte legătura între integrala curbilinie şi integrala de suprafață.

Teorema 6.5.1 (Gauss-Ostrogradski)

Fie $T\subset\mathbb{R}^3$ *un domeniu simplu în raport cu cele trei axe de coordonate şi fie P, Q, R trei funcții reale continue, împreună cu derivatele lor* $\frac{\partial P}{\partial x},\frac{\partial Q}{\partial y},\frac{\partial R}{\partial z}$ *pe* $\overline{T}$. *Presupunem de asemenea că* $S=\overline{T}\setminus T$ *(frontiera lui T) este o suprafață netedă pe porțiuni. Atunci:*

$$\iiint_T\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz=\iint_{S_e}P(x,y,z)dy\,dz+Q(x,y,z)dz\,dx+R(x,y,z)dx\,dy\,,$$

unde cu S_e am notat fața exterioară a suprafeței *S*.

Demonstrație. Deoarece domeniul $T\subset\mathbb{R}^3$ este simplu în raport cu axa *Oz*, rezultă că există un domeniu mărginit $D\subset\mathbb{R}^3$, care are arie şi două funcții reale, conține pe $\overline{D}$ proprietatea că $\varphi(x,y)<\psi(x,y)$, $\forall\ (x,y)\in D$ astfel încât

$$T=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\ \varphi(x,y)<z<\psi(x,y),\forall(x,y)\in D\right\}.$$

Notăm cu S_1 graficul funcției $z=\varphi(x,y)$, $(x,y)\in\overline{D}$, cu S_2 graficul funcției $z=\psi(x,y)$, $(x,y)\in\overline{D}$ şi cu S_3 suprafața cilindrică laterală, cu generatoarele paralele cu axa *Oz*. Observăm că suprafața $S=S_1\cup S_2\cup S_3$ este frontiera domeniului *T*. Ipoteza că *S* este netedă pe porțiuni înseamnă că $\varphi,\psi\in C^1\left(\overline{D}\right)$.

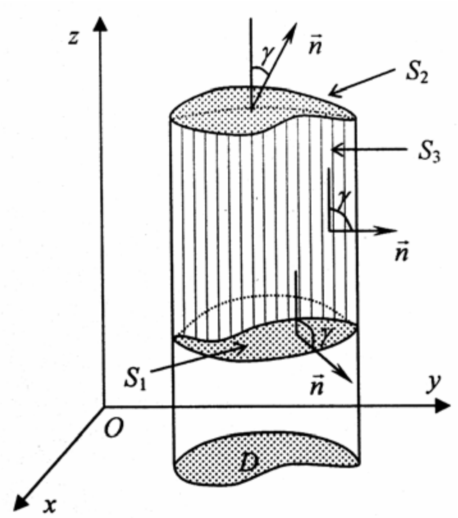


Fig. 1

Fața exterioară a suprafeței S înseamnă fața corespunzătoare normalei orientate spre exterior. Aceasta înseamnă pentru suprafața S_1, fața inferioară, iar pentru suprafața S_2, fața superioară. Așadar

$$S_e = (S_1)_- \cup (S_2)_+ \cup (S_3)_e .$$

Deoarece pentru fața inferioară a suprafeței S_1, unghiul γ format de normala orientată în jos, cu axa Oz, este optuz, rezultă că $\cos\gamma < 0$, deci

$$\cos\gamma = -\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2}} .$$

Mai departe avem:

$$\iint\limits_{(S_1)_-} R(x,y,z)\,dx\,dy = \iint\limits_{S_1} R(x,y,z)\cdot\frac{-1}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2}}\,d\sigma =$$

$$= \iint\limits_{D} R(x,y,\varphi(x,y))\cdot\frac{-1}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2}}\cdot\sqrt{1+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy =$$

$$= -\iint\limits_{D} R\left[x,y,\varphi(x,y)\right]dx\,dy \tag{1}$$

În mod analog, pentru fața superioară a suprafeței S_2, $\cos\gamma > 0$, deci

$$\iint\limits_{(S_2)_+} R(x,y,z)\,dx\,dy =$$

$$= \iint\limits_{D} R\left[x,y,\psi(x,y)\right]\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2}}\cdot\sqrt{1+\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy =$$

$$= \iint\limits_{D} R\left[x,y,\psi(x,y)\right]dx\,dy . \tag{2}$$

Pentru fața exterioară a suprafeței cilindrice laterale, $\cos\gamma = 0$, deoarece unghiul $\gamma = \frac{\pi}{2}$. Rezultă că:

$$\iint_{(S_3)_e} R(x,y,z)\,dx\,dy = \iint_{S_3} R(x,y,z)\cos\gamma\,\mathrm{d}\sigma = 0 \tag{3}$$

Aşadar avem:

$$\iint_{S_e} R(x,y,z)\,dx\,dy = \iint_{(S_1)_-} R(x,y,z)\,dx\,dy + \iint_{(S_2)_+} R(x,y,z)\,dx\,dy + \iint_{(S_3)_e} R(x,y,z)\,dx\,dy =$$

$$= \iint_D R\left[x,y,\psi(x,y)\right]dx\,dy - \iint_D R\left[x,y,\varphi(x,y)\right]dx\,dy \tag{4}$$

Pe de altă parte, din modul de calcul al integralei triple rezultă:

$$\iiint_T \frac{\partial R}{\partial z}\,dx\,dy\,dz = \iint_D \left(\int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z}\,dz\right)dx\,dy = \iint_D R(x,y,z)\Big|_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)}\,dx\,dy =$$

$$= \iint_D R\left[x,y,\psi(x,y)\right]dx\,dy - \iint_D R\left[x,y,\varphi(x,y)\right]dx\,dy \tag{5}$$

Din (4) şi (5) deducem:

$$\iiint_T \frac{\partial R}{\partial z}\,dx\,dy\,dz = \iint_{S_e} R(x,y,z)\,dx\,dy \tag{6}$$

În mod analog, folosind faptul că domeniul T este simplu şi în raport cu axele Oy şi Ox deducem:

$$\iiint_T \frac{\partial Q}{\partial y}\,dx\,dy\,dz = \iint_{S_e} Q(x,y,z)\,dz\,dx \tag{7}$$

$$\iiint_T \frac{\partial P}{\partial x}\,dx\,dy\,dz = \iint_{S_e} P(x,y,z)\,dx\,dy \tag{8}$$

În sfârşit, adunând relațiile (6), (7) şi (8) obținem formula Gauss-Ostrogradski:

$$\iiint_T \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz = \iint_{S_e} P(x,y,z)\,dy\,dz + Q(x,y,z)\,dz\,dx + R(x,y,z)\,dx\,dy \tag{9}$$

Observația 6.5.1 Printre exemplele de domenii simple în raport cu cele 3 axe de coordonate amintim: sfera, elipsoidul, paralelipipedul dreptunghic cu muchiile paralele cu axele etc. Fără a intra în detalii, menționăm că formula Gauss-Ostrogradski rămâne valabilă şi pentru domenii care sunt reuniuni finite de domenii simple în raport cu cele 3 axe de coordonate, două câte două, dintre acestea având în comun cel mult suprafețe netede pe porțiuni. Scriind formula Gauss-Ostrogradski pentru fiecare din domeniile simple T_i, care alcătuiesc domeniul T, adunând aceste formule şi folosind proprietatea de aditivitate a integralei triple şi a integralei de suprafață, se obține formula Gauss-Ostrogradski pentru domeniul T. Acest lucru se explică prin faptul că integrala de suprafață, pe o suprafață de intersecție a două domenii simple vecine, apare în suma din membrul

drept de două ori, o dată pe fața superioară şi o dată pe fața inferioară, deci contribuția ei în membrul drept este nulă. În felul acesta, în membrul drept rămâne numai integrala pe fața exterioară a domeniului T.

Observația 6.5.2 Ținând seama de legătura dintre integrala de suprafață de speța a doua şi de integrala de suprafață de speța întâi, formula Gauss-Ostrogradski se mai scrie:

$$\iiint_T \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx\, dy\, dz = \iint_S \left(P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma \right) \mathrm{d}\sigma \tag{10}$$

unde α, β, γ sunt unghiurile pe care le face normala exterioară la suprafața S cu Ox, Oy şi Oz.

Dacă notăm cu $\vec{V}$ câmpul vectorial de componente P, Q, R, atunci $\vec{V} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ şi $\operatorname{div}\vec{V} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$. Fie de asemenea,

$\vec{n} = \cos\alpha\,\vec{i} + \cos\beta\,\vec{j} + \cos\gamma\,\vec{k}$ versorul normalei exterioare la suprafața S. Cu aceste precizări, formula Gauss-Ostrogradski devine:

$$\iiint_T \operatorname{div}\vec{V}\, dx\, dy\, dz = \iint_S \vec{V} \cdot \vec{n}\, \mathrm{d}\sigma \tag{11}$$

Sub această formă, formula Gauss-Ostrogradski se mai numeşte şi formula flux-divergență.

Exemplul 6.5.1 Folosind formula Gauss-Ostrogradski să se calculeze $\iint_{S_e} x^2 dy\, dz + y^2 dz\, dx + z^2 dx\, dy$, unde S_e este fața exterioară a cubului

$T = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\, 0 \le x \le a, 0 \le y \le a, 0 \le z \le a \right\}$. Notând cu $P(x, y, z) = x^2$, $Q(x, y, z) = y^2$ şi $R(x, y, z) = z^2$, din formula Gauss-Ostrogradski deducem:

$$\iint_{S_e} x^2 dy\, dz + y^2 dz\, dx + z^2 dx\, dy = \iiint_T (2x + 2y + 2z)\, dx\, dy\, dz =$$

$$= 2\int_0^a dx \int_0^a dy \int_0^a (x + y + z)\, dz = 2\int_0^a dx \int_0^a \left(xz + yz + \frac{z^2}{2} \right)\Bigg|_0^a dy =$$

$$= 2\int_0^a dx \int_0^a \left(ax + ay + \frac{a^2}{2} \right) dy = 2\int_0^a \left(axy + a\frac{y^2}{2} + \frac{a^2}{2} y \right)\Bigg|_0^a dx =$$

$$= 2\int_0^a \left(a^2 x + \frac{a^3}{2} + \frac{a^3}{2} \right) dx = 2\left(a^2 \frac{x^2}{2} + a^3 x \right)\Bigg|_0^a = 3a^4 .$$

Teorema 6.5.2 (Stokes)

Fie S o suprafață netedă explicită: $z = f(x,y)$, $(x,y) \in \overline{D}$, *unde D este un domeniu mărginit a cărui frontieră* γ *este o curbă netedă. Presupunem că* $f \in C^2(\overline{D})$ *și P, Q, R sunt trei funcții de clasă* C^1 *pe un domeniu* $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ *care include suprafața* $\overline{S}$. *Dacă notăm cu* $\Gamma = \overline{S} \setminus S = \{(x,y,f(x,y)); (x,y) \in \gamma\}$ *bordura suprafeței S, atunci avem:*

$$\oint_{\Gamma} Pdx + Qdy + Rdz = \iint_{S_+} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy\,dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dz\,dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy .$$

(Între sensul de parcurgere al curbei Γ și fața suprafeței pe care se face integrala din membrul drept, există următoarea legătură de compatibilitate*) : dacă curba Γ este parcursă în sens trigonometric (respectiv sensul acelor unui ceasornic), atunci integrala din membrul drept se face pe fața superioară (respectiv inferioară) a suprafeței *S*).

Demonstrație. Fie $x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ t \in [a,b]$ o reprezentare parametrică a curbei γ. Atunci $x = \varphi(t),\ y = \psi(t)$, $z = f[\varphi(t),\psi(t)]$, $t \in [a,b]$ este o reprezentare parametrică a curbei Γ-bordura suprafeței *S*.

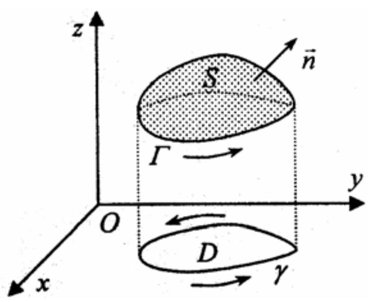


Fig. 2

Ținând seama de modul de calcul al integralei duble de speța a doua avem:

$$\oint_{\Gamma} P(x,y,z)dx =$$

$$= \int_0^a p[\varphi(t),\psi(t), f(\varphi(t),\psi(t))]\varphi'(t)\mathrm{d}t =$$

$$= \oint_{\gamma} P[x,y,f(x,y)]dx . \qquad (12)$$

În continuare, din formula lui Green rezultă:

$$\oint_{\gamma} P[x,y,f(x,y)]dx = -\iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}\right) dx\,dy \qquad (13)$$

Dacă notăm $p = \dfrac{\partial f}{\partial x}$ și cu $q = \dfrac{\partial f}{\partial y}$, mai departe avem:

*) În ipoteza că sistemul de coordonate este rectangular drept.

$$-\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dx\,dy = -\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \cdot \sqrt{1+p^2+q^2}\, dx\,dy =$$
$$= -\iint_S \frac{\partial P}{\partial y} \cos\gamma \,\mathrm{d}\sigma = -\iint_{S_+} \frac{\partial P}{\partial y} dx\,dy \tag{14}$$

şi

$$-\iint_D \frac{\partial P}{\partial z} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} dx\,dy = \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} \cdot \frac{-q}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \cdot \sqrt{1+p^2+q^2}\, dx\,dy =$$
$$= \iint_S \frac{\partial P}{\partial z} \cos\beta \,\mathrm{d}\sigma = \iint_{S_+} \frac{\partial P}{\partial z} dz\,dx \tag{15}$$

Din (12), (13) şi (15) deducem:

$$\oint_\Gamma P(x,y,z)dx = \iint_{S_+} \frac{\partial P}{\partial z} dz\,dx - \iint_{S_+} \frac{\partial P}{\partial y} dx\,dy \tag{16}$$

În mod analog se arată că:

$$\oint_\Gamma Q(x,y,z)dy = \iint_{S_+} \frac{\partial Q}{\partial x} dx\,dy - \iint_{S_+} \frac{\partial Q}{\partial z} dy\,dz \tag{17}$$

şi

$$\oint_\Gamma R(x,y,z)dz = \iint_{S_+} \frac{\partial R}{\partial y} dy\,dz - \iint_{S_+} \frac{\partial R}{\partial x} dz\,dx \tag{18}$$

Adunând relaţiile (16), (17) şi (18) obţinem formula lui Stokes din enunţul teoremei.

Observaţia 6.5.3 Formula lui Stokes rămâne valabilă şi pentru suprafeţe care sunt reuniuni finite de suprafeţe explicite de tipul celei din Teorema 6.4.2, două dintre acestea având în comun arce de curbă care sunt porţiuni din bordurile orientate ale acestor suprafeţe. Într-adevăr, scriind formula lui Stokes pentru fiecare din suprafeţele S_i şi adunând formulele obţinute, rezultă formula lui Stokes pentru suprafaţa $S = \bigcup_{i=1}^{p} S_i$.

Explicaţia constă în faptul că integrala curbilinie pe o curbă de intersecţie a două suprafeţe vecine intervine în suma din membrul stâng de două ori, cu orientări diferite, deci contribuţia sa în această sumă este nulă. În felul acesta în membrul stâng apare numai integrala curbilinie pe bordura

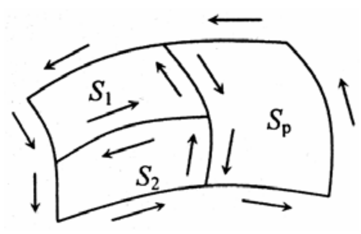


Fig. 3

suprafeței S. Pe de altă parte este evident că $\iint\limits_S = \sum\limits_{i=1}^{p} \iint\limits_{(S_i)}$.

Observația 6.5.4 Ținând seama de legătura între integrala de suprafață de speța a doua și integrala de suprafață de speța întâi, formula lui Stokes se mai scrie:

$$\oint\limits_{\Gamma} P\,dx + Q\,dy + R\,dz =$$

$$= \iint\limits_S \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos\gamma \right] \mathrm{d}\sigma .$$

Dacă notăm cu $\vec{V}$ câmpul vectorial de componente P, Q, R, atunci

$\vec{V} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ și $\operatorname{rot}\vec{V} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right)\vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)\vec{k}$.

Fie de asemenea $\vec{n} = \cos\alpha\,\vec{i} + \cos\beta\,\vec{j} + \cos\gamma\,\vec{k}$ versorul normalei la suprafața S orientată în sus și fie $d\,\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$.

Cu aceste precizări, formula lui Stokes devine:

$$\oint\limits_{\Gamma} \vec{V}\,d\,\vec{r} = \iint\limits_S \operatorname{rot}\vec{V} \cdot \vec{n}\,\mathrm{d}\sigma .$$

Integrala din membrul stâng reprezintă circulația câmpului $\vec{V}$ de-a lungul curgei Γ, iar integrala din membrul drept reprezintă fluxul câmpului $\operatorname{rot}\vec{V}$ prin suprafața S în sensul normalei orientate în sus.

Exemplul 6.5.2 Folosind formula lui Stokes să se calculeze

$\oint\limits_{\Delta ABC} (z-y)dx + (x-z)dy + (y-x)dz$, unde A, B, C sunt punctele de coordonate $A(a,0,0)$, $B(0,b,0), C(0,0,c)$, $a > 0, b > 0, c > 0$.

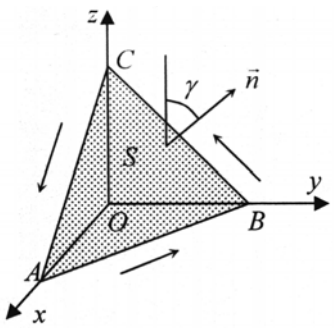


Fig. 4

Planul determinat de punctele A, B și C are ecuația $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

Observăm că triunghiul ABC este bordura suprafeței $S : z = c\left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)$, $(x,y) \in D$, unde D este triunghiul (plin) OAB.

Notând cu $P = z - y$, $Q = x - z$ și $R = y - x$, din formula lui Stokes rezultă:

$$\oint_{\Delta ABC} (z-y)dx+(x-z)dy+(y-x)dz=\iint_S 2(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)\mathrm{d}\sigma$$, unde α,β,γ sunt unghiurile pe care le face normala la suprafaţa *S*, orientată în sus, cu axele *Ox*, *Oy* şi *Oz*. Cum γ este ascuţit, rezultă $\cos\gamma > 0$. Pe de altă parte avem $p=\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{c}{a}$, $q=-\frac{c}{b}$ şi $1+p^2+q^2=\frac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{a^2b^2}$. Rezultă că:

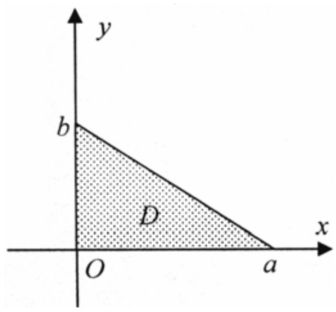


Fig. 5

$$\cos\gamma=\frac{ab}{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}},$$

$$\cos\alpha=\frac{bc}{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}},$$

$\cos\beta=\frac{ca}{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}$. Cu aceste precizări, rezultă:

$$\oint_{\Delta ABC} (z-y)dx+(x-z)dy+(y-x)dz=\frac{2}{ab}\iint_D (bc+ca+ab)dx\,dy=bc+ca+ab.$$

7. ECUAȚII ȘI SISTEME DE ECUAȚII DIFERENȚIALE

7.1 NOȚIUNI GENERALE. TEOREMA DE EXISTENȚĂ ȘI UNICITATE

Prin ecuația diferențială de ordinul întâi înțelegem o ecuație de forma:

$$F(x, y, y') = 0 \tag{1}$$

unde F este o funcție reală definită pe o mulțime deschisă $D \subset \mathbb{R}^3$, $y = y(x)$ este funcția necunoscută, iar $y' = \dfrac{dy}{dx}$ este derivata de ordinul întâi a acesteia.

Definiția 7.1.1 *O funcție* $\varphi : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *se numește soluție pentru ecuația diferențială* (1) *dacă este derivabilă pe* I *și* $F[x, \varphi(x), \varphi'(x)] = 0$, $\forall\ x \in I$ (Se subînțelege că se presupune că $(x, \varphi(x), \varphi'(x)) \in D$, $\forall\ x \in I$).

Graficul unei soluții a ecuației (1) se mai numește și curbă integrală a ecuației (1). Prin soluție generală înțelegem o familie de soluții $y = \varphi(x, C)$, unde C este o constantă arbitrară. Prin particularizarea constantei C obținem diferite soluții particulare ale soluției (1).

Exemplul 7.1.1 Fie ecuația

$$y' = \frac{y}{x},\ x \neq 0. \tag{2}$$

Observăm că $y = Cx$, $x \in (0,\infty)$ este soluția generală a ecuației pe intervalul $(0,\infty)$. De asemenea $y = Cx$, $x \in (-\infty,0)$ este soluția generală a ecuației pe intervalul $(-\infty,0)$. Curbele integrale sunt semidreptele care pornesc din originea axelor de coordonate (Fig. 1).

Exemplul 7.1.2

$$y' = -\frac{y}{x},\ y \neq 0. \tag{3}$$

Observăm că oricare ar fi constanta $C > 0$, funcțiile $y = \pm\sqrt{C^2 - x^2}$, $x \in (-C, C)$ sunt soluții pentru această ecuație pe intervalul $(-C, C)$.

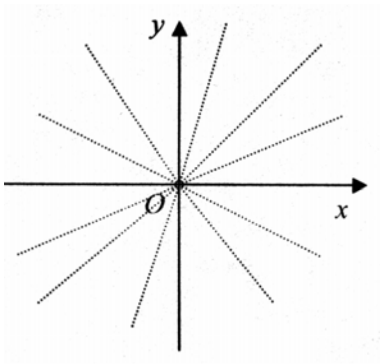


Fig. 1

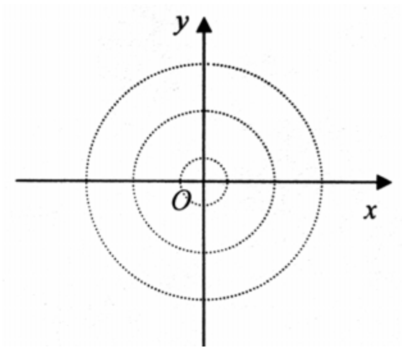


Fig. 2

Curbele integrale sunt semicercurile $x^2 + y^2 = C^2$, $y > 0$ (respectiv $y < 0$).

Observația 7.1.1 Există ecuații diferențiale care admit soluții ce nu se pot obține din soluția generală prin particularizarea constantei. O astfel de soluție se numește soluție singulară.

Exemplul 7.1.3 Fie ecuația

$$y = xy' + y'^2 \tag{4}$$

Soluția generală este $y = Cx + C^2$, $x \in$ P, aşa cum ne dăm seama printr-o verificare directă. Curbele integrale corespunzătoare soluției generale reprezintă o familie de drepte (fig. 3). Constatăm însă că ecuația admite şi soluția $y = -\frac{x^2}{4}$, $x \in$ P. Într-adevăr, înlocuind în ecuație obținem identitatea: $-\frac{x^2}{4} = x\left(-\frac{x}{2}\right) + \frac{x^2}{4}$, $x \in$ P. Pe de altă parte, este evident că această soluție nu se obține din soluția generală prin particularizarea constantei C. Aşadar, $y = -\frac{x^2}{4}$, $x \in$ P este o soluție singulară a ecuației (4). Curba sa integrală este o parabolă (înfăşurătoarea familiei de drepte $y = Cx + C^2$).

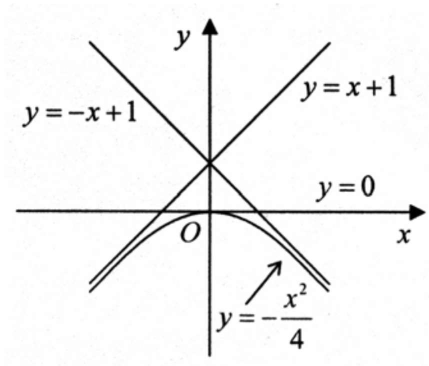


Fig. 3

Definiția 7.1.2 *O ecuație diferențială de forma*:

$$y' = f(x, y) \tag{5}$$

unde f este o funcție reală continuă definită pe o mulțime deschisă $D \subset \mathbb{R}^2$, *se numeşte ecuație diferențială de ordinul întâi sub formă normală.*

Problema Cauchy pentru ecuația (5) şi punctul $(x_0, y_0) \in D$, constă în determinarea unei soluții φ a ecuației (5) care verifică condiția inițială:

$$\varphi(x_0) = y_0 \tag{6}$$

Mai precis, problema constă în găsirea unei funcții $\varphi : I \to$ P, de clasă C^1 pe intervalul *I*, care îndeplineşte următoarele condiții:

$$(x, \varphi(x)) \in D,\ \forall\, x \in I,\ \varphi'(x) = f[x, \varphi(x)],\ \forall\, x \in I \text{ şi } \varphi(x_0) = y_0.$$

Lema 7.1.1 *Rezolvarea problemei Cauchy* (5) + (6) *este echivalentă cu rezolvarea ecuației integrale*:

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f[t, y(t)]\mathrm{d}t,\quad x \in I \tag{7}$$

Demonstrație. Într-adevăr, dacă $y = \varphi(x)$, $x \in I$ este soluție pentru problema Cauchy (5) + (6) atunci

$$\varphi'(t) = f[t, \varphi(t)],\ \forall\ t \in I \ \text{ şi }\ \varphi(x_0) = y_0.$$

Integrând prima identitate, obținem pentru orice $x \in I$:

$$\varphi(x) - \varphi(x_0) = \int_{x_0}^{x} \varphi'(t)\mathrm{d}t = \int_{x_0}^{x} f[t, \varphi(t)]\mathrm{d}t.$$

Cum $\varphi(x_0) = y_0$, rezultă că $\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f[t, \varphi(t)]\mathrm{d}t$, $\forall\ x \in I$, deci $y = \varphi(x)$, $x \in I$ este soluție pentru ecuația integrală (7).

Reciproc, dacă $y = \varphi(x)$, $x \in I$ este soluție pentru ecuația (7), atunci

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f[t, \varphi(t)]\mathrm{d}t,\ \forall\ x \in I.$$

Evident $\varphi(x_0) = y_0$. Pe de altă parte, prin derivare obținem: $\varphi'(x) = f[x, \varphi(x)]$, $\forall\ x \in I$, deci $y = \varphi(x)$, $x \in I$ este soluție pentru problema Cauchy (5) + (6).

Definiția 7.1.3 *O funcție* $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *este lipschitziană în raport cu y, pe domeniul D, dacă există o constantă* $L \geq 0$ *astfel încât* $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq$ $\leq L|y_1 - y_2|$, *oricare ar fi punctele* (x, y_1) *și* (x, y_2) *din D.*

Observația 7.1.2 Dacă *D* este deschisă şi convexă, $f \in C^1(D)$ şi $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ este mărginită pe *D*, atunci *f* este lipschitziană în raport cu *y* pe *D*.

Într-adevăr, fie $M > 0$ astfel încât $\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| < M$, $\forall\ (x,y) \in D$. Din teorema creşterilor finite a lui Lagrange deducem că oricare ar fi punctele (x,y_1) şi (x,y_2) din *D*, există un punct ξ între y_1 şi y_2 astfel încât

$f(x,y_1) - f(x,y_2) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,\xi)(y_1 - y_1)$. În continuare avem:

$\left|f(x,y_1) - f(x,y_2)\right| \le M\left|y_1 - y_2\right|$, deci *f* este lipschitziană pe *D*.

Teorema 7.1.1 (Teorema de existenţă şi unicitate)

Fie $f : \overline{D} = [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b] \to \mathbb{R}$ *o funcţie continuă şi lipschitziană în raport cu y, pe* $\overline{D}$. *Atunci există o soluţie unică* $y = \varphi(x)$, $x \in I \subset (x_0 - a, x_0 + a)$, *a problemei Cauchy* $y' = f(x,y)$, $(x,y) \in D$, $y(x_0) = y_0$.

Demonstraţie. Cum f este continuă pe mulţimea compactă $\overline{D}$, rezultă că f este mărginită pe $\overline{D}$. Fie $M > 0$ astfel încât $\left|f(x,y)\right| < M$, $\forall\ (x,y) \in \overline{D}$. Fie de asemenea, L constanta lui Lipschitz, $\alpha \in (0,1)$ un număr oarecare şi $h = \min\left\{a, \frac{b}{M}, \frac{\alpha}{L}\right\}$. Notăm cu *I* intervalul $[x_0 - h, x_0 + h]$ şi cu $F = \left\{g : I \to [y_0 - b, y_0 + b];\ g - \text{continuă}\right\}$. Observăm că *F* nu este un spaţiu vectorial, deoarece nu este închis la operaţia de adunare. Constatăm însă că *F* este un spaţiu metric, în raport cu distanţa

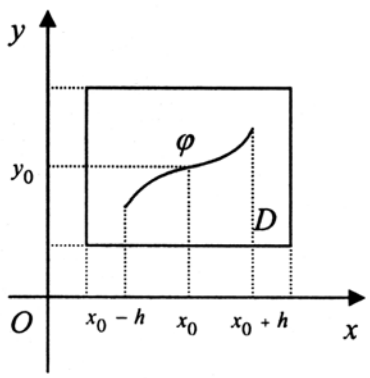


Fig. 4

$$d(g_1,g_2) = \sup\left\{\left|g_1(x) - g_2(x)\right|;\ x \in I\right\},\ \forall\ g_1,g_2 \in F \tag{8}$$

Mai mult, *F* este un spaţiu metric complet. Într-adevăr, dacă $\{g_n\}$ este un şir fundamental de funcţii din *F*, atunci $\{g_n\}$ este un şir fundamental în spaţiul Banach $C(I) = \{g : I \to \mathbb{R},\ g - \text{continuă}\}$, înzestrat cu norma $\|g\| = \sup\left\{\left|g(x)\right|,\ x \in I\right\}$.

Rezultă că $\{g_n\}$ este convergent în $C(I)$, deci există $g : I \to \mathbb{R}$, continuă, astfel încât $d(g_n,g) = \left\|g_n - g\right\| \to 0$. Este clar însă, că dacă $g_n \in F$ şi $g_n \to g$, atunci $g \in F$. Aşadar, (F, d) este un spaţiu metric complet.

Definim aplicaţia $T : F \to F$ astfel:

$$T(g)(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f[t, g(t)]\mathrm{d}t \,, \ \forall \ g \in F \,, \ \forall \ x \in I \tag{9}$$

Observăm că $T(g)$ este o funcţie continuă pe I şi că

$$|T(g)(x) - y_0| \le \left| \int_{x_0}^{x} |f(t, g(t))| \mathrm{d}t \right| \le M|x - x_0| \le Mh \le M \cdot \frac{b}{M} = b \,.$$

Rezultă că $T(g) \in F$, $\forall \ g \in F$.

Mai mult, vom arăta că T este o contracţie. Într-adevăr, ţinând seama că F este lipschitziană în raport cu a doua variabilă, rezultă:

$$|T(g_1)(x) - T(g_2)(x)| = \left| \int_{x_0}^{x} |f[t, g_1(t)] - f[t, g_2(t)]| \mathrm{d}t \right| \le$$

$$\le L\left| \int_{x_0}^{x} |g_1(t) - g_2(t)| \mathrm{d}t \right| \le L\mathrm{d}(g_1, g_2)|x - x_0| \le L\mathrm{d}(g_1, g_2)h \le \alpha \mathrm{d}(g_1, g_2),$$

$\forall \ x \in I$.

Trecând la marginea superioară obţinem:

$$\mathrm{d}(T(g_1), T(g_2)) = \sup\{|T(g_1)(x) - T(g_2)(x)|;\, x \in I\} \le \alpha \mathrm{d}(g_1, g_2).$$

Cum $\alpha \in (0,1)$, deducem că $T : F \to F$ este o contracţie.

Din teorema de punct fix a lui Banach (Teorema 3.1.8 din [10]) rezultă că există $\varphi \in F$ unică, astfel încât $T(\varphi) = \varphi$. Aşadar, avem:

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f[t, \varphi(t)]\mathrm{d}t \,, \ \forall \ x \in I \,.$$

Din Lema 7.1.1 deducem că φ este o soluţie unică pentru problema Cauchy $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ şi cu aceasta teorema este demonstrată.

Observaţia 7.1.3 Teorema 7.1.1 ne dă o primă metodă aproximativă de rezolvare a problemei Cauchy şi anume metoda aproximaţiilor succesive. Aşa cum ştim din teorema de punct fix a lui Banach, soluţia φ a problemei Cauchy este limita în raport cu distanţa, definită în (8), a şirului aproximaţiilor succesive $\{y_n\}$, unde:

$$\begin{aligned}
&y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_0)\mathrm{d}t, \qquad x \in I \\
&y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f[t, y_1(t)]\mathrm{d}t, \quad x \in I \\
&-------------------------- \\
&y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f[t, y_{n-1}(t)]\mathrm{d}t, \ x \in I \\
&--------------------------
\end{aligned}$$

Cum convergenţa în raport cu distanţa (8) este echivalentă cu convergenţa uniformă, rezultă că $y_n \xrightarrow[I]{u} \varphi$.

Exemplul 7.1.4 Să se rezolve problema Cauchy

$y' = y$, $(x,y) \in D = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \times \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$, $y(0) = 1$.

Se observă imediat că soluția acestei probleme Cauchy este

$\varphi(x) = e^x$, $x \in I \subset \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

Pe de altă parte, avem $f(x,y) = y$, $(x,y) \in D$, $x_0 = 0$, $y_0 = 1$, $a = b = \frac{1}{2}$, $M = \frac{3}{2}$ şi $L = 1$.

Dacă alegem $\alpha = \frac{1}{2}$ atunci $h = \min\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3}$, deci $I = \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$.

Şirul aproximaţiilor succesive arată astfel:

$$y_1(x) = 1 + \int_0^x 1\,\mathrm{d}t = 1 + x \qquad , x \in I$$

$$y_2(x) = 1 + \int_0^x (1+t)\,\mathrm{d}t = 1 + x + \frac{x^2}{2} \qquad , x \in I$$

$$y_3(x) = 1 + \int_0^x \left(1 + t + \frac{t^2}{2}\right)\mathrm{d}t = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} \qquad , x \in I$$

$$y_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} \qquad , x \in I$$

Cum $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ şi convergenţa este uniformă pe P, rezultă că $y_n \xrightarrow[I]{u} e^x$.

Observaţia 7.1.4 În exemplul 7.1.4 am putut afla limita şirului aproximaţiilor succesive. De regulă, acest lucru nu este posibil şi de aceea vom aproxima limita acestui şir cu funcţia determinată la pasul *n*. Cu alte cuvinte $\varphi \approx y_n$. Aşa cum ştim de la teorema de punct fix a lui Banach, eroarea satisface inegalitatea:

$$\left|\varphi(x) - y_n(x)\right| \le \frac{\alpha^n}{1-\alpha} \operatorname{dist}(y_0, y_1) , \ \forall \ x \in I .$$

Cum $\operatorname{dist}(y_0, y_1) = \sup\left\{\left|\int_{x_0}^x f(t, y_0)\,\mathrm{d}t\right|; x \in I\right\} \le M \cdot h$, rezultă că

$$\left|\varphi(x) - y_n(x)\right| \le \frac{\alpha^n}{1-\alpha} \cdot Mh , \ \forall \ x \in I .$$

7.2 ECUAȚII DIFERENȚIALE DE ORDINUL ÎNTÂI DE FORME PARTICULARE

7.2.1. Ecuații cu variabile separabile

O ecuație cu variabile separabile este o ecuație de forma:

$$f_1(x)g_1(y)y' + f_2(x)g_2(y) = 0 \tag{10}$$

unde $f_1, f_2 : I \to \mathbb{R}$ sunt funcții continue, $f_1 \neq 0$ pe I,
$g_1, g_2 : J \to \mathbb{R}$ sunt funcții continue, $g_2 \neq 0$ pe J.

Împărțind cu $f_1(x)g_2(y)$ ecuația devine:

$$\frac{g_1(y)}{g_2(y)}dy = -\frac{f_2(x)}{f_1(x)}dx \tag{11}$$

Integrând, obținem:

$$\int \frac{g_1(y)}{g_2(y)}dy = -\int \frac{f_2(x)}{f_1(x)}dx .$$

Exemplu $\left(1+x^2\right)yy' + x\left(1+y^2\right) = 0$.

Ecuația se pune sub forma evhivalentă $\frac{y}{1+y^2}dy = -\frac{x}{1+x^2}dx$.

Integrând obținem: $\int \frac{y}{1+y^2}dy = -\int \frac{x}{1+x^2}dx$,

deci $\frac{1}{2}\ln\left(1+y^2\right) = -\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + \frac{1}{2}\ln C$,

sau $1+y^2 = \frac{C}{1+x^2}$, $C > 0$.

Dacă ne interesează soluția care îndeplineşte condiția inițială $y(1) = 2$, obținem $C = 10$ şi mai departe $y = \pm\sqrt{\frac{9-x^2}{1+x^2}}$. Evident, soluția căutată este $y = \sqrt{\frac{9-x^2}{1+x^2}}$, $x \in (-3,3)$.

7.2.2. Ecuații omogene

Sunt ecuații de forma

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \tag{12}$$

unde f este o funcție continuă pe un interval I.

Dacă notăm cu $u = \dfrac{y}{x}$ şi considerăm $u = u(x)$ noua funcție necunoscută, rezultă $y(x) = xu(x)$ şi $y' = u + x \cdot u'$. În urma acestei schimbări de funcție necunoscută, ecuația (12) devine o ecuație cu variabile separabile, anume: $u + x \cdot u' = f(u)$.

Cazul $f(u) = u$ a fost prezentat în Exemplul 7.1.1. Putem deci presupune că $f(u) \neq u$. Separând variabilele obținem:

$\dfrac{du}{f(u) - u} = \dfrac{dx}{x}$ şi mai departe $\displaystyle\int \frac{du}{f(u) - u} = \ln x + \ln C$.

Exemplu $y' = \dfrac{y}{x} + \left(\dfrac{y}{x}\right)^2$, $x \neq 0$.

Notând cu $u = \dfrac{y}{x}$ obținem $u + xu' = u + u^2$, deci $\dfrac{du}{u^2} = \dfrac{dx}{x}$. Integrând rezultă $-\dfrac{1}{u} = \ln|x| + \ln C$ şi mai departe $-\dfrac{x}{y} = \ln C|x|$. Din această relație se obțin soluțiile corespunzătoare diferitelor condiții inițiale. De exemplu, soluția care îndeplineşte condiția inițială $y(2) = 1$ este $y = \dfrac{x}{2 + \ln 2 - \ln x}$, $x \in \left(0, 2e^2\right)$.

7.2.3. Ecuații liniare

Ecuațiile liniare neomogene sunt ecuații de forma:

$$y' + P(x)y = Q(x) \tag{13}$$

unde P şi Q sunt funcții continue pe un interval I.

Ecuația liniară omogenă asociată este

$$y' + P(x)y = 0 \tag{14}$$

Observăm că ecuația omogenă (14) este o ecuație cu variabile separabile. Separând variabilele şi integrând obținem:

$\dfrac{dy}{y} = -P(x)dx$, $y \neq 0$

$\ln y = -\int P(x)dx + \ln C$ şi mai departe

$$y = Ce^{-\int P(x)dx}, \ C \in \text{P}. \tag{15}$$

Deşi soluția (15) s-a obținut în ipoteza $y \neq 0$, care presupune $C \neq 0$, observăm că ecuația (14) admite şi soluția $y = 0$ care s-a pierdut la împărțirea cu y. Aşadar (15) reprezintă soluția generală a ecuației omogene (14).

Pentru a obține soluția generală a ecuației neomogene (13) folosim metoda variației constantei a lui Lagrange şi anume: căutăm soluția ecuației neomogene (13) de forma

$$y=\varphi(x)e^{-\int P(x)dx} \tag{16}$$

unde φ este o funcție de clasă C^1 pe intervalul I. Pentru determinarea funcției φ punem condiția ca (16) să fie soluție pentru ecuația (13) și obținem:

$$\varphi'(x)e^{-\int P(x)dx}-\varphi(x)P(x)e^{-\int P(x)dx}+P(x)\varphi(x)e^{-\int P(x)dx}=Q(x).$$

Efectuând calculele rezultă

$\varphi'(x)=Q(x)e^{\int P(x)dx}$, și mai departe $\varphi(x)=\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C$.

Înlocuind în (16) obținem soluția generală a ecuației neomogene (13) și anume:

$$y=e^{-\int P(x)dx}\left(C+\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx\right) \tag{17}$$

Exemplu $y'+y\sin x=-\sin x\cos x$

Avem $P(x)=\sin x$ și $Q(x)=-\sin x\cos x$.

Înlocuind în (17) obținem:

$$y=e^{\cos x}\left(C-\int \sin x\cos x\, e^{-\cos x}dx\right)=e^{\cos x}\left(C-e^{-\cos x}\cos x-e^{-\cos x}\right),$$

deci $y=Ce^{\cos x}-\cos x-1$.

7.2.4. Ecuații Bernoulli

Sunt ecuații de forma:

$$y'+P(x)y=Q(x)y^{\alpha},\quad \alpha\neq 0,\ \alpha\neq 1 \tag{18}$$

Presupunem că P și Q sunt funcții continue pe un interval I. Împărțind cu y^{α} pentru $y\neq 0$ obținem: $y^{\alpha}y'+P(x)y^{1-\alpha}=Q(x)$.

Dacă facem schimbarea de funcție $y^{1-\alpha}=z$, unde $z=z(x)$ este noua funcție necunoscută, rezultă $(1-\alpha)y^{1-\alpha}\cdot y'=z'$ și mai departe

$$\frac{z'}{1-\alpha}+P(x)z=Q(x) \tag{19}$$

Observăm că am obținut o ecuație liniară.

Exemplu $y'-\dfrac{y}{3x}=\dfrac{1}{3}y^4\ln x,\ x\in(0,\infty)$.

Împărțind cu y^4 pentru $y\neq 0$ rezultă $y^{-4}\cdot y'-\dfrac{1}{3x}y^{-3}=\dfrac{1}{3}\ln x$.

Dacă notăm cu $z=y^{-3}$, atunci $z'=-3y^{-4}y'$ și ecuația devine:

$z'+\dfrac{1}{x}z=-\ln x$. Aceasta este o ecuație liniară cu $P(x)=\dfrac{1}{x}$ și $Q(x)=-\ln x$.

Folosind formula (17) obținem:

$$z = e^{-\ln x}\left(C - \int \ln x\, e^{\ln x} dx\right) = \frac{1}{x}\left(C - \int x \ln x\, dx\right)$$

şi mai departe $z = \frac{C}{x} + \frac{x}{4} - \frac{x}{2}\ln x$. Aşadar avem: $y^{-3} = \frac{C}{x} + \frac{x}{4} - \frac{x}{2}\ln x$, $x > 0, y \neq 0$.

Diferite soluții particulare se obțin precizând condițiile inițiale.

7.2.5. Ecuații Riccati

Sunt ecuații de forma

$$y' = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x) \tag{20}$$

unde P, Q şi R sunt funcții continue pe un interval I. Dacă se cunoaşte o soluție particulară a ecuației (20), anume $y_p : J \subset I \to \mathbb{R}$, atunci efectuând schimbarea de funcție $y = y_p + \frac{1}{z}$, ecuația se reduce la o ecuație liniară. Într-adevăr, derivând şi înlocuind în ecuația (20) obținem:

$$y_p' - \frac{z'}{z^2} = P(x)\left(y_p^2 + 2\frac{y_p}{z} + \frac{1}{z^2}\right) + Q(x)\left(y_p + \frac{1}{z}\right) + R(x).$$

Ținând seama că y_p verifică ecuația (20), deci că

$y_p' = P(x)y_p^2 + Q(x)y_p + R(x)$, rezultă

$$z' + \left[2y_p P(x) + Q(x)\right]z = -P(x). \tag{21}$$

Observăm că ecuația (21) este o ecuație liniară.

Exemplu $y' = -\frac{1}{3}y^2 - \frac{2}{3x^2}$, $x \in (0,\infty)$.

Observăm că $y = \frac{1}{x}$ este o relație particulară a ecuației. Facem schimbarea de funcție $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{z}$ şi obținem:

$$-\frac{1}{x^2} - \frac{z'}{z^2} = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x^2} + \frac{2}{xz} + \frac{1}{z^2}\right) - \frac{2}{3x^2} = -\frac{1}{x^2} - \frac{2}{3xz} - \frac{1}{3z^2}.$$

Rezultă următoarea ecuație liniară:

$z' - \frac{2}{3x}z = \frac{1}{3}$, a cărei soluție generală este $z = Cx^{\frac{2}{3}} + x$.

Soluția generală a ecuației Riccati este:

$$y = \frac{1}{x} + \frac{1}{Cx^{2/3} + x}, \; x \in (0,\infty), \; C > 0.$$

7.2.6. Ecuaţia Clairaut

Sunt ecuaţii de forma:

$$y = xy' + \varphi(y') \tag{22}$$

unde φ este o funcţie de clasă C^1 pe un interval J.

Notând $y' = p$ ecuaţia devine $y = x \cdot p + \varphi(p)$.

Derivând în raport cu x obţinem: $p = p + x\dfrac{dp}{dx} + \varphi'(p)\dfrac{dp}{dx}$, deci

$[x + \varphi'(p)]\dfrac{dp}{dx} = 0$.

Dacă $\dfrac{dp}{dx} = 0$, rezultă $p = C$ şi mai departe

$$y = Cx + \varphi(C) \tag{23}$$

Familia de soluţii (23) reprezintă soluţia generală a ecuaţiei (22). Din punct de vedere geometric, curbele integrale corespunzătoare acestei soluţii sunt drepte.

Pe de altă parte, din $x + \varphi'(p) = 0$, obţinem soluţia singulară

$$\begin{cases} x = -\varphi'(p) \\ y = -p\varphi'(p) + \varphi(p) \end{cases} \tag{24}$$

Curba integrală corespunzătoare soluţiei singulare (24) este înfăşurătoarea familiei de drepte (23).

Exemplu $y = xy' - \dfrac{y'^2}{2}$.

Soluţia generală este $y = Cx - \dfrac{C^2}{2}$, $C \in$ P.

Soluţia singulară sub formă parametrică este:

$$\begin{cases} x = p \\ y = \dfrac{p^2}{2} \end{cases}.$$

Eliminând pe p între cele două ecuaţii parametrice obţinem $y = \dfrac{x^2}{2}$, adică o parabolă.

7.2.7. Ecuaţii cu diferenţiale exacte. Factor integrant

Sunt ecuaţii diferenţiale de forma:

$$P(x,y) + Q(x,y)y' = 0 \tag{25}$$

unde P şi Q sunt funcţii de clasă C^1 pe dreptunghiul $D=(a,b)\times(c,d)$, $Q\neq 0$ pe D şi $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ pe D. Fie $(x_0,y_0)\in D$ un punct oarecare fixat şi fie F : $D\to$ P, definită astfel:

$$F(x,y)=\int_{x_0}^{x}P(t,y_0)\mathrm{d}t+\int_{y_0}^{y}Q(x,t)\mathrm{d}t,\ (x,y)\in D \tag{26}$$

Propoziţia 7.2.7 *În condiţiile de mai sus, orice funcţie implicită* $y=\varphi(x)$ *definită de ecuaţia* $F(x,y)=C$, $C\in$ P, *este soluţie pentru ecuaţia diferenţială* (*25*) *şi orice soluţie a ecuaţiei* (*25*) *este de această formă.*

Demonstraţie. Pentru început vom arăta că $\dfrac{\partial F}{\partial x}=P$ şi $\dfrac{\partial F}{\partial y}=Q$. Într-adevăr, ţinând seama de formula de derivare a integralei cu parametru şi de ipoteza $\dfrac{\partial P}{\partial x}=\dfrac{\partial Q}{\partial y}$, rezultă

$$\frac{\partial F}{\partial x}=P(x,y_0)+\int_{y_0}^{y}\frac{\partial Q}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t=P(x,y_0)+\int_{y_0}^{y}\frac{\partial P}{\partial t}(x,t)\mathrm{d}t=$$
$$=P(x,y_0)+P(x,y)-P(x,y_0)=P(x,y).$$

De asemenea, avem: $\dfrac{\partial F}{\partial y}=Q(x,y)$. Aşadar, funcţia F definită în (26) are proprietatea că $\dfrac{\partial F}{\partial x}=P$ şi $\dfrac{\partial F}{\partial y}=Q$. Cu alte cuvinte forma diferenţială $\omega=P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ este exactă.

Fie ecuaţia

$$F(x,y)=C,\ (x,y)\in D \tag{27}$$

Deoarece $\dfrac{\partial F}{\partial y}=Q\neq 0$ pe D, rezultă că în vecinătatea oricărui punct din D ecuaţia (27) defineşte o funcţie implicită $y=\varphi(x)$, $x\in I$. Deoarece $F[x,\varphi(x)]=0$, $\forall\ x\in I$, derivând obţinem $\dfrac{\partial F}{\partial x}[x,\varphi(x)]+\dfrac{\partial F}{\partial y}[x,\varphi(x)]\cdot\varphi'(x)=0$, $\forall\ x\in I$.

Ţinând seama că $\dfrac{\partial F}{\partial x}=P$ şi $\dfrac{\partial F}{\partial y}=Q$, deducem că $P[x,\varphi(x)]+Q[x,\varphi(x)]\cdot\varphi'(x)=0$, $\forall\ x\in I$, deci $y=\varphi(x)$, $x\in I$ este soluţie pentru ecuaţia (25).

Reciproc, fie $y=\varphi(x)$, $x \in I$ o soluție a ecuației (25). Atunci, $\forall\ x \in I$ avem $\left(x,\varphi(x)\right)\in D$ și $P\left[x,\varphi(x)\right]+Q\left[x,\varphi(x)\right]\cdot\varphi'(x)=0$. Deoarece $\dfrac{\partial F}{\partial x}=P$ și $\dfrac{\partial F}{\partial y}=Q$ rezultă $\dfrac{\partial F}{\partial x}\left[x,\varphi(x)\right]+\dfrac{\partial F}{\partial y}\left[x,\varphi(x)\right]\cdot\varphi'(x)=0$, $\forall\ x \in I$, ceea ce este echivalent cu $\dfrac{d}{dx}\left(F\left(x,\varphi(x)\right)\right)=0$, $\forall\ x \in I$.

Din ultima relație deducem că $F\left[x,\varphi(x)\right]=C$, $\forall\ x \in I$, deci $y=\varphi(x)$, $x \in I$ este o funcție implicită definită de ecuația (27).

Exemplul 7.2.7 Să se afle soluțiile ecuației

$\left(3x^2-y\right)+\left(3y^2-x\right)y'=0$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\left\{\left(3a^2,a\right);\, a\in\mathbb{R}\right\}$.

Avem $P(x,y)=3x^2-y$, $Q(x,y)=3y^2-x$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}=-1$.

$$F(x,y)=\int_{x_0}^{x}\left(3t^2-y_0\right)\mathrm{d}t+\int_{y_0}^{y}\left(3t^2-x\right)\mathrm{d}t=x^3+y^3-xy+x_0y_0-x_0^3-y_0^3.$$

Așadar, orice soluție a ecuației date este de forma $y=\varphi(x),\ x\in I$, unde φ este o funcție implicită definită de ecuația $x^3+y^3-xy=K$.

Observația 7.2.7 Dacă $\dfrac{\partial P}{\partial y}\neq\dfrac{\partial Q}{\partial x}$, atunci se caută un factor integrant. Prin factor integrant se înțelege o funcție $\mu=\mu(x,y)$, $\mu\in C^1(D)$, $\mu\neq 0$ pe D cu proprietatea

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\mu(x,y)Q(x,y)\right]=\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu(x,y)P(x,y)\right],\ (x,y)\in D \tag{28}$$

Așadar, să presupunem că avem ecuația diferențială

$$P(x,y)+Q(x,y)y'=0,\ Q\neq 0 \text{ pe } D \text{ și } \frac{\partial Q}{\partial x}\neq\frac{\partial P}{\partial y} \tag{29}$$

Dacă reușim să găsim un factor $\mu=\mu(x,y)$ și înmulțim ecuația (29) cu acest factor integrant, obținem ecuația echivalentă $\mu(x,y)P(x,y)+\mu(x,y)Q(x,y)y'=0$, care este de tipul (25) și a cărei soluție se află în conformitate cu Propoziția 7.2.7. Determinarea factorului integrant se face prin încercări. Să căutăm pentru început un factor integrant de forma $\mu=\mu(x)$ (care depinde numai de x). Din (28) rezultă $\mu'(x)Q(x,y)+\mu(x)\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\mu(x)\dfrac{\partial P}{\partial y}$ și mai departe

$$\frac{\mu'(x)}{\mu(x)}=\frac{\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} \tag{30}$$

Pentru ca egalitatea (30) să fie posibilă trebuie ca expresia $\frac{\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}}{Q}$ să depindă numai de x.

Aşadar, ecuația (29) admite factor integrant $\mu=\mu(x)$, dacă $\frac{\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}}{Q}$ depinde numai de x. Să notăm cu $\varphi(x)=\frac{\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}}{Q}$. Atunci $\frac{\mu'(x)}{\mu(x)}=\varphi(x)$ şi integrând obținem $\ln|\mu(x)|=\int\varphi(x)dx+C$.

Putem alege factorul integrant $\mu(x)=e^{\int\varphi(x)dx}$.

Exemplu Fie ecuația $\left(1-x^2y\right)+x^2\left(y-x\right)y'=0$, $x\neq 0, x\neq y$. Avem

$P=1-x^2y$, $Q=x^2\left(y-x\right)$, $\frac{\partial Q}{\partial x}=2xy-3x^2\neq\frac{\partial P}{\partial y}=-x^2$, $\frac{\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}}{Q}=-\frac{2}{x}$. Rezultă că $\mu(x)=e^{-\int\frac{2}{x}dx}=\frac{1}{x^2}$. Amplificând ecuația dată cu acest factor integrant obținem $\left(\frac{1}{x^2}-y\right)+\left(y-x\right)y'=0$.

Fie $P_1=\frac{1}{x^2}-y$ şi $Q_1=y-x$. Observăm că $\frac{\partial P_1}{\partial y}=\frac{\partial Q_1}{\partial x}=-1$.

$$F\left(x,y\right)=\int_{x_0}^{x}\left(\frac{1}{t^2}-y_0\right)\mathrm{d}t+\int_{y_0}^{y}\left(t-x\right)\mathrm{d}t=\frac{y^2}{2}-\frac{1}{x}-xy+K.$$

Soluția ecuației va fi orice funcție implicită $y=\varphi(x)$, $x\in I$ definită de ecuația $\frac{y^2}{2}-\frac{1}{x}-xy=C$.

În mod analog, se arată că ecuația (29) cu $P\neq 0$, admite un factor integrant depinzând numai de y ($\mu=\mu(y)$) dacă expresia $\frac{\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}}{P}$ depinde numai de y.

Exemplu Fie ecuația $y^2(2x-3y)+\left(7-3xy^2\right)y'=0$, $y\neq 0$, $2x\neq 3y$, $7\neq 3xy^2$. Avem

$$P=y^2(2x-3y),\ Q=7-3xy^2,\ \frac{\partial P}{\partial y}=4xy-9y^2,\ \frac{\partial Q}{\partial x}=-3y^2;$$

$$\frac{\mu'(y)}{\mu(y)}=\frac{\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}}{P}=-\frac{2}{y};\ \mu(y)=\frac{1}{y^2}.$$

Înmulțind ecuația inițială cu $\frac{1}{y^2}$ obținem ecuația echivalentă

$$2x-3y+\left(\frac{7}{y^2}-3x\right)y'=0.$$

$$P_1=2x-3y;\ Q_1=\frac{7}{y^2}-3x;\ \frac{\partial Q_1}{\partial x}=\frac{\partial P_1}{\partial y}=-3.$$

$$F(x,y)=\int_{x_0}^{x}(2t-3y_0)\mathrm{d}t+\int_{y_0}^{y}\left(\frac{7}{t^2}-3x\right)\mathrm{d}t=x^2-3xy-\frac{7}{y}+C.$$

Orice funcție implicită $y=\varphi(x),\ x\in I$ definită de ecuația $x^2-3xy-\frac{7}{y}=K$ este soluția pentru ecuația dată.

Dacă ecuația nu admite factori integranți de forma $\mu=\mu(x)$ sau $\mu=\mu(y)$ se caută factori integranți de forme mai complicate $\mu=\mu(xy)$, $\mu=\mu(ax+by)$, $\mu=\mu\left(\frac{x}{y}\right)$ etc.

7.3. ECUAȚII DIFERENȚIALE LINIARE DE ORDINUL *n*

Prin ecuație diferențială liniară de ordinul n înțelegem orice ecuație de forma:

$$a_0(x)y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=b(x),\quad x\in J \tag{1}$$

unde b și a_i, $i=\overline{0,n}$ sunt funcții continue pe intervalul J și $a_0(x)\neq 0$, $\forall\, x\in J$.

Ecuația omogenă asociată este

$$a_0(x)y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=0,\quad x\in J \tag{2}$$

Dacă notăm cu $D=\frac{d}{dx}$ (operatorul de derivare), cu

$D^p = \underbrace{D \circ D \circ \ldots \circ D}_{p \text{ ori}} = \dfrac{d^p}{dx^p}$, cu I operatorul identitate pe spațiul funcțiilor de clasă $C^{(n)}$ pe J, $\left[I(y) = y, \forall\, y \in C^{(n)}(J) \right]$ și cu $L(D) = a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \ldots + a_{n-1} D + a_n I$, atunci ecuațiile (1) și (2) devin:

$$L(D)(y) = f(x) \tag{1'}$$

$$L(D)(y) = 0 \tag{2'}$$

Prin soluție a ecuației (1) (respectiv (1')), înțelegem orice funcție $\varphi \in C^{(n)}(J)$ care verifică ecuația:

$L(D)(\varphi(x)) = f(x)$ [respectiv $L(D)(\varphi(x)) = 0$], $\forall\ x \in J$.

Notăm cu S mulțimea soluțiilor ecuației omogene (2).

Observația 7.3.1 S este un spațiu vectorial real. Într-adevăr, deoarece operatorul de derivare D este liniar, rezultă că operatorul $L(D)$ este liniar.

Fie $y_1, y_2 \in S$ și $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. Atunci

$$L(D)(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 L(D)(y_1) + \alpha_2 L(D)(y_2) = \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 0 = 0,$$

deci $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \in S$.

Definiția 7.3.1 *Fie $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n : J \to \mathbb{R}$, n funcții de clasă $C^{(n-1)}$ pe intervalul J. Se numește wronskianul acestor funcții, următoarea funcție:*

$$W(x) = W[\varphi_1, \ldots, \varphi_n](x) = \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \ldots\ldots\ldots & \varphi_n(x) \\ \varphi_1'(x) & \ldots\ldots\ldots & \varphi_n'(x) \\ \hline \varphi_1^{(n-1)}(x) & \ldots\ldots\ldots & \varphi_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}, \ \forall\ \ x \in J.$$

Propoziția 7.3.1 *Fie $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, n-funcții de clasă $C^{(n-1)}$ pe intervalul J. Dacă $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ sunt liniar dependente pe J, atunci $W[\varphi_1, \ldots, \varphi_n](x) = 0$, $\forall\ x \in J$.*

Demonstrație.

Prin ipoteză există n numere reale $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, nu toate nule, astfel încât:

$$\lambda_1 \varphi_1(x) + \lambda_2 \varphi_2(x) + \ldots + \lambda_n \varphi_n(x) = 0, \ \forall\ x \in J \tag{3}$$

Derivând succesiv relația (3) de $(n-1)$ ori obținem:

$$\begin{array}{c} \lambda_1 \varphi_1'(x) + \lambda_2 \varphi_2'(x) \quad + \ldots + \quad \lambda_n \varphi_n'(x) = 0 \\ \hline \lambda_1 \varphi_1^{(n-1)}(x) + \lambda_2 \varphi_2^{(n-1)}(x) \quad + \ldots + \quad \lambda_n \varphi_n^{(n-1)}(x) = 0 \end{array}, \ \forall\ x \in J.$$

Am obținut astfel un sistem (algebric) liniar și omogen de n-ecuații cu n-necunoscute. Deoarece sistemul admite soluție nebanală (prin ipoteză cel puțin una din necunoscutele $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ este diferită de 0) rezultă că determinantul coeficienților este zero. Așadar, avem

$$W(x)=\begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \ldots\ldots\ldots & \varphi_n(x) \\ \varphi_1'(x) & \ldots\ldots\ldots & \varphi_n'(x) \\ - - - & - - - & - - - \\ \varphi_1^{(n-1)}(x) & \ldots\ldots\ldots & \varphi_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}=0\,,\ \forall\ \ x\in J\ .$$

Propoziția 7.3.2 *Fie* $\varphi,\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_n$, $(n-1)$ *funcții de clasă* $C^{(n)}$ *pe intervalul J cu proprietățile:*

$W[\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_n](x)\neq 0,\quad \forall\ x\in J$.

$W[\varphi,\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_n](x)=0$, $\forall\ x\in J$.

Atunci, există n constante reale $C_1,C_2,\ldots,C_n$ astfel încât

$\varphi(x)=C_1\varphi_1(x)+\ldots+C_n\varphi_n(x)$, $\forall\ x\in J$.

Demonstrație. Pentru simplificarea scrierii facem demonstrația în cazul particular $n=2$. Prin ipoteză avem:

$$\begin{vmatrix} \varphi(x) & \varphi_1(x) & \varphi_2(x) \\ \varphi'(x) & \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) \\ \varphi''(x) & \varphi_1''(x) & \varphi_2''(x) \end{vmatrix}=0\,,\ \forall\ \ x\in J \tag{4}$$

Deoarece coloanele 2 și 3 ale acestui determinant sunt liniar independente (prin ipoteză $W[\varphi_1,\varphi_2](x)\neq 0$, $\forall\, x\in J$) rezultă că prima coloană a determinantului (4) este combinație liniară de acestea. Așadar, $\forall\, x\in J$, există $\lambda_1(x),\lambda_2(x)\in\mathbb{R}$ astfel încât

$$\begin{cases} \varphi(x)=\lambda_1(x)\varphi_1(x)+\lambda_2(x)\varphi_2(x) \\ \varphi'(x)=\lambda_1(x)\varphi_1'(x)+\lambda_2(x)\varphi_2'(x) \\ \varphi''(x)=\lambda_1(x)\varphi_1''(x)+\lambda_2(x)\varphi_2''(x) \end{cases} \tag{5}$$

Deoarece, din primele 2 ecuații din (5), λ_1 și λ_2 se pot exprima în funcție de $\varphi,\varphi_1,\varphi_2$ și de derivatele de ordinul întâi ale acestora, iar $\varphi\in C^2(J)$, rezultă că $\lambda_1,\lambda_2\in C^1(J)$. Derivând prima relație din (5) obținem:

$\varphi'(x)=\lambda_1(x)\varphi_1'(x)+\lambda_2(x)\varphi_2'(x)+\lambda_1'(x)\varphi_1(x)+\lambda_2'(x)\varphi_2(x)$.

Ținând seama de a doua relație din (5) deducem

$\lambda_1'(x)\varphi_1(x)+\lambda_2'(x)\varphi_2(x)=0$.

În mod analog, derivând a doua relație din (5) și ținând seama de a treia relație din (5) deducem

$\lambda_1'(x)\varphi_1'(x)+\lambda_2'(x)\varphi_2'(x)=0$.

Am obținut un sistem liniar și omogen de 2 ecuații cu 2 necunoscute: $\lambda_1'(x)$ și $\lambda_2'(x)$. Deoarece, prin ipoteză determinantul coeficienților

$$\begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) \end{vmatrix} = W[\varphi_1,\varphi_2](x)\neq 0,$$

rezultă că sistemul admite numai soluția banală. Așadar,

$\lambda_1'(x)=0, \quad \lambda_2'(x)=0, \ \forall\, x\in J$; deci

$\lambda_1(x)=C_1$, $\lambda_2(x)=C_2$, $\forall\, x\in J$.

Conform primei relații din (5) avem:

$\varphi(x)=C_1\varphi_1(x)+C_2\varphi_2(x)$, $\forall\, x\in J$.

Teorema 7.3.1 (Liouville)

Fie $y_1,y_2,\dots,y_n$, n-soluții particulare ale ecuației omogene (2), fie $W(x)=W[y_1,y_2,\dots,y_n](x)$, $x\in J$ și $x_0\in J$ oarecare fixat. Atunci, pentru orice $x\in J$ avem:

$$W(x)=W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x}\frac{a_1(t)}{a_0(t)}\mathrm{d}t} \tag{6}$$

Demonstrație. Prezentăm demonstrația pentru cazul particular $n = 2$. Fie y_1,y_2, soluții particulare ale ecuației (2). Atunci avem

$$y_i''=-\frac{a_1(x)}{a_0(x)}y_i'-\frac{a_2(x)}{a_0(x)}y_i,\ i=1,2,\ x\in J \tag{7}$$

Pe de altă parte, derivând funcția W, $W(x)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$, $x\in J$, obținem

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}x}=\begin{vmatrix} y_1' & y_2' \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1'' & y_2'' \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1'' & y_2'' \end{vmatrix}.$$

Ținând seama de relațiile (7) și de proprietățile determinanților, deducem:

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}x}=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ -\frac{a_1}{a_0}y_1'-\frac{a_2}{a_0}y_1 & -\frac{a_1}{a_0}y_2'-\frac{a_2}{a_0}y_2 \end{vmatrix}=-\frac{a_1(x)}{a_0(x)}\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}.$$

Prin urmare avem

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}x}=-\frac{a_1(x)}{a_0(x)}W(x),\ \forall\, x\in J \tag{8}$$

Ecuația diferențială (8) este o ecuație liniară omogenă de ordinul întâi a cărei soluție generală este

$$W(x) = Ce^{-\int_{x_0}^{x} \frac{a_1(t)}{a_0(t)} \mathrm{d}t} \tag{9}$$

În particular, pentru $x = x_0$ rezultă $C = W\left(x_0\right)$, deci

$$W(x) = W\left(x_0\right) e^{-\int_{x_0}^{x} \frac{a_1(t)}{a_0(t)} \mathrm{d}t} .$$

Definiţia 7.3.2 *Se numeşte sistem fundamental de soluţii pentru ecuaţia omogenă* (*2*)*, orice set de n soluţii particulare* $y_1, y_2, \ldots, y_n$ *ale ecuaţiei* (*2*) *cu proprietatea că există* $x_0 \in J$ *, astfel încât* $W\left[y_1, \ldots, y_n\right](x_0) \neq 0$.

Corolarul 7.3.1 *Dacă* $y_1, y_2, \ldots, y_n$ *este un sistem fundamental de soluţii ale ecuaţiei omogene* (*2*)*, atunci* $y_1, \ldots, y_n$ *sunt liniar independente pe intervalul J.*

Demonstraţie.

Fie $x_0 \in J$, astfel încât $W\left(x_0\right) = W\left[y_1, \ldots, y_n\right](x_0) \neq 0$. Din Teorema Liouville rezultă că $W(x) \neq 0$, $\forall\ x \in J$, iar din Propoziţia 7.3.1 rezultă că $y_1, \ldots, y_n$ sunt liniar independente pe J.

Teorema 7.3.2 *Fie* $y_1, y_2, \ldots, y_n$ *un sistem fundamental de soluţii ale ecuaţiei omogene* (*2*)*. Atunci, oricare ar fi y soluţie a ecuaţiei* (*2*)*, există* $C_1, \ldots, C_n \in \mathbb{R}$ *astfel încât* $y(x) = C_1 y_1(x) + \ldots + C_n y_n(x)$*,* $\forall\ x \in J$.

Demonstraţie.

Deoarece $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sunt soluţii pentru (2) rezultă:

$$\begin{cases} a_0(x) y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x) y' + a_n(x) y = 0 \\ a_0(x) y_1^{(n)} + a_1(x) y_1^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x) y_1' + a_n(x) y_1 = 0 \\ \text{---} \\ a_0(x) y_n^{(n)} + a_1(x) y_n^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x) y_n' + a_n(x) y_n = 0 \end{cases} \tag{10}$$

Sistemul (10) este liniar şi omogen şi admite soluţii nebanale, $\forall\ x \in J$ [Deoarece prin ipoteză $a_0(x) \neq 0$, $\forall\ x \in J$]. Rezultă că determinantul coeficienţilor este 0, deci

$$\begin{vmatrix} y^{(n)} & y^{(n-1)} & \ldots & y' & y \\ y_1^{(n)} & y_1^{(n-1)} & \ldots & y_1' & y_1 \\ \text{--} & \text{--} & \text{--} & \text{--} & \text{--} \\ y_n^{(n)} & y_n^{(n-1)} & \ldots & y_n' & y_n \end{vmatrix} = 0, \quad \forall\ x \in J. \tag{11}$$

Egalitatea (11) este echivalentă cu

$$W\left[y, y_1, \ldots, y_n\right](x) = 0, \quad \forall\ x \in J. \tag{12}$$

Pe de altă parte, prin ipoteză există $x_0 \in J$ astfel încât $W\left[y_1,\ldots,y_n\right](x_0) \neq 0$ şi conform teoremei Liouville rezultă că $W\left[y_1,\ldots,y_n\right](x) \neq 0$, $\forall \quad x \in J$. Sunt îndeplinite aşadar ipotezele Propoziţiei 7.3.2, de unde deducem că există $C_1,\ldots,C_n \in \mathbb{R}$ astfel încât $y = C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n$.

Observaţia 7.3.2 Orice sistem fundamental de soluţii ale ecuaţiei omogene (2) este o bază în spaţiul vectorial S al soluţiilor ecuaţiei (2) şi $\dim_{\mathbb{R}} S = n$. Într-adevăr, din Corolarul 7.3.1 deducem că $y_1,\ldots,y_n$ sunt liniar independente pe J, iar din Teorema 7.3.2 că $y_1,\ldots,y_n$ formează un sistem de generatori pentru S. Cum dimensiunea unui spaţiu vectorial este egală cu numărul vectorilor din orice bază a sa, rezultă că $\dim_{\mathbb{R}} S = n$.

Observaţia 7.3.3 Din Teorema 7.3.2 rezultă că dacă $y_1,\ldots,y_n$ este un sistem fundamental de soluţii pentru ecuaţia omogenă (2), atunci soluţia generală*) a ecuaţiei (2) este $y = C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n$, $\forall\ C_1,C_2,\ldots,C_n \in \mathbb{R}$.

Propoziţia 7.3.3 *Fie* y_p *o soluţie oarecare a ecuaţiei neomogene* (*1*), *oarecare fixată. Atunci, orice soluţie y a ecuaţiei neomogene* (*1*) *este de forma*

$$y = y_0 + y_p \tag{13}$$

unde y_0 *este o soluţie a ecuaţiei omogene* (*2*).

Demonstraţie.

Fie S spaţiul vectorial al soluţiilor ecuaţiei omogene (2) şi fie $\mathcal{S}$ mulţimea soluţiilor ecuaţiei neomogene (1). Dacă $y = y_0 + y_p$ unde $y_0 \in S$ şi $y_p \in \mathcal{S}$, atunci $L(D)(y) = L(D)(y_0) + L(D)(y_p) = 0 + f(x) = f(x)$. Rezultă că $y \in \mathcal{S}$. Reciproc, fie $y \in \mathcal{S}$ şi $z = y - y_p$. Atunci $L(D)(z) = L(D)(y) - L(D)(y_p) = f(x) - f(x) = 0$, deci $z \in S$. Prin urmare $y = z + y_p$, unde $z \in S$.

În cele ce urmează vom arăta că dacă se cunoaşte soluţia generală a ecuaţiei omogene (2), atunci, folosind metoda variaţiei constantelor a lui Lagrange, se poate afla soluţia generală a ecuaţiei neomogene (1). Pentru simplificarea scrierii, să presupunem că $n = 2$.

---

*) Prin soluţia generală a unei ecuaţii diferenţiale de ordinul n, $F\left(x,y,y',\ldots,y^{(n)}\right) = 0$, se înţelege o familie de soluţii ale acesteia, de forma $y = \varphi\left(x,C_1,\ldots,C_n\right)$, unde C_i sunt constante arbitrare.

Fie y_1, y_2 un sistem fundamental de soluții ale ecuației omogene (2). Atunci, soluția generală a ecuației omogene este

$$y_0 = C_1 y_1 + C_2 y_2 \tag{14}$$

Căutăm soluția generală a ecuației neomogene (1) de forma

$$y = \varphi_1(x) y_1 + \varphi_2(x) y_2 \tag{15}$$

Derivând, obținem: $y' = \varphi_1(x) y_1' + \varphi_2(x) y_2' + \varphi_1'(x) y_1 + \varphi_2'(x) y_2$.

Impunem condiția

$$\varphi_1'(x) y_1 + \varphi_2'(x) y_2 = 0 \tag{16}$$

Ținând seama de (16), rezultă că

$$y' = \varphi_1(x) y_1' + \varphi_2(x) y_2', \tag{17}$$

şi mai departe că

$$y'' = \varphi_1(x) y_1'' + \varphi_2(x) y_2'' + \varphi_1'(x) y_1' + \varphi_2'(x) y_2' \tag{18}$$

În sfârşit, punând condiția ca funcția definită în (14) să verifice ecuația $a_0(x) y'' + a_1(x) y' + a_2(x) y = f(x)$ şi ținând seama de (17) şi (18) rezultă:

$$a_0(x)\left[\varphi_1(x) y_1'' + \varphi_2(x) y_2'' + \varphi_1'(x) y_1' + \varphi_2'(x) y_2'\right] + a_1(x)\left[\varphi_1(x) y_1' + \varphi_2(x) y_2'\right] +$$
$$+ a_2(x)\left[\varphi_1(x) y_1 + \varphi_2(x) y_2\right] = f(x).$$

În continuare avem:

$$\varphi_1(x)\left[a_0(x) y_1'' + a_1(x) y_1' + a_2(x) y_1\right] + \varphi_2(x)\left[a_0(x) y_2'' + a_1(x) y_2' + a_2(x) y_2\right] +$$
$$+ a_0(x)\left[\varphi_1'(x) y_1' + \varphi_2'(x) y_2'\right] = f(x).$$

Ținând seama că y_1 şi y_2 sunt soluții pentru ecuația omogenă, rezultă că $a_0(x)\left[\varphi_1'(x) y_1' + \varphi_2'(x) y_2'\right] = f(x)$, deci că

$$\varphi_1'(x) y_1' + \varphi_2'(x) y_2' = \frac{f(x)}{a_0(x)} \tag{19}$$

În concluzie, dacă, căutăm soluția generală a ecuației neomogene (1) sub forma (15), atunci funcțiile φ_1 şi φ_2 satisfac condițiile (16) şi (19), anume:

$$\begin{cases} \varphi_1'(x) y_1 + \varphi_2'(x) y_2 = 0 \\ \varphi_1'(x) y_1' + \varphi_2'(x) y_2' = \dfrac{f(x)}{a_0(x)} \end{cases} \tag{20}$$

Cum determinantul coeficienților sistemului liniar (20) este chiar wronskianul funcțiilor y_1, y_2 şi este diferit de zero prin ipoteză, rezultă că sistemul (20) are soluție unică. Fie $\varphi_1'(x) = g_1(x)$ şi $\varphi_2'(x) = g_2(x)$ soluția unică a sistemului (20). Mai departe avem:

$$\varphi_1(x) = \int g_1(x)\,\mathrm{d}x + C_1 \ \text{şi}\ \varphi_2(x) = \int g_2(x)\,\mathrm{d}x + C_2 \tag{21}$$

Înlocuind (21) în (15) obținem soluția generală a ecuației neomogene:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + y_1 \int g_1(x)\,dx + y_2 \int g_2(x)\,dx = y_0 + y_p \tag{22}$$

unde $y_0 = C_1 y_1 + C_2 y_2$ este soluția generală a ecuației omogene, iar
$y_p = y_1 \int g_1(x)dx + y_2 \int g_2(x)dx$ este o soluție particulară a ecuației neomogene.

Observația 7.3.4 În cazul general, metoda variației constantelor constă în următoarele: fie $y_1, y_2, \ldots, y_n$ un sistem fundamental de soluții ale ecuației omogene (2). Atunci, soluția generală a ecuației (2) este: $y = C_1 y_1 + \ldots + C_n y_n$.

Căutăm soluția generală a ecuației neomogene (1) de forma

$$y = \varphi_1(x) y_1 + \ldots + \varphi_n(x) y_n \qquad (23)$$

unde $\varphi_1', \varphi_2', \ldots, \varphi_n'$ verifică sistemul

$$\begin{cases} \varphi_1'(x) y_1 + \ldots + \varphi_n'(x) y_n = 0 \\ \varphi_1'(x) y_1' + \ldots + \varphi_n'(x) y_n' = 0 \\ \text{-----------------------------} \\ \varphi_1'(x) y_1^{(n-1)} + \ldots + \varphi_n'(x) y_n^{(n-1)} = \dfrac{f(x)}{a_0(x)} \end{cases} \qquad (24)$$

Rezolvând sistemul (24) (care are soluție unică) şi integrând, obținem funcțiile $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ şi deci soluția generală a ecuației neomogene (23).

În concluzie, dacă cunoaştem un sistem fundamental de soluții pentru ecuația omogenă, atunci folosind metoda variației constantelor a lui Lagrange putem să aflăm soluția generală a ecuației neomogene. În general, determinarea unui sistem fundamental de soluții pentru ecuația omogenă este dificilă pentru ecuații cu coeficienți variabili. Acest lucru este posibil însă, în cazul ecuațiilor cu coeficienți constanți, de care ne vom ocupa în continuare.

Fie

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \qquad (25)$$

o ecuație diferențială liniară şi omogenă de ordinul *n*, cu $a_i \in \mathbb{R}$, constante, $\forall\ i = \overline{1,n}$.

Căutăm soluții ale ecuației (25) de forma

$$y = e^{rx} \qquad (26)$$

unde *r* este o constantă reală.

Punând condiția ca funcția definită în (26) să fie soluție pentru ecuația (25) rezultă:

$$e^{rx}\left(a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \ldots + a_{n-1} r + a_n\right) = 0.$$

Se obține astfel o ecuație algebrică de ordinul *n*, care se numeşte ecuația caracteristică:

$$a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \ldots + a_{n-1} r + a_n = 0 \qquad (27)$$

Distingem următoarele cazuri:

Cazul 1. Ecuația caracteristică (27) are rădăcini reale și distincte două câte două.

Fie $r_1, r_2, \ldots, r_n \in \mathbb{R}$, $r_i \neq r_j$ dacă $i \neq j$, rădăcinile ecuației caracteristice (27). Atunci: $y_1 = e^{r_1 x}, y_2 = e^{r_2 x}, \ldots, y_n = e^{r_n x}$, vor fi soluții ale ecuației diferențiale (25). Wronskianul acestor soluții este

$$\begin{vmatrix} e^{r_1 x} & e^{r_2 x} & \ldots & e^{r_n x} \\ r_1 e^{r_1 x} & r_2 e^{r_2 x} & \ldots & r_n e^{r_n x} \\ \hdashline r_1^{n-1} e^{r_1 x} & r_2^{n-1} e^{r_2 x} & \ldots & r_n^{n-1} e^{r_n x} \end{vmatrix} = e^{\left(r_1 + r_2 + \ldots + r_n\right)x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ r_1 & r_2 & \ldots & r_n \\ \hdashline r_1^{n-1} & r_2^{n-1} & \ldots & r_n^{n-1} \end{vmatrix} =$$

$$= e^{\left(r_1 + \ldots + r_n\right)x} \prod_{1 \leq j < i \leq n} \left(r_i - r_j\right) \neq 0 .$$

Rezultă că aceste soluții formează un sistem fundamental de soluții, deci soluția generală a ecuației (25) este $y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} + \ldots + C_n e^{r_n x}$.

Exemplul 7.3.1 Să se afle soluția generală a ecuației $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$. Ecuația caracteristică este $r^3 - 2r^2 - r + 2 = 0$ și are soluțiile $r_1 = -1$, $r_2 = 1$, $r_3 = 2$. Soluția generală este $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{x} + C_3 e^{2x}$.

Cazul 2. Ecuația caracteristică admite o rădăcină multiplă de ordinul $m \leq n$. Vom arăta în acest caz, că dacă de exemplu r_0 este această rădăcină, atunci ecuația diferențială (25) admite soluțiile: $e^{r_0 x}, x e^{r_0 x}, \ldots, x^{m-1} \cdot e^{r_0 x}$.

Pentru început vom demonstra următoarea lemă.

Lema 7.3.1 *Pentru orice funcție* $g \in C^{(k)}\left(J\right)$ *avem*:
$\left(D - rI\right)^k \left[e^{rx} g(x)\right] = e^{rx} g^{(k)}(x)$, *unde* $D = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ *este operatorul de derivare și I este operatorul identitate pe* $C^{(k)}\left(J\right)$.

Demonstrație.

Demonstrația se face prin inducție matematică. Pentru $k = 1$ avem: $\left(D - rI\right)\left[e^{rx} g(x)\right] = r e^{rx} g(x) + e^{rx} g'(x) - r e^{rx} g(x) = e^{rx} g'(x)$.

Presupunem afirmația adevărată pentru $p < k$ și o demonstrăm pentru $p + 1$. Într-adevăr

$$\left(D - rI\right)^{p+1}\left[e^{rx} g(x)\right] = \left(D - rI\right)\left[\left(D - rI\right)^p \left(e^{rx} g(x)\right)\right] = \left(D - rI\right)\left(e^{rx} g^{(p)}(x)\right) =$$

$$= r e^{rx} g^{(p)}(x) + e^{rx} g^{(p+1)}(x) - r e^{rx} g^{(p)}(x) = e^{rx} g^{(p+1)}(x)$$

Fie acum r_0 o rădăcină de ordinul de multiplicitate *m* pentru ecuația caracteristică (27). Dacă notăm cu $F(r)=a_0r^n+a_1r^{n-1}+\ldots+a_n$, membrul stâng al ecuației (25), atunci $F(r)=F_1(r)(r-r_0)^m$, unde F_1 este o funcție polinomială de gradul *n* – *m*. Acestei descompuneri în factori a polinomului caracteristic îi corespunde următoarea descompunere a operatorului *L*(*D*):

$L(D)=L_1(D)\circ(D-r_0I)^m$. Mai precis, dacă

$F_1(r)=b_0r^{n-m}+b_1r^{n-m-1}+\ldots+b_{n-m}$, atunci

$L_1(D)=b_0D^{n-m}+b_1D^{n-m-1}+\ldots+b_{n-m}I$.

Pentru orice *k* < *m*, din Lema 7.3.1 rezultă:

$$L(D)\left(x^ke^{r_0x}\right)=L_1(D)\left[(D-r_0I)^m\left(x^ke^{r_0x}\right)\right]=$$
$$=L_1(D)\left[e^{r_0x}\left(x^k\right)^{(m)}\right]=L_1(D)(0)=0.$$

Rezultă că $x^ke^{r_0x}$ este o soluție pentru ecuația diferențială (25), oricare ar fi $k=\overline{0,m-1}$.

Observația 7.3.5 Funcțiile $e^{rx},xe^{rx},\ldots,x^pe^{rx}$, $x\in J$ sunt liniar independente pe intervalul *J*.

Într-adevăr, să presupunem că avem relația

$\lambda_0e^{rx}+\lambda_1xe^{rx}+\ldots+\lambda_{p+1}x^pe^{rx}=0$, $\forall\ x\in J$. Atunci rezultă

$\lambda_0+\lambda_1x+\ldots+\lambda_{p+1}x^p=0$, $\forall\ x\in J$, deci $\lambda_0=\lambda_1=\ldots=\lambda_{p+1}=0$.

Exemplul 7.3.2 Să se afle soluția generală a ecuației $y''-6y'+9y=0$. Ecuația caracteristică este $r^2-6r+9=0$, care admite rădăcina dublă $r_1=r_2=3$.

Ecuația diferențială va admite soluțiile particulare $y_1=e^{3x}$ și $y_2=xe^{3x}$, care sunt liniar independente.

Soluția generală va fi $y=C_1e^{3x}+C_2xe^{3x}$.

Cazul 3. Ecuația caracteristică admite rădăcina complexă simplă $r=\alpha+i\beta$, $\beta\neq 0$.

Vom arăta în acest caz, că ecuația diferențială admite soluțiile particulare $y_1=e^{\alpha x}\cos\beta x$ și $y_2=e^{\alpha x}\sin\beta x$.

Definiția 7.3.3 *Dacă u,v* : $J\to$ P *sunt derivabile pe intervalul J și f* : $J\to\leq$ *este funcția complexă definită astfel:* $f(x)=u(x)+iv(x)$, $\forall\ x\in J$, *atunci prin definiție,* $f'(x)=u'(x)+i\,v'(x)$, $\forall\ x\in J$.

(În mod analog se poate defini derivata de orice ordin a funcției f).

Lema 7.3.2 *Dacă $f = u + iv$ este soluție pentru ecuația diferențială omogenă* (*25*)*, atunci u și v sunt de asemenea soluții pentru ecuația* (*25*).

Demonstrație. Prezentăm demonstrația pentru cazul particular $n = 2$. Dacă $f = u + iv$ este soluția pentru ecuația (25), atunci avem:

$$a_0\left[u(x)+i\,v(x)\right]''+a_1\left[u(x)+i\,v(x)\right]'+a_2\left[u(x)+v(x)\right]=0,\ \forall\ x\in J\ .$$

Efectuând calculele rezultă că:

$$\left[a_0u''(x)+a_1u'(x)+a_2u(x)\right]+i\left[a_0v''(x)+a_1v'(x)+a_2v(x)\right]=0,\ \forall\ x\in J$$

și mai departe că:

$$a_0u''(x)+a_1u'(x)+a_2u(x)=0$$

$$a_0v''(x)+a_1v'(x)+a_2v(x)=0,\ \forall\ x\in J\ ,$$

deci u și v sunt soluții pentru ecuația (25).

Fie $r=\alpha+i\beta$, $\beta\neq 0$ o rădăcină complexă a ecuației caracteristice (27). Atunci $y=e^{(\alpha+i\beta)x}$ este o soluție (complexă) a ecuației diferențiale (25).

Din formulele lui Euler (Vezi [10], 3.2.1) rezultă că:

$y=e^{\alpha x}\cdot e^{i\beta x}=e^{\alpha x}\left(\cos\beta x+i\sin\beta x\right)=e^{\alpha x}\cos\beta x+i\,e^{\alpha x}\sin\beta x$, iar din Lema 7.3.2 că $y_1=e^{\alpha x}\cos\beta x$ și $y_2=e^{\alpha x}\sin\beta x$ sunt soluții (reale) ale ecuației (25). Pe de altă parte este evident că y_1 și y_2 sunt liniar independente.

Exemplul 7.3.3 Să se afle soluția generală a ecuației: $y''-2y'+5y=0$. Ecuația caracteristică este $r^2-2r+5=0$ și are rădăcinile $r_{1,2}=1\pm 2i$. Rezultă că ecuația diferențială admite soluțiile particulare $y_1=e^x\cos 2x$ și $y_2=e^x\sin 2x$.

Soluția generală este $y=C_1e^x\cos 2x+C_2e^x\sin 2x$.

Exemplul 7.3.4 Să se afle soluția generală a ecuației:

$$y^{VII}-y^{V}-2y^{IV}-5y'''-4y''-3y'-2y=0.$$

Ecuația caracteristică este

$$r^7-r^5-2r^4-5r^3-4r^2-3r-2=0.$$

Rădăcinile ecuației caracteristice sunt:

$$r_1=r_2=-1,\ r_3=2;\ r_4=r_5=i,\ r_6=r_7=-i.$$

Ecuația admite următoarele soluții particulare: $y_1=e^{-x}$, $y_2=xe^{-x}$, $y_3=e^{2x}$, $y_4=\cos x$, $y_5=x\cos x$, $y_6=\sin x$, $y_7=x\sin x$. Aceste soluții sunt liniar independente. Soluția generală este $y=\sum\limits_{i=1}^{7}C_iy_i$, $C_i\in\mathbb{C}$, $i=\overline{1,7}$.

Aşa cum am văzut în Observaţia 7.3.4, dacă cunoaştem soluţia generală a ecuaţiei omogene, cu metoda variaţiei constantelor putem afla şi soluţia generală a ecuaţiei neomogene.

Exemplul 7.3.5 Să se afle soluţia generală a ecuaţiei $y'' + y = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

Ecuaţia omogenă asociată $y'' + y = 0$ are ecuaţia caracteristică $r^2 + 1 = 0$. Rădăcinile ecuaţiei caracteristice sunt $r_{1,2} = \pm i$ $(\alpha = 0, \beta = 1)$. Soluţia generală a ecuaţiei omogene este:

$$y_0 = C_1 \cos x + C_2 \sin x \qquad (28)$$

Căutăm soluţia generală a ecuaţiei neomogene de forma:

$$y = \varphi_1(x) \cos x + \varphi_2(x) \sin x .$$

Funcţiile φ_1' şi φ_2' verifică sistemul

$$\begin{cases} \varphi_1'(x)\cos x + \varphi_2'(x)\sin x = 0 \\ -\varphi_1'(x)\sin x + \varphi_2'(x)\cos x = \dfrac{1}{\cos^2 x} \end{cases}$$

Rezolvând sistemul obţinem

$$\varphi_1'(x) = -\frac{\sin x}{\cos^2 x}, \ \varphi_2'(x) = \frac{1}{\cos x} .$$

În continuare avem:

$$\varphi_1(x) = \int -\frac{\sin x}{\cos^2 x} dx = -\frac{1}{\cos x} + C_1$$

$$\varphi_2(x) = \int \frac{1}{\cos x} dx = \int \frac{\cos x}{1 - \sin^2 x} dx = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} + C_2 .$$

Înlocuind în (28) obţinem soluţia generală a ecuaţiei neomogene:

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - 1 + \frac{1}{2}(\sin x) \ln \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}, \ x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right).$$

Metoda variaţiei constantelor este laborioasă (presupune rezolvarea unui sistem de ecuaţii liniare şi apoi calculul unor primitive). În anumite situaţii, când membrul drept al ecuaţiei neomogene este de forme particulare, se procedează altfel pentru rezolvarea ecuaţiei neomogene. În continuare descriem această metodă. Să presupunem că membrul drept al ecuaţiei neomogene este de forma:

$$f(x) = e^{\lambda x} \left[P_1(x) \cos \mu x + P_2(x) \sin \mu x \right] \qquad (29)$$

unde P_1 şi P_2 sunt funcţii polinomiale.

Cazul 1. Dacă $\lambda + i\mu$ nu este rădăcină pentru ecuaţia caracteristică (27), se caută o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene (1) de forma:

$$y_p = e^{\lambda x}\left[Q_1(x)\cos\mu x + Q_2(x)\sin\mu x\right] \tag{30}$$

unde $\operatorname{gr} Q_1 = \operatorname{gr} Q_2 = \max\left(\operatorname{gr} P_1, \operatorname{gr} P_2\right)$. Se pune condiția ca funcția definită în (30) să verifice ecuația neomogenă și se determină funcțiile polinomiale Q_1 și Q_2.

Acest caz se mai numește și cazul fără rezonanță.

Cazul 2 (cu rezonanță) Dacă $\lambda + i\mu$ este rădăcină a ecuației caracteristice (27) și are ordinul de multiplicitate m, atunci se caută o soluție particulară a ecuației neomogene de forma

$$y_p = x^m e^{\lambda x}\left[Q_1(x)\cos\mu x + Q_2(x)\sin\mu x\right] \tag{31}$$

și în continuare se procedează ca în Cazul 1.

Exemplul 7.3.6 Să se afle soluția generală a ecuației

$$y'' - 3y' + 2y = 5e^{-x} \tag{32}$$

Ecuația omogenă este $y'' - 3y' + 2y = 0$ și are ecuația caracteristică $r^2 - 3r + 2 = (r-1)(r-2) = 0$. Soluția generală a ecuației omogene este $y_0 = C_1e^x + C_2e^{2x}$.

Membrul drept este de forma (29) și anume $\lambda = -1$, $\mu = 0$, $P_1(x) = 5$, $P_2(x) = 0$.

$\lambda + i\mu = -1$ nu este rădăcină pentru ecuația caracteristică. Atunci căutăm o soluție particulară a ecuației neomogene de forma

$$y_p = a e^{-x} \tag{33}$$

Punând condiția ca (33) să verifice ecuația (32) obținem:

$a e^{-x} + 3a e^{-x} + 2a e^{-x} = 5e^{-x}$, de unde rezultă $a = \frac{5}{6}$ și $y_p = \frac{5}{6}e^{-x}$.

Soluția generală a ecuației (32) este $y = y_0 + y_p = C_1e^x + C_2e^{2x} + \frac{5}{6}e^{-x}$.

Exemplul 7.3.7

$$y'' - 3y' + 2y = 8e^{2x} \tag{34}$$

În acest caz $\lambda = 2$, $\mu = 0$, $P_1 = 8$; $P_2 = 0$.

Observăm că avem rezonanță, deoarece $\lambda + i\mu = 2$ este rădăcină simplă pentru ecuația caracteristică. Căutăm soluția particulară a ecuației neomogene de forma

$$y_p = x \cdot a e^{2x}, \ a \in \mathrm{P}. \tag{35}$$

Punând condiția ca (35) să verifice (34) obținem:

$\left(4a + 4ax - 2a - 6ax + 2ax\right)e^{2x} = 8e^{2x}$.

Rezultă $a = 8$ și $y_p = 8x e^{2x}$. Soluția generală este: $y = C_1e^x + C_2 e^{2x} + 8x e^{2x}$.

Exemplul 7.3.8

$$y'' - 3y' + 2y = 2\cos x \tag{36}$$

Avem: $\lambda = 0$; $\mu = 1$, $P_1 = 2$, $P_2 = 0$.

$\lambda + i\mu = i$ nu este rădăcină pentru ecuația caracteristică. Căutăm soluția particulară y_p de forma

$$y_p = e^{0x}\left(a\cos x + b\sin x\right) = a\cos x + b\sin x \tag{37}$$

Punând condiția ca (37) să verifice (36) obținem:

$(a - 3b)\cos x + (3a + b)\sin x = 2\cos x$.

Rezultă

$\begin{cases} a - 3b = 2 \\ 3a + b = 0 \end{cases}$ şi mai departe $a = \frac{1}{5}$, $b = -\frac{3}{5}$, $y_p = \frac{1}{5}\cos x - \frac{3}{5}\sin x$.

Soluția generală a ecuației (36) este

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \frac{1}{5}\cos x - \frac{3}{5}\sin x.$$

Exemplul 7.3.9

$$y'' + y = 3\sin x \tag{38}$$

Ecuația omogenă $y'' + y = 0$ are ecuația caracteristică $r^2 + 1 = 0$. Soluția generală a ecuației omogene este $y = C_1\cos x + C_2\sin x$. (Vezi exemplul 7.3.5).

$\lambda = 0$, $\mu = 1$; $\lambda + i\mu = i$ este rădăcină simplă pentru ecuația caracteristică (avem rezonanța). Alegem

$$y_p = x\left(a\cos x + b\sin x\right) \tag{39}$$

Punând condiția ca y_p să verifice ecuația (38) obținem:

$-2a\sin x + 2b\cos x = 3\sin x$ şi mai departe $a = -\frac{3}{2}$, $b = 0$, $y_p = -\frac{3}{2}x\cos x$.

Soluția generală a ecuației (38) este $y = C_1\cos x + C_2\sin x - \frac{3}{2}x\cos x$.

În încheierea acestui paragraf prezentăm ecuațiile de tip Euler, care sunt ecuații cu coeficienți variabili.

Vom arăta că dacă facem schimbarea de variabilă $x = e^t$, ecuațiile Euler devin ecuații diferențiale liniare cu coeficienți constanți.

O ecuație Euler este de forma:

$$a_0 x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} x y' + a_n y = f(x) \tag{40}$$

unde $a_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{0,n}$ sunt constante.

Dacă facem schimbarea de variabilă

$$x = e^t \tag{41}$$

şi notăm cu $z(t)=y\left(e^t\right)$, atunci avem:

$$z'(t)=y'\left(e^t\right)\cdot e^t \text{, deci } y'\left(e^t\right)=e^{-t}z(t).$$

Derivând în continuare obținem:

$$z''(t)=y''\left(e^t\right)\cdot e^{2t}+y'\left(e^t\right)\cdot e^t=y''\left(e^t\right)\cdot e^{2t}+z'(t)\text{, deci}$$

$$y''\left(e^t\right)=e^{-2t}\left(z''(t)-z'(t)\right)$$

$$z'''(t)=y'''\left(e^t\right)\cdot e^{3t}+y''\left(e^t\right)\cdot 2e^{2t}+z''(t)=y'''\left(e^t\right)\cdot e^{3t}+2\left(z''(t)-z'(t)\right)+z''(t)$$

Aşadar, avem

$$y'''\left(e^t\right)=e^{-3t}\left(z'''(t)-3z''(t)+2z'(t)\right)\text{ etc.}$$

În general

$$y^{(k)}\left(e^t\right)=e^{-kt}\left(z^{(k)}(t)+b_1z^{(k-1)}(t)+\ldots+b_kz'(t)\right). \tag{42}$$

Înlocuind (42) în (40) obținem o ecuație cu coeficienți constanți în necunoscuta $z=z(t)$.

Exemplul 7.3.10

$$x^2y''-xy'+y=\ln x. \tag{43}$$

În urma schimbării de variabilă $x=e^t$, ecuația devine

$$e^{2t}\cdot e^{-2t}\left(z''-z'\right)-e^t\cdot e^{-t}\cdot z'+z=t \text{ sau}$$

$$z''-2z'+z=t \tag{44}$$

Ecuația omogenă $z''-2z'+z=0$ are ecuația caracteristică $r^2-2r+1=0$, care admite rădăcina dublă $r_1=r_2=t$.

Soluția generală a ecuației omogene este:

$$z_0=C_1e^t+C_2te^t \tag{45}$$

Deoarece nu avem rezonanță, căutăm o soluție particulară a membrului drept de forma:

$$y_p=at+b \tag{46}$$

Punând condiția ca y_p să verifice ecuația neomogenă (44), rezultă a = 1, b = 2, deci $y_p=t+2$.

Soluția generală a ecuației neomogene (44) este $z=C_1e^t+C_2te^t+t+2$. Înlocuind $t=\ln x$, obținem soluția generală a ecuației (43):

$$y=C_1x+C_2x\ \ln x+\ln x+2.$$

7.4 SISTEME DE ECUAȚII DIFERENȚIALE. TEOREMA DE EXISTENȚĂ ȘI UNICITATE

Prin sistem de n ecuații diferențiale de ordinul întâi sub formă normală, se înțelege un sistem de forma:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, \ldots, y_n) \\ \text{-----------------} \\ \dfrac{dy_n}{dx_n} = f_n(x, y_1, \ldots, y_n) \end{cases} \tag{1}$$

unde $f_1, \ldots, f_n$ sunt funcții continue definite pe o mulțime deschisă $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

Definiția 7.4.1 *Se numeşte soluție a sistemului* (*1*) *orice set de n-funcții* $y_1 = \varphi_1(x), \ldots, y_n = \varphi_n(x)$, $x \in I$ ($I \subset \mathbb{R}$ *interval deschis*), $\varphi_i \in C^1(I)$, $i = \overline{1,n}$ *cu proprietatea*

$$\begin{cases} \dfrac{d\varphi_1(x)}{dx} = f_1\left[x, \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)\right] \\ \text{-----------------------} \\ \dfrac{d\varphi_n(x)}{dx} = f_n\left[x, \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)\right] \end{cases}, \quad \forall\, x \in I.$$

(Se subînțelege că am presupus că $(x, \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)) \in D$, $\forall\ x \in I$).

În general, un sistem de ecuații diferențiale admite o infinitate de soluții. Pentru a selecta o anumită soluție se impun condiții inițiale.

Definiția 7.4.2 *Fie* $M_0(x_0, y_{10}, \ldots, y_{n0})$ *un punct oarecare din D fixat. Se numeşte problema Cauchy pentru sistemul* (*1*)*, problema determinării unei soluții a acestui sistem,* $y_1 = \varphi_1(x), \ldots, y_n = \varphi_n(x)$, $x \in I$*, care verifică condiția inițială:*

$$\varphi_1(x_0) = y_{10}, \ldots, \varphi_n(x_0) = y_{n0} \tag{2}$$

Dacă adoptăm scrierea vectorială: $y = (y_1, \ldots, y_n)$, $f = (f_1, \ldots, f_n)$, $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$, $y_0 = (y_{10}, \ldots, y_{n0})$, sistemul (4) se scrie

$$y' = f(x, y) \tag{1'}$$

iar problema Cauchy constă în determinarea unei funcții vectoriale $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$, $\varphi \in C^1(I)$ cu proprietățile:

$$(x, \varphi(x)) \in D,\ \forall\ x \in I,\ \varphi'(x) = f\left[x, \varphi(x)\right],\ \forall\ x \in I,\ \varphi(x_0) = y_0. \tag{2'}$$

Definiția 7.4.3 *O funcție* $f : D \to \mathbb{R}^{n+1}$ *este lipschitziană pe D, în raport cu* $y_1, \ldots, y_n$*, dacă există o constantă* $L > 0$ *astfel încât*

$\left| f(x,y_1,\ldots,y_n) - f(x,z_1,\ldots,z_n) \right| \le L\sum_{j=1}^{n}\left|y_j - z_j\right|$, *oricare ar fi punctele* $(x,y_1,\ldots,y_n)$ *şi* $(x,z_1,\ldots,z_n)$ *din D.*

Observaţia 7.4.1 Dacă D este o mulţime deschisă şi convexă, $f \in C^1(D)$ şi există $M > 0$ astfel încât $\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}(x,y_1,\ldots,y_n)\right| \le M$, $\forall\ (x,y_1,\ldots,y_n)\in D$ şi $\forall\ i=\overline{1,n}$, atunci f este lipschitziană pe D.

Într-adevăr, din teorema creşterilor finite a lui Lagrange, rezultă că oricare ar fi $P(x,y_1,\ldots,y_n)\in D$ şi oricare ar fi $Q(x,z_1,\ldots,z_n)\in D$ există un punct $(x,\xi_1,\ldots,\xi_n)$ pe segmentul de dreaptă deschis, de capete P şi Q astfel încât

$$f(x,y_1,\ldots,y_n) - f(x,z_1,\ldots,z_n) = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_j}(x,\xi_1,\ldots,\xi_n)(y_j - z_j).$$

În continuare avem:

$$\left| f(x,y_1,\ldots,y_n) - f(x,z_1,\ldots,z_n)\right| \le \sum_{j=1}^{n}\left|\frac{\partial f}{\partial x_j}(x,\xi_1,\ldots,\xi_n)\right|\left|(y_j - z_j)\right| \le$$

$$\le M\sum_{j=1}^{n}\left|(y_j - z_j)\right|,$$

deci f este lipschitziană pe D.

Teorema 7.4.1 (Teorema de existenţă şi unicitate pentru sisteme)

Fie $M_0(x_0,y_{10},\ldots,y_{n0})\in \mathbb{R}^{n+1}$, $a,b_i>0$, $i=\overline{1,n}$ *şi* $D=(x_0-a,\, x_0+a)\times\Delta$, *unde* $\Delta=\prod_{j=1}^{n}(y_{j0}-b_j,\, y_{j0}+b_j) = (y_{10}-b_1,\, y_{10}+b_1)\times\ldots\times(y_{n0}-b_n,\, y_{n0}+b_n)$.

Dacă $f_i:\overline{D}\to\mathbb{R}$ este continuă şi lipschitziană pe $\overline{D}$, oricare ar fi $i=\overline{1,n}$, atunci există o soluţie unică a sistemului (1): $y_1=\varphi_1(x),\ldots,y_n=\varphi_n(x)$, $x\in I\subset(x_0-a,\, x_0+a)$ cu proprietatea: $\varphi_1(x_0)=y_{10},\ldots,\varphi_n(x_0)=y_{n0}$.
(Cu alte cuvinte, în condiţii precizate, problema Cauchy (1)+(2) are soluţie unică).

Demonstraţie. Deoarece f_i este continuă pe mulţimea compactă $\overline{D}$, rezultă că este mărginită pe $\overline{D}$. Fie $M_i>0$ marginea superioară a funcţiei f_i pe $\overline{D}$ şi fie $M=\max\{M_1,\ldots,M_n\}$. Fie de asemenea $L=\max\{L_1,\ldots,L_n\}$, unde $L_i>0$ este constanta Lipschitz a funcţiei f_i pe $\overline{D}$, $i=\overline{1,n}$. Fie $\alpha\in(0,1)$ oarecare şi fie $h=\min\left(a,\frac{b_1}{M},\ldots,\frac{b_n}{M},\frac{\alpha}{nL}\right)$. Notăm cu $I=(x_0-h,\, x_0+h)$. Evident,

$I \subset (x_0 - a, x_0 + a)$. Procedând ca în demonstrația Lemei 7.1.1, se arată că rezolvarea problemei Cauchy (1)+(2) este echivalentă cu rezolvarea următorului sistem de ecuații integrale:

$$\begin{cases} y_1(x) = y_{10} + \int_{x_0}^{x} f_1[t, y_1(t), \ldots, y_n(t)]\mathrm{d}t \\ ----------------------------- \\ y_n(x) = y_{n0} + \int_{x_0}^{x} f_n[t, y_1(t), \ldots, y_n(t)]\mathrm{d}t \ , \ x \in I \end{cases} \tag{3}$$

Rezultă că dacă arătăm că sistemul (4) are soluție unică, atunci teorema este demonstrată.

Fie $\mathcal{F} = \{ G = (g_1, \ldots, g_n) : I \to \Delta ; G - \text{continuă pe } I \}$ şi fie $d(G,H) = \max\limits_{1 \le i \le n} \sup\{ | g_i(x) - h_i(x) | ; x \in I \}$, oricare ar fi funcțiile $G = (g_1, \ldots, g_n)$ şi $H = (h_1, \ldots, h_n)$ din $\mathcal{F}$. Se arată, ca şi în demonstrația Teoremei 7.1.1, că $(\mathcal{F}, d)$ este un spațiu metric complet. În continuare, pentru orice $G \in \mathcal{F}$ şi orice $x \in I$, notăm cu $T_i(G)(x) = y_{i0} + \int_{x_0}^{x} f_i[t, g_1(t), \ldots, g_n(t)]\mathrm{d}t$ şi cu $T = (T_1, \ldots, T_n)$. Pentru început vom arăta că $T : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$.

Într-adevăr, pentru orice $x \in I$, avem:

$$| T_i(G)(x) - y_{i0} | \le \left| \int_{x_0}^{x} f_i[t, g_1(t), \ldots, g_n(t)]\mathrm{d}t \right| \le M \left| \int_{x_0}^{x} \mathrm{d}t \right| = M(x - x_0) \le$$

$$\le Mh \le M \cdot \frac{b_i}{M} = b_i .$$

Rezultă că $T(G)(x) = (T_1(G)(x), \ldots, T_n(G)(x)) \in \Delta$, $\forall \ x \in I$. Cum $T(G)$ este evident continuă pe I, rezultă că $T(G) \in \mathcal{F}$.

În continuare vom arăta că T este o contracție pe $\mathcal{F}$. Pentru aceasta, fie $G, H \in \mathcal{F}$, $x \in I$ şi $i = \overline{1,n}$. Atunci

$$| T_i(G)(x) - T_i(H)(x) | \le \left| \int_{x_0}^{x} \left| f_i(t, g_1(t), \ldots, g_n(t)) - f_i(t, h_1(t), \ldots, h_n(t)) \right| \mathrm{d}t \right| \le$$

$$\le \left| \int_{x_0}^{x} L_i \sum_{j=1}^{n} | g_j(t) - h_j(t) | \mathrm{d}t \right| \le nL\, d(G,H) \left| \int_{x_0}^{x} \mathrm{d}t \right| \le nL d(G,H) h \le$$

$$\le nL d(G,h) \frac{\alpha}{nL} = \alpha d(G,h) .$$

Rezultă că

$$d(T(G), T(H)) = \max_{1 \le i \le n} \sup\{ | T_i(G)(x) - T_i(H)(x) | ; x \in I \} \le$$

$$\le \alpha d(G,H) .$$

Cum $\alpha \in (0,1)$, deducem că T este o contracție pe F. Din Teorema de punct fix a lui Banach, rezultă că există $\Phi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \in \mathsf{F}$, unică, cu proprietatea: $T(\Phi) = \Phi$, relație vectorială echivalentă cu:

$$y_{i0} + \int_{x_0}^{x} f_i\left[t, \varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)\right] \mathrm{d}t = \varphi_i(t), \ \forall \ t \in I, \ \forall \ i = \overline{1,n}.$$

Așadar, am arătat că $\Phi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n) : I \to \Delta$ este soluția unică a sistemului (3) și cu aceasta teorema este demonstrată.

Definiția 7.4.4 *Prin ecuație diferențială de ordinul n, sub formă normală, înțelegem o ecuație diferențială de forma:*

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right) \tag{4}$$

unde f este o funcție continuă definită pe o mulțime deschisă $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $y = y(x)$ este funcția necunoscută iar $y^{(k)}$ este derivata de ordinul k a lui y, $k = \overline{1, n-1}$.

Prin soluție a ecuației (4) se înțelege orice funcție $y = \varphi(x)$, $x \in I$, $\varphi \in C^{(n-1)}(I)$ cu proprietățile:

$$\left(x, \varphi(x), \varphi'(x), \ldots, \varphi^{(n-1)}(x)\right) \in D, \ \forall \ x \in I \ \text{ și}$$

$$\varphi^{(n)}(x) = f\left[x, \varphi(x), \varphi'(x), \ldots, \varphi^{(n-1)}(x)\right], \ \forall \ x \in I.$$

Fie $M_0\left(x_0, y_0, y_{10}, \ldots, y_{n-1,0}\right) \in D$ un punct oarecare fixat. Problema Cauchy pentru ecuația (4) și punctul M_0 constă în determinarea unei soluții: $y = \varphi(x)$, $x \in I$ a ecuației (4) care îndeplinește condițiile:

$$\varphi(x_0) = y_0, \ \varphi'(x_0) = y_{10}, \ldots, \varphi^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1,0} \tag{5}$$

Teorema 7.4.2 *Fie*

$$D = (x_0 - a, x_0 + a) \times (y_0 - b_0, y_0 + b_0) \times \prod_{j=1}^{n-1} \left(y_{j0} - b_j, y_{j0} + b_j\right)$$ *un paralelipiped cu centrul în* $M_0\left(x_0, y_0, y_{10}, \ldots, y_{n-1,0}\right) \in D$. *Presupunem că* $f : \overline{D} \to \mathbb{R}$ *este continuă și lipschitziană în raport cu toate argumentele, mai puțin x.*

În aceste condiții, problema Cauchy (4)+(5) are soluție unică.

Demonstrație.

Dacă introducem notațiile:

$$y_1 = y', \ y_2 = y'', \ldots, y_{n-1} = y^{(n-1)} \tag{6}$$

atunci ecuația (4) se înlocuiește cu următorul sistem de ecuații diferențiale:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = y_1 \\ \dfrac{dy_1}{dx} = y_2 \\ ------------------ \\ \dfrac{dy_{n-2}}{dx} = y_{n-1} \\ \dfrac{dy_{n-1}}{dx} = f\left(x, y, y_1, \ldots, y_{n-1}\right) \end{cases} \tag{7}$$

Cum sistemul (7) verifică condițiile din Teorema 7.3.1, rezultă că există o soluție unică a sistemului (7):

$$y = \varphi(x),\ y_1 = \varphi_1(x), \ldots, y_{n-1} = \varphi_{n-1}(x),\ x \in I \tag{8}$$

care verifică condiția inițială

$$\varphi\left(x_0\right) = y_0,\ \varphi_1\left(x_0\right) = y_{10}, \ldots, \varphi_{n-1}\left(x_0\right) = y_{n-1,0} \tag{9}$$

Dacă ținem seama de notațiile (6) şi de faptul că (8) este soluție pentru sistemul (7) obținem: $\varphi^{(n)}(x) = f\left[x, \varphi(x), \varphi'(x), \ldots, \varphi^{(n-1)}(x)\right]$, $\forall\ x \in I$, deci $y = \varphi(x)$, $x \in I$ este soluție pentru ecuația (4). Pe de altă parte din (6) şi (9) rezultă că $\varphi\left(x_0\right) = y_0$, $\varphi'\left(x_0\right) = y_{10}, \ldots, \varphi^{(n-1)}\left(x_0\right) = y_{n-1,0}$. Aşadar, $y = \varphi(x)$, $x \in I$ este soluție unică pentru problema Cauchy (4)+(5).

Exemplul 7.4.1 Să se rezolve problema Cauchy
$y'' + y = x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$.

Soluția generală a ecuației este $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x$. Din condițiile inițiale $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$ rezultă $C_1 = 1$ şi $C_2 = 2$. Soluția problemei Cauchy este $y = \cos x + 2\sin x + x$.

7.5 SISTEME DE ECUAȚII DIFERENȚIALE LINIARE

Un sistem de ecuații diferențiale liniare de ordinul întâi este de forma următoare:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = a_{11}(x) y_1 + \ldots + a_{1n}(x) y_n + b_1(x) \\ ------------------------ \\ \dfrac{dy_n}{dx_n} = a_{n1}(x) y_1 + \ldots + a_{nn}(x) y_n + b_n(x) \end{cases} \tag{1}$$

unde a_{ij} şi b_i sunt funcții continue definite pe un interval $I = (a, b) \subset$ P.

Sistemul omogen asociat sistemului (1) este:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = a_{11}(x)y_1 + \ldots + a_{1n}(x)y_n \\ -------------------- \\ \dfrac{dy_n}{dx_n} = a_{n1}(x)y_1 + \ldots + a_{nn}(x)y_n \end{cases} \tag{2}$$

Dacă introducem notaţiile vectoriale:

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \; A = \begin{pmatrix} a_{11} \ldots a_{1n} \\ ----- \\ a_{n1} \ldots a_{nn} \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

sistemul (1) devine

$$\frac{dY}{dx} = AY + b \tag{1'}$$

iar sistemul (2)

$$\frac{dY}{dx} = AY \tag{2'}$$

Observaţia 7.5.1 Dacă notăm cu $f_i(x) = a_{i1}(x)y_1 + \ldots + a_{in}(x)y_n + b_i(x)$, $\forall\, x \in I$, $\forall\; i = \overline{1,n}$, atunci $\dfrac{\partial f_i}{\partial y_j} = a_{ij}(x)$. Fie $x_0 \in (a,b) = I$ şi fie $J \subset I$ un interval închis care conţine punctul x_0. Deoarece funcţiile a_{ij} şi b_i sunt continue pe *I*, rezultă că aceste funcţii sunt mărginite pe *J*. Din Observaţia 7.3.1 rezultă că funcţiile f_i sunt lipschitziene în raport cu $y_1, \ldots, y_n$ pe domeniul $J \times \mathbb{R}^n$. Rezultă că pe o vecinătate suficient de mică a punctului $(x_0, y_{10}, \ldots, y_{n0}) \in J \times \mathbb{R}^n$, Teorema 7.3.1 de existenţă şi unicitate este valabilă. De fapt, se poate demonstra mai mult, că oricare ar fi $a < x_0 < b$ şi oricare ar fi $y_0 = (y_{10}, \ldots, y_{n0}) \in \mathbb{R}^n$, există o soluţie unică a sistemului liniar (1): $y_1 = \varphi_1(x), \ldots, y_n = \varphi_n(x)$, $x \in I$ care verifică condiţia iniţială $\varphi_1(x_0) = y_{10}, \ldots, \varphi_n(x_0) = y_{n0}$.

În continuare vom studia sistemul omogen (2).

Propoziţia 7.5.1 *Dacă Y_1 şi Y_2 sunt soluţii ale sistemului omogen* (*2*), *atunci* $\forall\; \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ *, rezultă că $\alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2$ este de asemenea soluţie pentru* (*2*).

Demonstraţie. Deoarece operaţia de derivare este liniară rezultă:

$$\frac{d}{dx}(\alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2) = \alpha_1 \frac{dY_1}{dx} + \alpha_2 \frac{dY_2}{dx} = \alpha_1 A Y_1 + \alpha_2 A Y_2 = A(\alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2).$$

Dacă notăm cu *S* mulţimea soluţiilor sistemului omogen (2) din Propoziţia 7.5.1, rezultă că *S* este un spaţiu vectorial real.

Definiția 7.5.1 *Fie* $Y = \begin{pmatrix} y_{11} \\ \vdots \\ y_{n1} \end{pmatrix}, \ldots, Y_n = \begin{pmatrix} y_{1n} \\ \vdots \\ y_{nn} \end{pmatrix}$ *n-soluții particulare ale sistemului omogen* (*2*). *Se numește wronskianul acestor soluții, următorul determinant:*

$$W(x) = W\left[Y_1, \ldots, Y_n\right](x) = \begin{vmatrix} y_{11}(x) & \ldots & y_{1n}(x) \\ \hline y_{n1}(x) & \ldots & y_{nn}(x) \end{vmatrix}, \ x \in I .$$

Propoziția 7.5.2 *Dacă* $Y_1, \ldots, Y_n$ *sunt n-soluții particulare ale sistemului* (2)*, liniar dependente pe I, atunci* $W(x) = 0, \ \forall \ x \in I$.

Demonstrație. Prin ipoteză, există $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, nu toate nule, astfel încât: $\alpha_1 Y_1(x) + \ldots + \alpha_n Y_n(x) = 0$, $\forall \ x \in I$, relație echivalentă cu:

$$\begin{cases} \alpha_1 y_{11}(x) + \ldots + \alpha_n y_{1n}(x) = 0 \\ \text{-------------------} \\ \alpha_1 y_{n1}(x) + \ldots + \alpha_n y_{nn}(x) = 0 \end{cases}, \ \forall \ x \in I \tag{3}$$

Deoarece (3) este un sistem (algebric) liniar și omogen, care admite soluție nebanală, rezultă că determinantul coeficienților este zero. Dar, determinantul coeficienților este chiar wronskianul soluțiilor $Y_1, \ldots, Y_n$.

Așadar, $W\left(Y_1, \ldots, Y_n\right)(x) = 0$, $\forall \ x \in I$.

Teorema 7.5.1 (Liouville)

Fie $Y_1, \ldots, Y_n$, *n-soluții particulare ale sistemului omogen* (2) *și fie* $x_0 \in I$ *oarecare fixat. Atunci,* $\forall \ x \in I$ *avem:*

$$W(x) = W\left(x_0\right) e^{\int_{x_0}^{x} \left[a_{11}(t) + \ldots + a_{nn}(t)\right] \mathrm{d}t} \tag{4}$$

Demonstrație.

Pentru simplificarea scrierii, considerăm cazul particular n = 2. Fie deci $Y_1 = \begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{21} \end{pmatrix}$ și $y_2 = \begin{pmatrix} y_{12} \\ y_{22} \end{pmatrix}$ soluții particulare pentru (2). Wronskianul acestor soluții este: $W(x) = \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{vmatrix}$, $\ x \in I$.

Deoarece Y_1 și Y_2 sunt soluții pentru sistemul (2) avem:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_{11}}{dx} = a_{11}\, y_{11} + a_{12}\, y_{21} \\ \dfrac{dy_{21}}{dx} = a_{21}\, y_{11} + a_{22}\, y_{21} \end{cases} \quad \text{și} \quad \begin{cases} \dfrac{dy_{12}}{dx} = a_{11}\, y_{12} + a_{12}\, y_{22} \\ \dfrac{dy_{22}}{dx} = a_{21}\, y_{12} + a_{22}\, y_{22} \end{cases} \tag{5}$$

Ținând seama de modul de derivare al unui determinant, de identitățile (5) și de proprietățile determinanților, rezultă:

$$\frac{dW}{dx}=\begin{vmatrix}\frac{dy_{11}}{dx} & \frac{dy_{12}}{dx}\\ y_{21} & y_{22}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}y_{11} & y_{12}\\ \frac{dy_{21}}{dx} & \frac{dy_{22}}{dx}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11}y_{11}+a_{12}y_{21} & a_{11}y_{12}+a_{12}y_{22}\\ y_{21} & y_{22}\end{vmatrix}+$$

$$+\begin{vmatrix}y_{11} & y_{12}\\ a_{11}y_{11}+a_{22}y_{21} & a_{21}y_{12}+a_{22}y_{22}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11}y_{11} & a_{11}y_{12}\\ y_{21} & y_{22}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}y_{11} & y_{12}\\ a_{22}y_{21} & a_{22}y_{22}\end{vmatrix}=$$

$$=\left(a_{11}+a_{22}\right)\begin{vmatrix}y_{11} & y_{12}\\ y_{21} & y_{22}\end{vmatrix}.$$

Așadar, avem

$$\frac{dW}{dx}=\left[a_{11}(x)+a_{22}(x)\right]W(x),\quad x\in I \tag{6}$$

Observăm că (6) este o ecuație diferențială liniară și omogenă de ordinul întâi. Soluția sa generală este: $W(x)=C\cdot e^{\int_{x_0}^{x}[a_{11}(t)+a_{22}(t)]\mathrm{d}t}$, $x\in I$, unde $C\in$ P este o constantă arbitrară. Deoarece $W\left(x_0\right)=C$, rezultă:

$$W(x)=W\left(x_0\right)e^{\int_{x_0}^{x}[a_{11}(t)+a_{22}(t)]\mathrm{d}t},\quad x\in I.$$

Definiția 7.5.2 *Se numește sistem fundamental de soluții ale sistemului omogen* (2)*, orice set de n soluții particulare ale acestui sistem,* $Y_1,\dots,Y_n$*, cu proprietatea că există* $x_0\in I$*, astfel încât* $W\left[Y_1,\dots,Y_n\right]\left(x_0\right)\neq 0$.

Corolarul 7.5.1 *Dacă* $Y_1,\dots,Y_n$ *este un sistem fundamental de soluții pentru sistemul omogen* (2)*, atunci* $W\left[Y_1,\dots,Y_n\right](x)\neq 0$, $\forall\ x\in I$.

Afirmația rezultă din Teorema Liouville.

Observația 7.5.2 Din Propoziția 7.5.2 și Corolarul 7.5.1, rezultă că dacă $Y_1,\dots,Y_n$ este un sistem fundamental de soluții pentru sistemul omogen (2), atunci $Y_1,\dots,Y_n$ sunt liniar independente pe intervalul *I*.

Teorema 7.5.2 *Dacă* $Y_1,\dots,Y_n$ *este un sistem fundamental de soluții pentru sistemul omogen* (2)*, atunci oricare ar fi Y soluție a acestui sistem, există* $C_1,\dots,C_n\in$ *astfel încât* $Y=C_1Y_1+\dots+C_nY_n$.

Demonstrație.

Fie $Y_1=\begin{pmatrix}y_{11}\\ \vdots\\ y_{n1}\end{pmatrix},\dots,\ Y_n=\begin{pmatrix}y_{1n}\\ \vdots\\ y_{nn}\end{pmatrix},\ Y=\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$ și $x_0\in I$ oarecare fixat.

Considerăm următorul sistem

$$\begin{cases} \alpha_1 y_{11}(x_0) + \ldots + \alpha_n y_{1n}(x_0) = y_1(x_0) \\ \text{-------------------------} \\ \alpha_1 y_{n1}(x_0) + \ldots + \alpha_n y_{nn}(x_0) = y_n(x_0) \end{cases} \tag{7}$$

Deoarece determinantul coeficienților sistemului (7) este chiar wronskianul soluțiilor $Y_1, \ldots, Y_n$ şi acesta este diferit de zero prin ipoteză, rezultă că sistemul (7) admite soluție unică. Fie $C_1, C_2, \ldots, C_n$ soluția unică a sistemului (7) şi fie $Z = C_1Y_1 + \ldots + C_nY_n$. Din Propoziția 7.5.1 rezultă că Z este soluție pentru sistemul omogen (2). Pe de altă parte, observăm că $Z(x_0) = Y(x_0)$. Din Teorema de existență şi unicitate rezultă că $Z = Y$, deci $Y = C_1Y_1 + \ldots + C_nY_n$.

Observația 7.5.3 Din Teorema 7.5.2 rezultă că dacă cunoaştem *n*-soluții particulare ale sistemului omogen (2), $Y_1, \ldots, Y_n$ şi acestea formează un sistem fundamental de soluții, atunci soluția generală a sistemului omogen este:

$$Y = C_1Y_1 + \ldots + C_nY_n \tag{8}$$

unde $C_1, \ldots, C_n$ sunt constante arbitrare.

În continuare, prezentăm metoda variației constantelor a lui Lagrange pentru rezolvarea sistemelor neomogene. Pentru simplificarea scrierii considerăm cazul particular $n = 2$. Fie deci următorul sistem neomogen:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = a_{11}\,y_1 + a_{12}\,y_2 + b_1 \\ \dfrac{dy_2}{dx} = a_{21}\,y_1 + a_{22}\,y_2 + b_2 \end{cases} \tag{9}$$

Fie de asemenea $Y_1 = \begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{21} \end{pmatrix}$ şi $Y_2 = \begin{pmatrix} y_{12} \\ y_{22} \end{pmatrix}$ un sistem fundamental de soluții pentru sistemul omogen asociat. Atunci avem:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_{11}}{dx} = a_{11}\,y_{11} + a_{12}\,y_{21} \\ \dfrac{dy_{21}}{dx} = a_{21}\,y_{11} + a_{22}\,y_{21} \end{cases} \quad \text{şi} \quad \begin{cases} \dfrac{dy_{12}}{dx} = a_{11}\,y_{12} + a_{12}\,y_{22} \\ \dfrac{dy_{22}}{dx} = a_{21}\,y_{12} + a_{22}\,y_{22} \end{cases} \tag{10}$$

Din Observația 7.5.3 deducem că soluția generală a sistemului omogen este

$$\begin{cases} y_{10} = C_1\,y_{11} + C_2\,y_{12} \\ y_{20} = C_1\,y_{21} + C_2\,y_{22}\ , \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{11}$$

Căutăm soluția sistemului neomogen (9) de forma

$$\begin{cases} y_1 = \varphi_1(x)\,y_{11} + \varphi_2(x)\,y_{12} \\ y_2 = \varphi_1(x)\,y_{21} + \varphi_2(x)\,y_{22} \end{cases} \tag{12}$$

Punând condiția ca (12) să verifice sistemul (9) obținem:

$$\begin{cases} \varphi_1' y_{11} + \varphi_2' y_{12} + \varphi_1 y_{11}' + \varphi_2 y_{12}' = a_{11}(\varphi_1 y_{11} + \varphi_2 y_{12}) + a_{12}(\varphi_1 y_{21} + \varphi_2 y_{22}) + b_1 \\ \varphi_1' y_{21} + \varphi_2' y_{22} + \varphi_1 y_{21}' + \varphi_2 y_{22}' = a_{12}(\varphi_1 y_{11} + \varphi_2 y_{12}) + a_{22}(\varphi_1 y_{21} + \varphi_2 y_{22}) + b_2 \end{cases}$$

Ţinând seama de identităţile (10) rezultă

$$\begin{cases} \varphi_1'(x) y_{11} + \varphi_2'(x) y_{12} = b_1(x) \\ \varphi_1'(x) y_{21} + \varphi_2'(x) y_{22} = b_2(x), \qquad x \in I. \end{cases} \tag{13}$$

Deoarece determinantul coeficienţilor este chiar wronkianul soluţiei Y_1, Y_2 şi acesta este diferit de zero pe *I*, rezultă că sistemul (13) are soluţie unică.

Fie $\varphi_1'(x) = g_1(x)$ şi $\varphi_2'(x) = g_2(x)$, $x \in I$, soluţia unică a sistemului (13). Integrând, obţinem:

$$\begin{cases} \varphi_1(x) = \int g_1(x)dx + C_1 \\ \varphi_2(x) = \int g_2(x)dx + C_2 \end{cases} \tag{14}$$

În sfârşit, înlocuind (14) în (12) obţinem soluţia generală a sistemului neomogen (9), anume:

$$\begin{cases} y_1 = C_1 y_{11} + C_2 y_{12} + y_{11} \int g_1(x)dx + y_{12} \int g_2(x)dx \\ y_2 = C_1 y_{21} + C_2 y_{22} + y_{21} \int g_1(x)dx + y_{22} \int g_2(x)dx \end{cases} \tag{15}$$

Dacă notăm cu:

$\begin{cases} y_{1p} = y_{11} \int g_1(x)dx + y_{12} \int g_2(x)dx \\ y_{2p} = y_{21} \int g_1(x)dx + y_{22} \int g_2(x)dx \end{cases}$ şi cu $Y_0 = \begin{pmatrix} y_{10} \\ y_{20} \end{pmatrix}$, $Y_p = \begin{pmatrix} y_{1p} \\ y_{2p} \end{pmatrix}$ atunci soluţia generală a sistemului neomogen (9) este de forma

$$Y = Y_0 + Y_p \tag{15'}$$

unde Y_0 este soluţia generală a sistemului omogen, iar Y_p este o soluţie particulară a sistemului neomogen.

Observaţia 7.5.4 În principiu, rezolvarea sistemului neomogen este întotdeauna posibilă dacă se cunoaşte un sistem fundamental de soluţii pentru sistemul omogen. Într-adevăr, fie $Y_1, \ldots, Y_n$ un sistem fundamental de soluţii pentru sistemul omogen. Atunci

$$Y_0 = C_1 Y_1 + \ldots + C_n Y_n \tag{16}$$

este soluţia generală a sistemului omogen.

Căutăm soluţia generală a sistemului neomogen de forma:

$$Y = \varphi_1(x) Y_1 + \ldots + \varphi_n(x) Y_n \tag{17}$$

Funcţiile $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ se determină astfel:

Se consideră sistemul:

$$\begin{cases} \varphi_1'(x)y_{11}+\ldots+\varphi_n'(x)y_{1n}=b_1(x) \\ -------------------- \\ \varphi_1'(x)y_{n1}+\ldots+\varphi_n'(x)y_{nn}=b_n(x) \end{cases} \tag{18}$$

Sistemul (18) are soluție unică. Fie $\varphi_1'(x)=g_1(x),\ldots,\varphi_n'(x)=g_n(x)$ soluția acestui sistem. Integrând, găsim:

$$\varphi_1(x)=\int g_1(x)\,dx+C_1,\ldots,\varphi_n(x)=\int g_n(x)\,dx+C_n \tag{19}$$

Înlocuind (19) în (17) se obține soluția generală a sistemului neomogen.

Din păcate, pentru sisteme cu coeficienți variabili este dificil de aflat un sistem fundamental de soluții pentru sistemul omogen. Acest lucru este posibil în cazul sistemelor cu coeficienți constanți. În continuare vom studia astfel de sisteme. Fie sistemul:

$$\frac{dY}{dx}=AY \tag{20}$$

unde $A=\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ --- & --- & --- \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$ este o matrice constantă (a_{ij} sunt constante reale).

Reamintim că, prin definiție, derivata unei matrice ale cărei elemente sunt funcții derivabile, este matricea formată cu derivatele acestor elemente. Aşadar,

$$\begin{pmatrix} f_{11}(x) & \ldots & f_{1n}(x) \\ --- & --- & --- \\ f_{n1}(x) & \ldots & f_{nn}(x) \end{pmatrix}' \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} f'_{11}(x) & \ldots & f'_{1n}(x) \\ --- & --- & --- \\ f'_{n1}(x) & \ldots & f'_{nn}(x) \end{pmatrix},\quad x\in I,\ \text{dacă}\ f_{ij}:I\to\mathbb{R}\ \text{sunt}$$

derivabile, $\forall\ i,j=\overline{1,n}$.

În particular $(Ax)'=A$.

Prin inducție matematică se demonstrează imediat că

$$\left[(Ax)^k\right]'=k\cdot A(Ax)^{k-1},\ k\ge 1,\ k\in\mathbb{N}.$$

Cum $e^{Ax}=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(Ax)^k}{k!}$, $x\in\mathbb{R}$ şi convergenta este uniformă (Vezi [10], 3.6.1), rezultă că $\left(e^{Ax}\right)'=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{k\cdot A\cdot(Ax)^{k-1}}{k!}=A\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(Ax)^{k-1}}{(k-1)!}=Ae^{Ax}$. Aşadar, avem

$$\left(e^{Ax}\right)'=Ae^{Ax},\ x\in\mathbb{R}. \tag{21}$$

Teorema 7.5.2 *Soluția generală a sistemului* (20) *este:*

$$Y=e^{Ax}C \tag{22}$$

unde $C=\begin{pmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix}$ este un vector constant oarecare ($C_i\in\mathbb{R}$, $i=\overline{1,n}$).

Demonstrație.

Din (21) rezultă imediat că $\frac{dY}{dx} = Ae^{Ax}C$. Înlocuind în (20) obținem identitatea $Ae^{Ax}C = Ae^{Ax} \cdot C$, deci (22) este soluție pentru (20).

Exemplul 7.5.1 Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = -2y_1 + y_2 + 2x + 3 \\ \frac{dy_2}{dx} = -4y_1 + 3y_2 + 4x - 1 \end{cases} \tag{23}$$

Sistemul omogen asociat este:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = -2y_1 + y_2 \\ \frac{dy_2}{dx} = -4y_1 + 3y_2 \end{cases} \tag{24}$$

Conform Teoremei 7.5.2, soluția generală a sistemului (24) este $Y = e^{Ax}C$, unde $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$ și $C = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$.

Matricea e^{Ax} se calculează ușor dacă matricea A se poate aduce la forma diagonală. În cazul nostru acest lucru este posibil. Într-adevăr, valorile proprii ale matricei A sunt $\lambda_1 = 2$; $\lambda_2 = -1$.

Cum $\lambda_1 \neq \lambda_2$, există o bază formată din vectori proprii. O astfel de bază este $v_1 = (1,4)$, $v_2 = (1,1)$.

Matricea de trecere de la baza canonică la această nouă bază este:
$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, iar $T^{-1} = \begin{pmatrix} -1/3 & 1/3 \\ 4/3 & -1/3 \end{pmatrix}$. În raport cu noua bază, matricea A are forma diagonală $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Din proprietățile funcției $A \to e^A$ (Vezi (10), 3.6.2) rezultă că

$$e^{Dx} = \begin{pmatrix} e^{2x} & 0 \\ 0 & e^{-x} \end{pmatrix} \text{ și } e^{Ax} = T \cdot e^{Dx}T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{2x} & 0 \\ 0 & e^{-x} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1/3 & 1/3 \\ 4/3 & -1/3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}e^{2x} + \frac{4}{3}e^{-x} & \frac{1}{3}e^{2x} - \frac{1}{3}e^{-x} \\ -\frac{4}{3}e^{2x} + \frac{4}{3}e^{-x} & \frac{4}{3}e^{2x} - \frac{1}{3}e^{-x} \end{pmatrix}.$$

Soluția generală a sistemului omogen (24) este:

$$Y_0=\begin{pmatrix} y_{10} \\ y_{20} \end{pmatrix}=e^{Ax}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{C_1}{3}e^{2x}+\frac{4}{3}C_1e^{-x}+\frac{1}{3}C_2e^{2x}-\frac{1}{3}C_2e^{-x} \\ -\frac{4}{3}C_1e^{2x}+\frac{4}{3}C_1e^{-x}+\frac{4}{3}C_2e^{2x}-\frac{1}{3}C_2e^{-x} \end{pmatrix}.$$

Dacă introducem notațiile $K_1=\dfrac{C_2-C_1}{3}$, $K_2=\dfrac{4C_1-C_2}{3}$, rezultă

$$\begin{cases} y_{10}=K_1e^{2x}+K_2e^{-x} \\ y_{20}=4K_1e^{2x}+K_2e^{-x} \end{cases} \tag{25}$$

((25) reprezintă soluția generală a sistemului omogen (24)).

Pentru a găsi soluția sistemului neomogen, folosim metoda variației constantelor a lui Lagrange.

Căutăm soluția sistemului neomogen de forma:

$$\begin{cases} y_1=\varphi_1(x)\,e^{2x}+\varphi_2(x)\,e^{-x} \\ y_2=4\varphi_1(x)\,e^{2x}+\varphi_2(x)e^{-x} \end{cases} \tag{26}$$

Funcțiile φ_1' şi φ_2' verifică sistemul:

$$\begin{cases} \varphi_1'(x)\,e^{2x}+\varphi_2'(x)\,e^{-x}=2x+3 \\ 4\varphi_1'(x)\,e^{2x}+\varphi_2'(x)e^{-x}=4x-1. \end{cases}$$

Rezolvând acest sistem obținem: $\varphi_1'(x)=\dfrac{2x-4}{3}e^{-2x}$, $\varphi_2'(x)=\dfrac{4x+13}{3}e^{x}$ şi mai departe:

$$\varphi_1(x)=\frac{-2x+3}{6}e^{-2x}+C_1,\ \varphi_2(x)=\frac{4x+9}{3}e^{x}+C_2 \tag{27}$$

Înlocuind (27) în (26), rezultă soluția generală a sistemului (23):

$$\begin{cases} y_1=C_1\,e^{2x}+C_2\,e^{-x}+x+\frac{7}{2} \\ y_2=4C_1\,e^{2x}+C_2e^{-x}+5\,. \end{cases}$$

Observația 7.5.5 La acelaşi rezultat se ajunge şi dacă se foloseşte metoda eliminării, care constă în următoarele:

Se derivează una din ecuațiile sistemului (23), de exemplu prima şi se elimină y_2 şi y_2' din ecuațiile sistemului şi din ecuația derivată, obținându-se în final o ecuație diferențială liniară de ordinul doi, cu coeficienți constanți în necunoscuta y_1. Să reluăm, folosind metoda eliminării, rezolvarea sistemului (23):

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx}=-2\,y_1+y_2+2x+3 \\ \dfrac{dy_2}{dx}=-4\,y_1+3y_2+4x-1\,. \end{cases}$$

Derivând prima ecuaţie obţinem:

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} = -2\frac{d\,y_1}{dx} + \frac{dy_2}{dx} + 2 \tag{28}$$

Din prima ecuaţie a sistemului deducem că

$$y_2 = \frac{dy_1}{dx} + 2y_1 - 2x - 3 \tag{29}$$

Ţinând seama de a doua ecuaţie a sistemului rezultă:

$$\frac{dy_2}{dx} = -4y_1 + 3\left(\frac{dy_1}{dx} + 2y_1 - 2x - 3\right) + 4x - 1 \quad \text{şi mai departe}$$

$$\frac{dy_2}{dx} = 2y_1 + 3\frac{dy_1}{dx} - 2x - 10\,. \tag{30}$$

Înlocuind (30) în (28), obţinem următoarea ecuaţie de ordinul doi:

$$y_1'' - y_1' - 2y_1 = -2x - 8 \tag{31}$$

Ecuaţia omogenă asociată este $y_1'' - y_1' - 2y_1 = 0$, iar ecuaţia sa caracteristică este $r^2 - r - 2 = 0$. Rădăcinile ecuaţiei caracteristice sunt $r_1 = 2$, $r_2 = -1$, deci soluţia generală a ecuaţiei omogene este $y_{10} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}$.

Căutăm o soluţie a ecuaţiei neomogene (31) de forma membrului drept (pentru că nu avem rezonanţă)

$$y_{1p} = ax + b \tag{32}$$

Punând condiţia ca (32) să verifice ecuaţia (31), obţinem $a = 1$; $b = \frac{7}{2}$.

Aşadar, soluţia generală a ecuaţiei (31) este

$$y_1 = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x} + x + \frac{7}{2} \tag{33}$$

Înlocuind (33) în (29) rezultă că: $y_2 = 4C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x} + 5$.

Aşadar, soluţia sistemului (23) este:

$$\begin{cases} y_1 = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x} + x + \frac{7}{2} \\ y_2 = 4C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x} + 5\,, \end{cases}$$

aceeaşi soluţie ca şi cea obţinută cu metoda matricială.

Observaţia 7.5.6 Metoda matricială pentru rezolvarea sistemelor liniare omogene cu coeficienţi constanţi se aplică şi în cazul când matricea A nu se poate diagonaliza, folosindu-se în acest caz pentru calculul matricei e^{Ax} forma canonică Jordan a lui A. Pentru detalii vezi [13].

7.6. SISTEME AUTONOME. ECUAȚII CU DERIVATE PARȚIALE DE ORDINUL ÎNTÂI

Prin sistem de ecuații diferențiale autonome, se înțelege un sistem de forma:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1\left(y_1,\ldots,y_n\right) \\ \text{-------------} \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n\left(y_1,\ldots,y_n\right) \end{cases} \tag{1}$$

unde f_i sunt funcții continue pe o mulțime deschisă $D \subset \mathbb{R}^n$. Se observă că în cazul sistemelor autonome, variabila independentă x nu apare printre argumentele funcțiilor f_i.

Definiția 7.6.1 *O funcție* $\psi : D \to \mathbb{R}$ *se numește integrală primă pentru sistemul* (1) *dacă:*

a) $\psi \in C^1(D)$;

b) ψ *nu este o funcție constantă pe* D;

c) *Pentru orice soluție* $y_1 = \varphi_1(x),\ldots, y_n = \varphi_n(x)$, $x \in I$ *a sistemului* (1), *există o constantă* $c \in \mathbb{R}$, *care depinde de această soluție, astfel încât* $\psi\left[\varphi_1(t),\ldots,\varphi_n(t)\right] = c$, $\forall\ t \in I$.

Exemplul 7.6.1 Fie sistemul autonom

$$\frac{dy_1}{dx} = y_2,\ \ \frac{dy_2}{dx} = -y_1,\ \ \left(y_1, y_2\right) \in \mathbb{R}^2. \tag{2}$$

Folosind metoda eliminării se obține imediat soluția generală a sistemului (2), anume:

$$\begin{cases} y_1 = C_1 \cos x + C_2 \sin x \\ y_2 = -C_1 \sin x + C_2 \cos x \end{cases} \tag{3}$$

Observăm că funcția $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definită prin $\psi\left(y_1, y_2\right) = y_1^2 + y_2^2$, $\forall\ \left(y_1, y_2\right) \in \mathbb{R}^2$ este o integrală primă pentru sistemul (2). Într-adevăr,

$$\psi\left[C_1 \cos x + C_2 \sin x,\ -C_1 \sin x + C_2 \cos x\right] = C_1^2 + C_2^2 = \text{constant}.$$

Teorema 7.6.1 *Dacă* f_i *sunt continue și lipschitziene pe D, atunci o funcție* $\psi \in C^1(D)$ *este integrală primă pentru sistemul* (1) *dacă și numai dacă:*

$$f_1\left(y\right)\frac{\partial \psi}{\partial y_1}\left(y\right) + \ldots + f_n\left(y\right)\frac{\partial \psi}{\partial y_n}\left(y\right) = 0,\ \ \forall\ \ y = \left(y_1,\ldots,y_n\right) \in D. \tag{4}$$

Demonstrație

Necesitatea. Fie $x_0 \in \mathbb{R}$ şi $y_0 = (y_{10}, \ldots, y_{n0}) \in D$ oarecare fixat.

Din Teorema de existență şi unicitate pentru sisteme, rezultă că există o soluție unică a sistemului (1), $y_1 = \varphi_1(x), \ldots, y_n = \varphi_n(x)$, $x \in I$, cu proprietatea: $\varphi_1(x_0) = y_{10}, \ldots, \varphi_n(x_0) = y_{n0}$.

Dacă $\psi : D \to \mathbb{R}$ este integrală primă pentru (1), atunci

$$\psi\left[\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)\right] = C, \ \forall \ x \in I. \tag{5}$$

Derivând (5) rezultă:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y_1}\left[\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)\right] \cdot \frac{d\varphi_1(x)}{dx} + \ldots + \frac{\partial \psi}{\partial y_n}\left[\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)\right] \cdot \frac{d\varphi_n(x)}{dx} = 0, \ \forall \ x \in I.$$

Ținând seama că $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ verifică sistemul (1), mai departe avem:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y_1}\left[\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)\right] \cdot f_1\left[\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)\right] + \ldots$$

$$+ \frac{\partial \psi}{\partial y_n}\left[\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)\right] \cdot f_n\left[\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)\right] = 0, \ \forall \ x \in I.$$

În particular, pentru $x = x_0$ rezultă $\frac{\partial \psi}{\partial y_1}(y_0) f_1(y_0) + \ldots + \frac{\partial \psi}{\partial y_n}(y_0) f_n(y_0) = 0$. Cum $y_0 \in D$ a fost arbitrar, rezultă că ψ verifică (4) pe D.

Suficiența. Fie $y_1 = \varphi_1(x), \ldots, y_n = \varphi_n(x)$, $x \in I$ o soluție oarecare a sistemului (1). Atunci $(\varphi_1(x), \ldots, y_n = \varphi_n(x)) \in D$, $\forall \ x \in I$ şi

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = f_1\left[\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)\right], \ldots, \frac{\partial \varphi_n}{\partial x} = f_n\left[\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)\right], \ \forall \ x \in I.$$

Dacă $\psi \in C^1(D)$ verifică (4) pentru $\forall \ y \in D$, atunci avem:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y_1}\left[\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)\right] \cdot \frac{d\varphi_1}{dx} + \ldots + \frac{\partial \psi}{\partial y_n}\left[\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)\right] \cdot \frac{d\varphi_n}{dx} = 0, \ \forall \ x \in I,$$

relație echivalentă cu $\frac{d}{dx}\psi\left[\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)\right] = 0$, $\forall \ x \in I$,

de unde rezultă că $\psi\left[\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)\right] = c$, $\forall \ x \in I$.

Aşadar, ψ este integrală primă pentru sistemul (1).

Teorema 7.6.2 *Presupunem că* $f_i : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *sunt continue, lipschitziene şi* $\sum_{i=1}^{n} f_i^2(y) \neq 0$, $\forall \ y \in D$.

Atunci, sistemul (1) admite cel mult (n – 1) integrale prime independente.

Demonstrație. Presupunem $\psi_1,\psi_2,\dots,\psi_n$ sunt integrale prime pentru sistemul (1). Din Teorema 7.6.1 rezultă:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\psi_1}{\partial y_1}(y)f_1(y)+\dots+\dfrac{\partial\psi_1}{\partial y_n}(y)f_n(y)=0 \\ ------------------------- \\ \dfrac{\partial\psi_n}{\partial y_1}(y)f_1(y)+\dots+\dfrac{\partial\psi_n}{\partial y_n}(y)f_n(y)=0 \end{cases},\ \forall\ y\in D. \tag{6}$$

Am obținut un sistem (algebric) liniar și omogen în necunoscutele $f_1(y),f_2(y),\dots,f_n(y)$. Deoarece sistemul admite soluții nebanale, rezultă că determinantul coeficienților este zero. Așadar avem:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial\psi_1}{\partial y_1}(y) & \dots & \dfrac{\partial\psi_1}{\partial y_n}(y) \\ --- & --- & --- \\ \dfrac{\partial\psi_n}{\partial y_1}(y) & \dots & \dfrac{\partial\psi_n}{\partial y_n}(y) \end{vmatrix}=0,\ \forall\ y\in D.$$

Din Teorema 4.11.2 din [10] rezultă că Ψ_1, ..., Ψ_n sunt dependente funcțional pe D.

Observația 7.6.1 În condițiile Teoremei 7.6.2 se poate arăta că sistemul (1) admite (n – 1) integrale prime independente funcțional pe D. Ținând seama și de Teorema 7.6.2, rezultă că sistemul (1) admite (n – 1) integrale prime independente și (n – 1) este numărul maxim de integrale prime independente ale sistemului (1).

În continuarea acestui paragraf vom presupune că funcțiile f_i satisfac condițiile din Teorema 7.6.2.

Sistemul (1) se poate pune sub forma simetrică echivalentă:

$$\frac{y_1'}{f_1(y_1,\dots,y_n)}=\frac{y_2'}{f_2(y_1,\dots,y_n)}=\dots=\frac{y_n'}{f_n(y_1,\dots,y_n)}=1. \tag{7}$$

Prin combinație integrabilă a sistemului (6), se înțelege o ecuație diferențială, consecință a sistemului (7), ușor de integrat. Metoda combinațiilor integrabile este folosită pentru aflarea integralelor prime ale sistemului.

Exemplul 7.6.2 Să se afle două integrale prime independente ale sistemului:

$$\frac{y_1'}{y_2-y_3}=\frac{y_2'}{y_3-y_1}=\frac{y_3'}{y_1-y_2} \tag{8}$$

Din proprietățile unui șir de rapoarte egale deducem: $\dfrac{y_1'+y_2'}{y_2-y_1}=\dfrac{y_3'}{y_1-y_2}$.

După simplificare rezultă: $\dfrac{d}{dx}(y_1+y_2+y_3)=0$, deci $y_1+y_2+y_3=C_1$.

Funcția $\psi_1(y_1,y_2,y_3)=y_1+y_2+y_3$ este integrală primă pentru (8). Pentru a obține o altă integrală primă facem următoarea combinație integrală:

Amplificăm succesiv primul raport cu y_1, al doilea cu y_2, al treilea cu y_3 şi folosind proprietățile rapoartelor egale obținem: $\dfrac{y_1y_1' + y_2y_2'}{y_2y_3 - y_1y_3} = \dfrac{y_3y_3'}{y_1y_3 - y_2y_3}$.

După ce simplificăm obținem $\dfrac{d}{dx}\left(y_1y_1' + y_2y_2' + y_3y_3'\right) = 0$, deci $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = C_2$.

Funcția $\psi_1\left(y_1, y_2, y_3\right) = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$ este integrală primă pentru sistemul (8).

Prin ecuație cu derivate parțiale de ordinul întâi liniară se înțelege o ecuație de forma:

$$P_1\left(x_1,\ldots,x_n\right)\frac{\partial u}{\partial x_1} + \ldots + P_n\left(x_1,\ldots,x_n\right)\frac{\partial u}{\partial x_n} = 0. \tag{9}$$

unde P_i sunt funcții continue şi lipschitziene pe o mulțime deschisă $D \subset \mathbb{R}^n$ şi $\sum_{i=1}^{n} P_i^2(x) \neq 0$, $\forall\, x = \left(x_1,\ldots,x_n\right) \in D$. Funcția $u = u\left(x_1,\ldots,x_n\right)$ este funcția necunoscută.

Definiția 7.6.2 *Se numeşte soluție a ecuației* (9) *orice funcție* φ *definită pe o submulțime deschisă* $D_1 \subset D$, $\varphi \in C^1\left(D_1\right)$ *cu proprietatea:*

$$P_1(x)\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \ldots + P_n(x)\frac{\partial \varphi}{\partial x_n}(x) = 0,\ \forall\ x = \left(x_1,\ldots,x_n\right) \in D_1.$$

Ecuației cu derivate parțiale (9) i se asociază sistemul simetric următor:

$$\frac{x_1'}{P_1(x)} = \frac{x_2'}{P_2(x)} = \ldots = \frac{x_n'}{P_n(x)} = 1. \tag{10}$$

Observația 7.6.2 Din Teorema 7.6.2 rezultă că orice integrală primă a sistemului (10) este soluție pentru ecuația cu derivate parțiale (9). Mai general, are loc următoarea teoremă:

Teorema 7.6.3 *Fie* $\psi_1,\ldots,\psi_k$ *integrale prime pentru sistemul* (10) *şi fie* Φ *o funcție de clasă* C^1 *definită pe mulțimea deschisă* $\Omega \subset \mathbb{R}^k$. *Atunci funcția* $u(x) = \Phi\left[\psi_1(x),\ldots,\psi_k(x)\right]$, $\forall\ x \in D_1 \subset D$, *este soluție pentru ecuația cu derivate parțiale* (9).

(Se subînțelege că se presupune că $\left(\psi_1(x),\ldots,\psi_k(x)\right) \in \Omega$, $\forall\ x \in D_1$).

Demonstrație. Pentru orice $x \in D_1$ avem:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x_1} = \dfrac{\partial \phi}{\partial y_1}(y)\cdot\dfrac{\partial \psi_1}{\partial x_1}(x)+\ldots+\dfrac{\partial \phi}{\partial y_k}(y)\cdot\dfrac{\partial \psi_k}{\partial x_1}(x) \\ -------------------------------- \\ \dfrac{\partial u}{\partial x_n} = \dfrac{\partial \phi}{\partial y_1}(y)\cdot\dfrac{\partial \psi_1}{\partial x_n}(x)+\ldots+\dfrac{\partial \phi}{\partial y_k}(y)\cdot\dfrac{\partial \psi_k}{\partial x_n}(x) \quad , \quad y=\left(\psi_1(x),\ldots,\psi_k(x)\right)\in\Omega \end{cases} \tag{11}$$

Ținând seama de (11) și de Observația 7.6.2 deducem:

$$\sum_{i=1}^{n} P_i(x)\cdot\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{\partial \phi}{\partial y_1}(y)\cdot\left[P_1(x)\cdot\frac{\partial \psi_1}{\partial x_1}(x)+\ldots+P_n(x)\cdot\frac{\partial \psi_1}{\partial x_n}(x)\right]+\ldots$$
$$+\frac{\partial \phi}{\partial y_k}(y)\cdot\left[P_1(x)\cdot\frac{\partial \psi_k}{\partial x_1}(x)+\ldots+P_n(x)\cdot\frac{\partial \psi_k}{\partial x_n}(x)\right]=0\ ,\ \forall\ \ x\in D_1 .$$

Așadar, $u=\Phi\left[\psi_1(x),\ldots,\psi_k(x)\right]$, $x\in D_1$ este soluție a ecuației (9), $\forall\ k\in\mathbb{N}^*$.

Următoarea teoremă ne arată că orice soluție a ecuației (9) este de această formă.

Teorema 7.6.4 *Fie* $\psi_1,\ldots,\psi_{n-1}$, $(n-1)$ *integrale prime independente ale sistemului* (10) *și fie* $u=\varphi(x_1,\ldots,x_n)$, $x=(x_1,\ldots,x_n)\in D_1\subset D$ *o soluție oarecare a ecuației* (9). *Atunci există o funcție* Φ *de clasă* C^1 *pe o mulțime deschisă* $\Omega\subset\mathbb{R}^{n-1}$ *astfel încât* $\left(\psi_1(x),\ldots,\psi_{n-1}(x)\right)\in\Omega$, $\forall\ \ x\in D_1$ *și*
$\varphi(x)=\Phi\left[\psi_1(x),\ldots,\psi_{n-1}(x)\right]$, $\forall\ x\in D_1$.

Demonstrație. Deoarece $\varphi,\psi_1,\ldots,\psi_{n-1}$ sunt soluții pentru (9), rezultă:

$$\begin{cases} P_1(x)\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x)+\ldots+P_n(x)\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_n}(x)=0 \\ P_1(x)\dfrac{\partial \psi_1}{\partial x_1}(x)+\ldots+P_n(x)\dfrac{\partial \psi_1}{\partial x_n}(x)=0 \\ ---------------------------- \\ P_1(x)\dfrac{\partial \psi_{n-1}}{\partial x_1}(x)+\ldots+P_n(x)\dfrac{\partial \psi_{n-1}}{\partial x_n}(x)=0 \quad , \ \forall\ x\in D_1 \end{cases} \tag{12}$$

Deoarece $\sum_{i=1}^{n} P_i^2(x)\neq 0$, $\forall\ \ x\in D_1$, rezultă că sistemul liniar și omogen (12) admite soluții nebanale pentru orice $x\in D_1$, deci determinantul coeficienților este zero.

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial\varphi}{\partial x_n}(x) \\ \frac{\partial\psi_1}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial\psi_1}{\partial x_n}(x) \\ \hdashline \frac{\partial\psi_{n-1}}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial\psi_{n-1}}{\partial x_n}(x) \end{vmatrix} = 0, \quad \forall\ x \in D_1 .$$

Cum prin ipoteză funcțiile $\psi_1,\dots,\psi_{n-1}$ sunt independente funcțional, rezultă că:

$$\text{rang}\begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial\varphi}{\partial x_n}(x) \\ \frac{\partial\psi_1}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial\psi_1}{\partial x_n}(x) \\ \hdashline \frac{\partial\psi_{n-1}}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial\psi_{n-1}}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix} = n-1, \quad \forall\ x \in D_1 .$$

Din Teorema 4.11.2 din [10] rezultă că φ depinde funcțional de $\psi_1,\dots,\psi_{n-1}$ pe D_1, deci că există $\Phi \in C^1(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^{n-1}$ astfel încât $\varphi(x) = \Phi\left[\psi_1(x),\dots,\psi_{n-1}(x)\right]$, $\forall\ x \in D_1$.

Exemplul 7.6.3 Să se afle soluția generală a ecuației:

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}\cdot\frac{\partial u}{\partial z} = 0 .$$

Sistemul simetric asociat este:

$$\frac{x'}{x} = \frac{y'}{y} = \frac{z'}{\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}}, \quad xyz \neq 0.$$

Din $\frac{x'}{x} = \frac{y'}{y}$ deducem $\frac{y}{x} = C_1$, deci $\psi_1(x,y,z) = \frac{y}{x}$ este o integrală primă. Pentru a obține o a doua integrală primă procedăm astfel: amplificăm primul raport cu *x*, al doilea raport cu *y* și folosim proprietățile rapoartelor egale. Rezultă

$$\frac{xx'+yy'}{x^2+y^2} = \frac{zz'}{\sqrt{x^2+y^2}} \text{ și mai departe } \frac{xx'+yy'}{\sqrt{x^2+y^2}} = zz',$$

egalitate echivalentă cu $\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)' = \left(\frac{z^2}{2}\right)'$. Integrând rezultă $\sqrt{x^2+y^2} - \frac{z^2}{2} = C_2$, deci $\psi_2(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2} - \frac{z^2}{2}$, este integrală primă.

Soluția generală a ecuației va fi: $u(x,y,z)=\Phi\left(\dfrac{y}{x},\ \sqrt{x^2+y^2}-\dfrac{z^2}{2}\right)$, unde $\Phi\in C^1\left(\mathbb{R}^2\right)$ este o funcție arbitrară, iar $xyz\neq 0$.

Definiția 7.6.3 *Fie* $a\in\mathbb{R}$ *și* $A\subset\mathbb{R}^{n-1}$ *o mulțime deschisă cu proprietatea* $(x_1,\ldots,x_{n-1},a)\in D$, $\forall\ (x_1,\ldots,x_{n-1})\in A$. *Fie de asemenea* $g:A\to\mathbb{R}$ *o funcție de clasă* C^1. *Problema Cauchy pentru ecuația* (9) *și funcția g constă în determinarea unei soluții* $u=u(x_1,\ldots,x_n)$ *ale ecuației* (9) *care satisface următoarea condiție pe mulțimea A*:

$$u(x_1,\ldots,x_{n-1},a)=g(x_1,\ldots,x_{n-1}) \tag{13}$$

În cazul $n=2$ problema Cauchy are o interpretare geometrică simplă: să se găsească suprafața $z=z(x,y)$ [soluție a ecuației $P(x,y)\dfrac{\partial z}{\partial x}+Q(x,y)\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$] care trece prin curba $y=a$, $z=g(x)$.

Teorema 7.6.5 *Dacă există* $(n-1)$ *integrale prime independente ale sistemului simetric asociat* (10)*, atunci problema Cauchy* (9) *și* (13) *are o soluție unică* $u:D_1\to\mathbb{R}$, $D_1\subset D$.

Demonstrație.

Fie $a\in\mathbb{R}$, $g\in C^1(A)$, $A\subset\mathbb{R}^{n-1}$ deschisă cu proprietatea că $(x_1,\ldots,x_{n-1},a)\in D$, $\forall\ (x_1,\ldots,x_{n-1})\in A$.

Fie $\varphi_1,\ldots,\varphi_{n-1}$, $(n-1)$ integrale prime independente funcțional pe *D*.

Rezultă că $\dfrac{D(\varphi_1,\ldots,\varphi_{n-1})}{D(x_1,\ldots,x_{n-1})}(x_1,\ldots,x_{n-1},a)\neq 0$, $\forall\ (x_1,\ldots,x_{n-1})\in A$.

Fie $F:A\subset\mathbb{R}^{n-1}\to\mathbb{R}^{n-1}$ definită astfel:

$F(x_1,\ldots,x_{n-1})=\left(\varphi_1(x_1,\ldots,x_{n-1},a),\ldots,\varphi_{n-1}(x_1,\ldots,x_{n-1},a)\right)$, $(x_1,\ldots,x_{n-1})\in A$.

Din Teorema de inversiune locală (Teorema 4.8.2 din [10]) rezultă că $\forall\ M(x_1,\ldots,x_{n-1})\in A$, există o vecinătate deschisă A_1 a punctului *M*, $A_1\subset A$ și o vecinătate deschisă B_1 a punctului *F*(*M*), astfel încât $F:A_1\to B_1$ este difeomorfism.

Fie $F^{-1}=(\omega_1,\ldots,\omega_{n-1}):B_1\to A_1$, inversa funcției $F:A_1\to B_1$.

Definim

$u(x)=g\left[\omega_1(\varphi_1(x),\ldots,\varphi_{n-1}(x)),\ldots,\omega_{n-1}(\varphi_1(x),\ldots,\varphi_{n-1}(x))\right]$,

$$\forall\ x=(x_1,\dots,x_{n-1},\ x_n)\in D \tag{14}$$

cu proprietatea că $(x_1,\dots,x_{n-1})\in A_1$.

Din Teorema 7.6.3 rezultă că funcția definită în (14) este soluție pentru (9).

Pe de altă parte, observăm că $u(x_1,\dots,x_{n-1},\ a)=g\left[\left(F^{-1}\circ F\right)(x_1,\dots,x_{n-1})\right]=$ $=g(x_1,\dots,x_{n-1})$, oricare ar fi $(x_1,\dots,x_{n-1})\in A_1$, deci funcția definită în (14) este soluția problemei Cauchy (9)+(13). Unicitatea rezultă din unicitatea funcțiilor $\omega_1,\dots,\omega_{n-1}$.

Exemplul 7.6.4 Să se rezolve problema Cauchy

$$\begin{cases} y\dfrac{\partial z}{\partial x}-x\dfrac{\partial z}{\partial y}=0,\ x>0\\ y=0,\ z=x\,. \end{cases}$$

Sistemul simetric este $\dfrac{dx}{y}=\dfrac{dy}{-x}$ sau $xx'+yy'=0$, de unde rezultă integrala primă $x^2+y^2=c$. Soluția generală este $z=\phi\left(x^2+y^2\right)$, unde ϕ este o funcție arbitrară de clasă C^2 pe $\mathbb{R}^2$. Din relațiile $x^2+y^2=c$, $y=0$, $z=x$ deducem $x=\sqrt{c}$ și mai departe $z=\sqrt{x^2+y^2}$. Așadar, soluția problemei Cauchy este $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $x>0$.

O ecuație cu derivate parțiale de ordinul întâi cvasiliniară este de forma:

$$P_1(x_1,\dots,x_n,\ u)\frac{\partial u}{\partial x_1}+\dots+P_n(x_1,\dots,x_n,\ u)\frac{\partial u}{\partial x_n}=P_{n+1}(x_1,\dots,x_n,\ u) \tag{15}$$

unde P_i sunt funcții continue și lipschitziene pe o mulțime deschisă $D\subset\mathbb{R}^{n+1}$ și $\sum_{i=1}^{n+1}P_i^2\neq 0$ pe D. Căutăm soluția ecuației (15) sub forma funcției implicite $u=u(x_1,\dots,x_n)$, definită de ecuația $V(x_1,\dots,x_n,u)=0$, unde V este o funcție de clasă C^1 pe D și $\dfrac{\partial V}{\partial u}\neq 0$ pe D.

Din Teorema funcțiilor implicite rezultă că

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}=-\frac{\dfrac{\partial V}{\partial x_i}}{\dfrac{\partial V}{\partial u}},\ \ i=\overline{1,n} \tag{16}$$

Înlocuind (16) în (15) rezultă:

$$P_1(x_1,\dots,x_n,\ u)\frac{\partial V}{\partial x_1}+\dots+P_n(x_1,\dots,x_n,\ u)\frac{\partial V}{\partial x_n}+P_{n+1}(x_1,\dots,x_n,\ u)\frac{\partial V}{\partial u}=0 \tag{17}$$

Am obținut astfel o ecuație cu derivate parțiale de ordinul întâi liniară. Soluția ecuației (17) este de forma $V=\phi\left[\varphi_1\left(x_1,\ldots,x_n,u\right),\ldots,\varphi_n\left(x_1,\ldots,x_n,u\right)\right]$, $\left(x_1,\ldots,x_n,u\right)\in\Omega$, unde $\varphi_1,\ldots,\varphi_n$ sunt n integrale prime independente ale sistemului $\dfrac{x_1'}{P_1}=\ldots=\dfrac{x_n'}{P_n}=\dfrac{u'}{P_{n+1}}$.

Exemplul 7.6.5 Să se afle soluția generală a ecuației
$2y\dfrac{\partial z}{\partial x}+3x^2\dfrac{\partial z}{\partial y}+6x^2y=0$ şi apoi să se rezolve problema Cauchy $x=0$; $y^2=2z$.

Sistemul simetric ataşat este: $\dfrac{x'}{2y}=\dfrac{y'}{3x^2}=\dfrac{z'}{-6x^2y}=1$.

Din $3x^2x'=2yy'$ deducem $x^3-y^2=C_1$.

Din $3x^2x'=-z'$ deducem $x^3+z=C_2$.

Soluția generală a ecuației este funcția $z=z\left(x,y\right)$ definită implicit de ecuația $\phi\left(x^3-y^2,\, x^3+z\right)=0$, unde $\phi\in C^1\left(\mathbb{R}^2\right)$ este o funcție arbitrară. Pentru a rezolva problema Cauchy eliminăm variabilele x, y, z între relațiile:

$$\begin{cases} x^3-y^2=C_1 \\ x^3+z=C_2 \\ x=0 \\ y^2=2z \end{cases}$$

şi obținem $C_1+2C_2=0$. Înlocuind C_1 şi C_2 cu expresiile din membrul stâng, obținem: $x^3-y^2+2\;x^3+2z=0$. Rezultă că
$z=\dfrac{1}{2}\left(y^2-3x^3\right)$ este soluția problemei Cauchy.